Universidade Federal Fluminense
Disciplina: Fundamentos Matemáticos para Computação
Professor: Luís Felipe

Gabarito Lista 3 – Lógica Matemática: Validade, negação e tautologia

1. Simbolizar os seguintes argumentos:

   (a) Se Tiririca é cantor, então Xuxa é cantora.
   Xuxa não é cantora.
   Logo, Tiririca não é cantor.

   (b) Djalma fala inglês ou não é admitido na empresa.
   Djalma é admitido na empresa.
   Portanto, Djalma fala inglês.

   (c) Se Joel não tem 18 anos, então não tem carteira de motorista.
   Joel não tem carteira de motorista.
   Assim, podemos concluir que Joel não tem 18 anos.

   (d) Se $1+1=2$, então $(1+1)+1=3$.
   Se $(1+1)+1=3$, então $(1+1)+2=\ 4$.
   Logo, $(1+1)+2=4$.

   (e) Se chove, a rua fica molhada.
   Se a rua fica molhada, os carros derrapam.
   Chove.
   Portanto, os carros derrapam.

   (f) Se a é racional, então a é real.
   Se a é real, então a é complexo.
   a não é racional.
   Portanto, a não é complexo.

Resolução: (a) Legenda: $\begin{array}{lcl} t & : & \text{Tiririca é cantor} \\ x & : & \text{Xuxa é cantora.} \end{array}$ Simbolização: $\begin{array}{l} t \to x \\ \neg x \\ \hline \neg t \end{array}$.

(b) Legenda: $\begin{array}{lcl} f & : & \text{Djalma fala inglês} \\ a & : & \text{Djalma é admitido na empresa.} \end{array}$ Simbolização: $\begin{array}{l} f \lor \neg a \\ a \\ \hline \neg f \end{array}$.

(c) Legenda para as componentes: $\begin{array}{lcl} d & : & \text{Joel tem 18 anos} \\ c & : & \text{Joel tem carteira de motorista.} \end{array}$ Simbolização: $\begin{array}{l} \neg d \to \neg c \\ \neg c \\ \hline \neg d \end{array}$.

(d) Legenda: $\begin{array}{lcl} d & : & 1+1=2 \\ t & : & (1+1)+1=3 \\ q & : & (1+1)+2=4. \end{array}$ Simbolização: $\begin{array}{l} d \to t \\ t \to q \\ \hline q \end{array}$. (e) Legenda: $\begin{array}{lcl} c & : & \text{chove} \\ m & : & \text{a rua fica molhada} \\ d & : & \text{os carros derrapam.} \end{array}$

Simbolização: $\begin{array}{l} c \to m \\ m \to d \\ c \\ \hline d \end{array}$. (f) Legenda: $\begin{array}{lcl} q & : & a \text{ é racional} \\ r & : & a \text{ é real} \\ c & : & a \text{ é complexo.} \end{array}$ Simbolização: $\begin{array}{l} q \to r \\ r \to c \\ \neg q \\ \hline \neg c \end{array}$.

2. Verificar a validade dos argumentos do Exercício 1, pelo Método das Tabelas para Validade.

Resolução: Simbolizações na resolução do Exercício 1. (a) Implicação associada: $\varphi : [(t \to x) \wedge (\neg x)] \to \neg t$. Tabela:

t	x	$\neg t$	$\neg x$	$t \to x$	$(t \to x) \wedge \neg x$	φ
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V.

Válido, pois na última coluna da tabela só ocorre V.

(b) Implicação associada: $\varphi : [(f \vee \neg a) \wedge a] \to f$. Tabela:

f	a	$\neg a$	$f \vee \neg a$	$(f \vee \neg a) \wedge a$	φ
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	V
F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	V.

Válido, pois na última coluna da tabela só ocorre V. (c) Implicação associada: $\varphi : [((\neg d) \to \neg c) \wedge \neg c] \to \neg d$. Tabela:

d	c	$\neg d$	$\neg c$	$(\neg d) \to \neg c$	$((\neg d) \to c) \wedge \neg c$	φ
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	V	V	F
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V.

Inválido, pois tomando $d : V$ e $c : F$ temos premissas V e conclusão F. (d) Implicação associada: $\varphi : [(d \to t) \wedge (t \to q)] \to q$. Tabela:

d	t	q	$d \to t$	$t \to q$	$(d \to t) \wedge (t \to q)$	φ
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	F.

Inválido, pois tomando $d : F$, $t : F$ e $q : F$ temos premissas V e conclusão F. (e) Implicação associada: $\varphi : [(c \to m) \wedge (m \to d) \wedge c] \to d$. **Como o $\wedge$ é associativo, não precisamos escrever parênteses no antecedente**. Tabela:

c	m	d	$\overbrace{c \to m}^{\psi_1}$	$\overbrace{m \to d}^{\psi_2}$	$\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge c$	φ
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	V	F	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	V	V	F	V.

Válido, pois na última coluna da tabela só ocorre V. (f) Implicação associada: $\varphi : [(q \to r) \wedge (r \to c) \wedge \neg q] \to \neg c$. Tabela:

q	r	c	$\neg c$	$\overbrace{q \to r}^{\psi_1}$	$\overbrace{r \to c}^{\psi_2}$	$\overbrace{\neg q}^{\psi_3}$	$\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3$	φ
V	V	V	F	V	V	F	F	V
V	V	F	V	V	F	F	F	V
V	F	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V	V	F
F	V	F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	F	V	V	V	V	F
F	F	F	V	V	V	V	V	V.

Inválido, pois tomando $q : F$, $r : V$ e $c : V$

temos premissas V e conclusão F.

3. Verificar a validade dos seguintes argumentos, pelo Método das Tabelas para Validade:

   (a) 2 é par ou 3 é par.
   Se 2 é par, então 4 é par.
   3 não é par.
   Portanto, 4 é par.

   (b) Se a é real, então: a é irracional ou a é racional.
   a não é racional.
   Logo, se a é real, então a é irracional.

   (c) Se Djalma vai às compras, então: André fica em casa se, e somente se, Clåudia fica em casa.
   Cláudia fica em casa.
   Portanto, Djalma vai às compras ou André fica em casa.

   (d) Maria não faz mestrado se Maria não termina a graduação.
   Maria casa ou Maria faz mestrado.
   Não é o caso que Maria casa.
   Assim, Maria faz mestrado se, e somente se, Maria termina a graduação e Maria não casa.

Resolução: (a) Legenda: $\begin{array}{lcl} d & : & 2 \text{ é par} \\ t & : & 3 \text{ é par} \\ q & : & 4 \text{ é par.} \end{array}$ Simbolização: $\begin{array}{l} d \vee t \\ d \rightarrow q \\ \neg t \\ \hline q \end{array}$. Implicação associada: $\varphi : [(d \vee t) \wedge (d \rightarrow q) \wedge \neg t] \rightarrow q$. Tabela:

d	t	q	$\overbrace{d \vee t}^{\psi_1}$	$\overbrace{d \rightarrow q}^{\psi_2}$	$\overbrace{\neg t}^{\psi_3}$	$\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3$	φ
V	V	V	V	V	F	F	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	V
F	V	V	V	V	F	F	V
F	V	F	V	V	F	F	V
F	F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	F	V	V	F	V.

Válido, pois na última coluna tabela só ocorre V. (b) **Não estamos assumindo que ser irracional é a negação de ser racional**. Legenda: $\begin{array}{lcl} r & : & a \text{ é real} \\ i & : & a \text{ é irracional} \\ q & : & a \text{ é racional.} \end{array}$ Simbolização: $\begin{array}{l} r \rightarrow (i \vee q) \\ \neg q \\ \hline r \rightarrow i. \end{array}$ **Apresente uma resolução alternativa para esta questão, considerando que ser irracional é a negação de ser racional**. (c) Legenda: $\begin{array}{lcl} d & : & \text{Djalma vai às compras} \\ a & : & \text{André fica em casa} \\ c & : & \text{Cláudia fica em casa.} \end{array}$ Simbolização: $\begin{array}{l} d \rightarrow (a \leftrightarrow c) \\ c \\ \hline d \vee a \end{array}$. (d) Legenda:

$\begin{array}{lcl} g & : & \text{Maria termina a graduação} \\ m & : & \text{Maria faz mestrado} \\ c & : & \text{Maria casa.} \end{array}$ Simbolização: $\begin{array}{l} \neg g \rightarrow \neg m \\ c \vee m \\ \neg c \\ \hline m \leftrightarrow (g \wedge \neg c) \end{array}$.

4. Verificar a validade dos seguintes argumentos, pelo Método das Tabelas para Validade. Caso seja necessário, antes de simbolizar o argumento, reescreva-o de maneira mais adequada.

(a) O alarme disparou segue de o porteiro ou o segurança está mentindo.
O alarme disparou, se o porteiro não está mentindo.
Logo, se o segurança não está mentindo, o alarme disparou.

(b) Não é verdade que o eu gosto de quiabo e de jiló.
Aliás, também não gosto de agrião.
Não gostaria de jiló, se gostasse de agrião.
Assim, não gosto de agrião e: se gostasse de quiabo, gostaria de jiló.

(c) Se trabalho, ganho dinheiro e posso me divertir.
Se não trabalho, não ganho dinheiro e não posso me divertir.
Consequentemente, se ganho dinheiro, posso me divertir.

(d) Se o aluno tem tempo, mas não é estudioso, ele não é aprovado.
Por outro lado: se ele é estudioso, mas não tem tempo, ele é aprovado.
Daí, o aluno é aprovado se, e somente se, é estudioso.

(e) Se ele é bem formado ou faz boa prova, passa no concurso.
Ele faz boa prova mas não é bem formado.
Logo, ele passa no concurso mesmo sem ser bem formado.

Resolução: (a) Reescrita:

Se (o porteiro está mentindo ou o segurança está mentindo), então o alarme disparou.
Se [não (o porteiro está mentindo)], então o alarme disparou.
———
Se [não (o segurança está mentindo)], então o alarme disparou.

Legenda:

p : o porteiro está mentindo
s : o segurança está mentindo
a : o alarme disparou

. Simbolização:

$$\begin{array}{l} (p \vee s) \to a \\ \neg p \to a \\ \hline \neg s \to a \end{array}.$$

Implicação associada: φ : $\{[(p \vee s) \to a] \wedge (\neg p \to a)\} \to (\neg s \to a)$.

Tabela:

p	s	a	$\overbrace{(p \vee s) \to a}^{\psi_1}$	$\neg p$	$\overbrace{\neg p \to a}^{\psi_2}$	$\psi_1 \wedge \psi_2$	$\neg s$	$\neg s \to a$	φ	
V	V	V	V	V	F	V	V	F	V	V
V	V	F	V	F	F	V	F	F	V	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	F	F	F	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	F	F	V	F	V.

Válido. Na última coluna da tabela só ocorre V.

(b) Reescrita:

Não (eu gosto de quiabo e eu gosto de jiló).
Não (eu gosto de agrião).
Se eu gosto de agrião, então [não (eu gosto de jiló)].
———
[não (eu gosto de agrião)] e [se eu gosto de quiabo, então eu gosto de jiló].

. Legenda:

q : eu gosto de quiabo
j : eu gosto de jiló
a : eu gosto de agrião

. Simbolização:

$$\begin{array}{l} \neg(q \wedge j) \\ \neg a \\ a \to \neg j \\ \hline \neg a \wedge (q \to j) \end{array}.$$

Implicação associada: φ : $[\neg(q \wedge j) \wedge \neg a \wedge (a \to \neg j)] \to [\neg a \wedge (q \to j)]$.

Tabela:

q	j	a	$q \wedge j$	$\overbrace{\neg(q \wedge j)}^{\psi_1}$	$\neg a$	$\neg j$	$\overbrace{a \to \neg j}^{\psi_2}$	$\psi_1 \wedge \neg a \wedge \psi_2$	$q \to j$	$\neg a \wedge (q \to j)$	φ
V	V	V	V	F	F	F	F	F	V	F	V
V	V	F	V	F	V	F	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	F	V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V	F	F	F
F	V	V	F	V	F	F	F	F	V	F	V
F	V	F	F	V	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	V	F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	$V.$

Inválido, pois na interpretação $q : V, j : F$ e $a : F$, temos premissas V e conclusão F. (c) Reescrita:

Se eu trabalho, então (eu ganho dinheiro eu posso me divertir).
Se não (eu trabalho), então [não (eu ganho dinheiro) e não (eu posso me divertir)]. .

Se eu ganho dinheiro, então eu posso me divertir.

Legenda:
t : eu trabalho
d : eu ganho dinheiro
p : eu posso me divertir

. Simbolização: $\begin{array}{l} t \to (d \wedge p) \\ \underline{\neg t \to (\neg d \wedge \neg p)} \\ d \to p \end{array}$.

Implicação associada: $\varphi\ :\ \{[t \to (d \wedge p)] \wedge [\neg t \to (\neg d \wedge \neg p)] \to (d \to p)\}$. Tabela, onde $\theta : d \to p$:

t	d	p	$d \wedge p$	$\overbrace{t \to (d \wedge p)}^{\psi_1}$	$\neg t$	$\neg d$	$\neg p$	$\neg d \wedge \neg p$	$\overbrace{\neg t \to (\neg d \wedge \neg p)}^{\psi_2}$	$\psi_1 \wedge \psi_2$	θ	φ
V	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	F	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	F	F	V	F	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	V	V
F	V	F	F	V	V	F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	F	V	V	V	F	F	F	F	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	$V.$

Válido, pois na última coluna da tabela só ocorre V.

(d) Reescrita:

Se [(o aluno tem tempo e não (o aluno é estudioso)], então não (o aluno é aprovado).
Se [o aluno é estudioso e não (o aluno tem tempo), então o aluno é aprovado]. .

O aluno é aprovado se, e somente se, o aluno é estudioso.

Legenda:
t : o aluno tem tempo
e : o aluno é estudioso
a : o aluno é aprovado

. Simbolização: $\begin{array}{l} (t \wedge \neg e) \to \neg a \\ \underline{(e \wedge \neg t) \to a} \\ a \leftrightarrow e \end{array}$.

Implicação associada: $\varphi\ :\ \{[(t \wedge \neg e) \to \neg a] \wedge [(e \wedge \neg t) \to a]\} \to (a \leftrightarrow e)$.

Tabela:

t	e	a	$\neg e$	$\overbrace{t \wedge \neg e}^{\psi_1}$	$\neg a$	$\overbrace{\psi_1 \to \neg a}^{\theta_1}$	$\neg t$	$\overbrace{e \wedge \neg t}^{\psi_2}$	$\overbrace{(e \wedge \neg t) \to a}^{\theta_2}$	$\theta_1 \wedge \theta_2$	$a \leftrightarrow e$	φ
V	V	V	F	F	F	V	F	F	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F
V	F	V	V	V	F	F	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	V	V	F	V	V	F	F
F	F	F	V	F	V	V	V	F	V	V	V	$V.$

Inválido, pois na interpretação $t : V, e : V$ e $a : F$, temos premissas V e conclusão F. (e) Reescrita:

Se (ele é bem formado ou ele faz boa prova), então ele passa no concurso.
Ele faz boa prova e não (ele é bem formado). .

Ele passa no concurso e não (ele é bem formado).

Legenda:
f : ele é bem formado
p : ele faz boa prova
c : ele passa no concurso

. Simbolização: $\begin{array}{l} (f \vee p) \to c \\ \underline{p \wedge \neg f} \\ c \wedge \neg f \end{array}$. Implicação associada:

$\varphi\ :\ \{[(f \vee p) \to c] \wedge [p \wedge \neg f]\} \to (c \wedge \neg f)$.

Tabela:

f	p	c	$f \vee p$	$\overbrace{(f \vee p) \to c}^{\psi_1}$	$\neg f$	$\overbrace{p \wedge \neg f}^{\psi_2}$	$\psi_1 \wedge \psi_2$	$c \wedge \neg f$	φ
V	V	V	V	V	F	F	F	F	V
V	V	F	V	F	F	F	F	F	V
V	F	V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	F	F	V
F	F	V	F	V	V	F	F	V	V
F	F	F	F	V	V	F	F	F	V.

Válido, pois na última coluna da tabela só ocorre V.

5. Determine a negação de cada enunciado abaixo, ou seja: (1) identifique os enunciados componentes, (2) defina uma legenda, (3) simbolize o enunciado de acordo com a legenda definida, (4) reescreva a negação do enunciado simbolizado através de equivalências e, finalmente, (5) traduza o enunciado obtido ao final do processo de volta para a linguagem natural, de acordo com a legenda definida.

   (a) Não é o caso que $1 + 2 > \pi$
   (b) x é irracional
   (c) $2 + 1 = 3$ e $2 - 1 \neq 1$
   (d) ABC é retângulo e DEF é isósceles
   (e) x é par ou x é primo
   (f) $x < y$ ou x não é positivo
   (g) $\mathbb{N}$ é infinito, então $\mathbb{Z}$ não é finito
   (h) Se A é finito, então $P(A) > 1$
   (i) 2 é par se, e somente se, 2^2 é ímpar
   (j) ABC é um triângulo se, e somente se, $\overline{AX}$ e $\overline{BY}$ são colineares

Resolução: (a) Legenda: $p\ :\ 1 + 2 > \pi$. Simbolização: $\neg p$. Negação: $\neg\neg p$, que é equivalente a p, que é o enunciado original, $1 + 2 > \pi$. (b) Vamos levar em conta que ser irracional é a negação de ser racional. Legenda: $p\ :\ x$ é racional. Simbolização: $\neg p$. Negação: $\neg\neg p$, que é equivalente a p, que é o enunciado *x é racional.* (c) Legenda: $\begin{array}{lcl} p & : & 2+1=3 \\ q & : & 2-1=1. \end{array}$ Simbolização: $p \wedge \neg q$. Negação: $\neg(p \wedge \neg q)$, que é equivalente a $\neg p \vee \neg\neg q$, que é equivalente a $\neg p \vee q$, que é o enunciado $2 + 1 \neq 3$ ou $2 - 1 = 1$. Como $\neg p \vee q$ é equivalente a $p \to q$ **(Verifique esta afirmação!)**, a negação pode ser reescrita como *se* $2 + 1 = 3$*, então* $2 - 1 = 1$ (d) Legenda: $\begin{array}{lcl} p & : & ABC \text{ é retângulo} \\ q & : & DEF \text{ é isósceles.} \end{array}$ Simbolização: $p \wedge q$ Negação: $\neg(p \wedge q)$, que é equivalente a $\neg p \vee \neg q$, que é o enunciado *ABC não é retângulo ou DEF não é isósceles.* Como $\neg p \vee \neg q$ é equivalente a $p \to \neg q$ **(Verifique esta afirmação!)**, a negação pode ser reescrita como *se ABC é retângulo, então DEF não é isósceles.* (e) Legenda: $\begin{array}{lcl} p & : & x \text{ é par} \\ q & : & x \text{ é primo.} \end{array}$ Simbolização: $p \vee q$. Negação: $\neg(p \vee q)$, que é equivalente a $\neg p \wedge \neg q$, que é o encunciado *x não é par e x não é primo.* Se soubéssemos que $x \neq 0$ e $x \neq 1$, este enunciado poderia ser reescrito como *x é ímpar e x é composto.* (f) Vamos levar em conta que $x \geq y$ é a negação de $x < y$, quando x e y são números reais. Legenda: $\begin{array}{lcl} p & : & x < y \\ q & : & x \text{ é positivo.} \end{array}$ Simbolização: $p \vee \neg q$. Negação: $\neg(p \vee q)$, que é equivalente a $\neg p \wedge \neg\neg q$, que é equivalente a $\neg p \wedge q$, que é o enunciado *$x \geq y$ e x é positivo* (g) Vamos levar em conta que ser finito é a negação de ser infinito. Legenda: $\begin{array}{lcl} p & : & \mathbb{N} \text{ é finito} \\ q & : & \mathbb{Z} \text{ é finito.} \end{array}$ Simbolização: $\neg p \to \neg\neg q$. Negação: $\neg(\neg p \to \neg q)$, que é equivalente a $\neg p \wedge \neg\neg q$, que é equivalente a $\neg p \wedge q$, que é o enunciado *$\mathbb{N}$ é finito e $\mathbb{Z}$ é finito* (h) Vamos levar em conta que $x \leq y$ é a negação de $x > y$, quando

x e y são números reais. Legenda: $\begin{array}{lcl} p & : & A \text{ é finito} \\ q & : & P(A) > 1. \end{array}$ Simbolização: $p \to q$ Negação: $\neg(p \to q)$, que é equivalente a $p \wedge \neg q$, que é o enunciado *A é finito e $P(A) \leq 1$.* (i) Vamos levar em conta que ser ímpar é a negação de ser par. Legenda: $\begin{array}{lcl} p & : & 2 \text{ é par} \\ q & : & 2^2 \text{ é par.} \end{array}$ Simbolização: $p \leftrightarrow \neg q$. Negação: $\neg(p \leftrightarrow \neg q)$, que é equivalente a $(p \wedge \neg\neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$, que é equivalente a $(p \wedge q) \vee (\neq p \wedge \neg q)$, que é o enunciado *(2 é par e 2^2 é par) ou (2 é ímpar e 2^2 é ímpar).* (j) Legenda: $\begin{array}{lcl} p & : & ABC \text{ é um triângulo} \\ q & : & \overline{AX} \text{ e } \overline{BY} \text{ são colineares.} \end{array}$ Simbolização: $p \leftrightarrow q$. Negação: $\neg(p \leftrightarrow q)$, que é equivalente a $(p \wedge (\neg q)) \vee ((\neg p) \wedge q)$, que é o enunciado *$ABC$ é um triângulo e $\overline{AX}$ e $\overline{BY}$ não são colineares; ou ABC não é um triângulo e $\overline{AX}$ e $\overline{BY}$ são colineares.*

6. Mostre que os seguintes enunciados são equivalentes, usando sequência de equivalências:

(a) $\neg\neg[\neg(p \vee \neg q)]$ e $\neg p \wedge q$

(b) $\neg(p \wedge q)$ e $q \to \neg p$

(c) $\neg[(p \vee q) \wedge r]$ e $(\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r)$

(d) $p \to (q \to r)$ e $q \to (p \to r)$

(e) $p \to (q \to r)$ e $\neg r \to (p \to \neg q)$

(f) $p \to (q \to (p \wedge q))$ e $\neg p \vee p$

(g) $\neg[p \to (q \wedge r)]$ e $(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r)$

(h) $\neg[(p \wedge q) \wedge r]$ e $p \to (q \to \neg r)$

Resolução: (a) Temos as seguintes equivalências: $\neg\neg[\neg(p \vee \neg q)]$ é equivalente a $\neg(p \vee \neg q)$, que é equivalente a $\neg p \wedge \neg\neg q$, que é equivalente a $\neg p \wedge q$. (b) Temos as seguintes equivalências: $\neg(p \wedge q)$ é equivalente a $\neg p \vee \neg q$, que é equivalente a $\neg q \vee \neg p$, que é equivalente a $q \to \neg p$. (c) Temos as seguintes equivalências: $\neg[(p \vee q) \wedge r]$ é equivalente a $\neg[(p \wedge r) \vee (q \wedge r)]$, que é equivalente a $\neg(p \wedge r) \vee \neg(q \wedge r)$, que é equivalente a $(\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r)$. Outra maneira de chegar ao mesmo resultado: $\neg[(p \vee q) \wedge r]$ é equivalente a $\neg(p \vee q) \vee \neg r$, que é equivalente a $(\neg p \wedge \neg q) \vee \neg r$, que é equivalente a $(\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r)$. (d) Temos as seguintes equivalências: $p \to (q \to r)$ é equivalente a $\neg p \vee (q \to r)$, que é equivalente a $\neg p \vee (\neg q \vee r)$, que é equivalente a $((\neg p \vee \neg q) \vee r)$, que é equivalente a $(\neg q \vee \neg p \vee r)$, que é equivalente a $\neg q \vee (p \to r)$, que é equivalente a $q \to (p \to r)$. (e) Temos as seguintes equivalências: $p \to (q \to r)$ é equivalente a $\neg p \vee (q \to r)$, que é equivalente a $\neg p \vee (\neg q \vee r)$, que é equivalente a $(\neg q \vee r) \vee \neg p$, que é equivalente a $(r \vee \neg q) \vee \neg p$, que é equivalente a $r \vee (\neg q \vee \neg p)$, que é equivalente a $r \vee (\neg p \vee \neg q)$, que é equivalente a $r \vee (p \to \neg q)$, que é equivalente a $\neg\neg r \vee (p \to \neg q)$, que é equivalente $a \neg r \to (p \to \neg q)$. (f) Temos as seguintes equivalências: $p \to (q \to (p \wedge q))$ é equivalente a $\neg p \vee (q \to (p \wedge q))$, que é equivalente a $\neg p \vee (\neg q \vee (p \wedge q))$, que é equivalente a $\neg p \vee [(\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee q)]$, que é equivalente a $\neg p \vee (\neg q \vee p)$, que é equivalente a $(\neg p \vee \neg q) \vee (\neg p \vee p)$, que é equivalente a $\neg p \vee p$. (g) Temos as seguintes equivalências: $\neg[p \to (q \wedge r)]$ é equivalente a $p \wedge \neg(q \wedge r)$, que é equivalente a $p \wedge [(\neg q) \vee (\neg r)]$, que é equivalente a $(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r)$. Uma outra maneira um pouco mais complicada de obter o mesmo resultado é a seguinte: $\neg[p \to (q \wedge r)]$ é equivalente a $\neg[(\neg p) \vee (q \wedge r)]$, que é equivalente a $\neg\{[(\neg p) \vee q] \wedge [(\neg p) \vee r]\}$, que é equivalente a $\{\neg[(\neg p) \vee q]\} \vee \{\neg[(\neg p) \vee r]\}$, que é equivalente a $[(\neg\neg p) \wedge (\neg q)] \vee [(\neg\neg p) \wedge (\neg r)]$, que é equivalente a $(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r)$. (h) Temos as equivalências: $\neg[(p \wedge q) \wedge r]$ é equivalente a $[\neg(p \wedge q)] \vee [\neg r]$, que é equivalente a $[(\neg p) \vee (\neg q)] \vee [\neg r]$, que é equivalente a $[\neg p] \vee [(\neg q) \vee (\neg r)]$, que é equivalente a $[\neg p] \vee [q \to (\neg r)]$, que é equivalente a $p \to (q \to \neg r)$.

7. Classificar cada enunciado abaixo como tautologia, contingência ou contradição.

(a) $p \leftrightarrow (p \wedge p)$

(b) $(\neg p) \to (p \vee q)$

(c) $[(\neg p) \wedge (p \to q)] \to \neg q$

(d) $[\neg(p \to q)] \wedge [(\neg p) \vee q]$

(e) $(p \to q) \to [(q \to r) \to (p \to r)]$

Resolução: (a) Tabela de $\varphi : p \leftrightarrow (p \wedge p)$:

p	$p \wedge p$	φ
V	V	V
F	F	V.

Tautologia, pois φ é V em todas as interpretações. (b) Tabela de $\varphi : (\neg p) \leftarrow (p \wedge q)$:

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	φ
V	V	F	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	V
F	F	V	F	F.

Contingência, pois φ é V na interpretação $p : V$ e $q : V$; e φ é F na interpretação $p : F$ e $q : F$. (c) Tabela de $\varphi : [(\neg p) \wedge (p \to q)] \to \neg q$:

p	q	$\neg p$	$p \to q$	$\neg p \wedge (p \to q)$	$\neg q$	φ
V	V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	F	V	V
F	V	V	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V.

Contingência, pois φ é V na interpretação $p : V$ e $q : V$; e φ é F na interpretação $p : F$ e $q : V$. (d) Tabela de $\varphi : (\neg(p \to q)) \wedge ((\neg p) \vee q)$:

p	q	$p \to q$	$\neg(p \to q)$	$\neg p$	$(\neg q) \vee q$	φ
V	V	V	F	F	V	F
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	V	V	F.

Contradição, pois φ é F em todas as interpretações.

(e) Tabela de $\varphi : (p \to q) \to [(q \to r) \to (p \to r)]$:

p	q	r	$p \to q$	$\neg(p \to q)$	$\neg p$	$(\neg q) \vee q$	φ
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V.

Tautologia, pois φ é V em todas as interpretações.

8. A seguir, temos uma lista com algumas "tautologias famosas". Além de verificar que cada uma delas é uma tautologia, devemos também nos familiarizar com os seus conteúdos. Algumas destas tautologias revelam facetas pitorescas e desconcertantes do tipo de raciocínio empregado em Matemática.

   Mostre que cada enunciado abaixo é uma tautologia.

Tautologia	Nome da tautologia
$[\varphi \wedge (\varphi \to \psi)] \to \psi$	*Modus Ponens*
$[(\varphi \to \psi) \wedge \neg\psi] \to \neg\varphi$	*Modus Tolens*
$(\varphi \to \psi) \to [(\neg\psi) \to (\neg\varphi)]$	Contrapositiva
$[\varphi \to (\psi \wedge \neg\psi)] \to \neg\varphi$	Redução ao Absurdo
$\psi \to (\varphi \to \psi)$	Afirmação do Consequente
$(\neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$	Negação do Antecedente
$(\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi$	Lei da Contradição
$\varphi \to (\psi \vee \neg\psi)$	Lei da Tautologia

Modus Ponens garante que se temos uma implicação e seu antecedente, podemos concluir seu consequente.
Modus Tolens garante que se temos uma implicação e a negação do seu consequente, podemos concluir a negação do seu antecedente.
Contrapositiva garante que se temos uma implicação, também temos que a negação do seu consequente acarreta a negação do seu antecedente.
Redução ao Absurdo garante que se um enunciado acarreta uma contradição, então podemos concluir a sua negação.
Afirmação do Consequente garante que se temos um enunciado, ele decorre de qualquer outro.
Negação do Antecedente garante que se temos a negação de um enunciado, o enunciado negado acarreta qualquer outro.
Lei da Contradição garante que de uma contradição, podemos concluir qualquer enunciado.
Lei da Tautologia garante que uma tautologia é consequência de qualquer enunciado.

Sobre o exercício: Como está dito, todos os enunciados são tautologias. Podemos confirmar isto construindo a tabela de avaliação de cada enunciado, ou através dos seguintes raciocínios baseados nas tabelas dos conectivos: (a) *Modus Ponens* é tautologia, pois não pode ser F. De fato, se tivéssemos $[\varphi \wedge (\varphi \to \psi)] \to \psi : F$, teríamos $\varphi \wedge (\varphi \to \psi) : V$ e $\psi : F$. Mas, $\varphi \wedge (\varphi \to \psi) : V$ acarretaria $\varphi : V$ e $\varphi \to \psi : V$. Agora, $\varphi : V$ e $\psi : F$ acarretariam $\varphi \to \psi : F$, o que iria contra $\varphi \to \psi : V$. (b) *Modus Tolens* é tautologia, pois não pode ser F. De fato, se tivéssemos $[(\varphi \to \psi) \wedge \neg\psi] \to \neg\varphi : F$, teríamos $(\varphi \to \psi) \wedge \neg\psi : V$ e $\neg\varphi : F$. Assim, teríamos $\varphi \to \psi : V$, $\neg\psi : V$ e $\neg\varphi : F$. Daí, teríamos $\psi : F$ e $\varphi : V$, o que acarretaria $\varphi \to \psi : F$, o que iria contra $\varphi \to \psi : V$. (c) Contrapositiva é tautologia, pois não pode ser F. De fato, se tivéssemos $(\varphi \to \psi) \to [(\neg\psi) \to (\neg\varphi)] : F$, teríamos $\varphi \to \psi : V$ e $\neg\psi \to \neg\varphi : F$. Assim, teríamos $\neg\psi : V e \neg\varphi : F$, o que acarretaria $\psi : F$ e $\varphi : V$. Daí, teríamos $\varphi \to \psi : F$, o que iria contra $\varphi \to \psi : V$. (d) Redução ao Absurdo é tautologia, pois não pode ser F. De fato, se tivéssemos $[\varphi \to (\psi \wedge \neg\psi)] \to \neg\varphi : F$, teríamos $\varphi \to (\psi \wedge \neg\psi) : V$ e $\neg\varphi : F$. Assim, teríamos $\varphi : V$ e $\varphi \to (\psi \wedge \neg\psi) : V$. Com isto, teríamos $\psi \wedge \neg\psi : V$, o que iria contra a tabela de $\psi \wedge \neg\psi : V$, o que iria contra a tabela de $\psi \wedge \neg\psi :$ $\begin{array}{ccc} \psi & \neg\psi & \psi \wedge \neg\psi \\ \hline V & F & F \\ F & V & F. \end{array}$ (e) Afirmação do Consequente é tautologia, pois não pode ser F . De fato, se tivéssemos $\psi \to (\varphi \to \psi) : F$, teríamos $\psi : V$ e $\varphi \to \psi : F$. Assim, teríamos $\varphi : V$ e $\psi : F$. Mas, $\psi : F$ iria contra $\psi : V$. (f) Negação do Antecedente é tautologia, pois não pode ser F. De fato, se tivéssemos $(\neg\varphi) \to (\varphi \to \psi) : F$, teríamos $\neg\varphi : V$ e $\varphi \to \psi : F$. Assim, teríamos $\varphi : V$ e $\psi : F$. Mas, $\varphi : V$ iria contra $\neg\varphi : V$. (g) Lei da Contradição é tautologia, pois não pode ser F. De fato, se tivéssemos $(\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi : F$, teríamos $\varphi \wedge \neg\varphi : V$ e $\psi : F$. Mas, $\varphi \wedge \neg\varphi : V$ iria contra a tabela de $\varphi \wedge \neg\varphi :$ $\begin{array}{ccc} \psi & \neg\psi & \psi \wedge \neg\psi \\ \hline V & F & F \\ F & V & F. \end{array}$ (h) Lei da Tautologia é tautologia, pois não pode ser F. De fato, se tivéssemos $\varphi \to (\psi \vee \neg\psi) : F$, teríamos $\varphi : V$ e $\psi \vee \neg\psi : F$. Mas, $\psi \vee \neg\psi : F$ iria contra a tabela de $\psi \vee \neg\psi :$ $\begin{array}{ccc} \psi & \neg\psi & \psi \vee \neg\psi \\ \hline V & F & V \\ F & V & V. \end{array}$

9. Dizemos que dois enunciados φ e ψ *estão em contradição* quando a conjunção $\varphi \wedge \psi$ é uma contradição. Determine qual das frases não está em contradição com a frase:

Matemática Dsicreta é uma matéria linda.

(a) Matemática Dsicreta não é uma matéria.

(b) Matemática Dsicreta é uma matéria feia.

(c) Matemática Dsicreta não é linda.

Resolução: Considere os enunciados (1) *Matemática Discreta é uma matéria linda*, (2) *Matemática Dsicreta não é uma matéria*, (3) *Matemática Dsicreta é uma matéria feia* e (4) *Matemática Dsicreta não é linda*. Reescrita dos enunciados: (1) *Matemática Discreta é uma matéria e Matemática Discreta é linda*, (2) *não (Matemática Discreta é uma matéria)*, (3) *Matemática Discreta é uma matéria feia* e (4) *não (Matemática Discreta é linda)*. Legenda:

m : Matemática Discreta é uma matéria
l : Matemática Discreta é linda
f : Matemática Discreta é feia.

Simbolização: (1) $m \wedge l$, (2) $\neg m$, (3) $m \wedge f$, (4) $\neg l$. Tabela conjunta:

m	l	f	(1)	(2)	(3)	(4)	$(1) \wedge (2)$	$(1) \wedge (3)$	$(1) \wedge (4)$
V	V	V	V	F	V	F	F	V	F
V	V	F	V	F	F	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	V	F	F	F
V	F	F	F	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	F	F	F	F	F
F	V	F	F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	V	F	V	F	F	F
F	F	F	F	V	F	V	F	F	F.

De acordo com a tabela, $(1) \wedge (2)$ e $(1) \wedge (4)$ são contradições, enquanto que $(1) \wedge (3)$ não é, pois é V quando $m : V, l : V$ e $f : V$. Assim, a frase que não está com contradição com (1) é (3).

10. Considere o seguinte enunciado:

Eu gosto de FMC e; como eu gosto de FMC: se eu estudo FMC, eu aprendo FMC.

(a) Simbolize-o.

(b) Considerando que o enunciado acima é verdadeiro e que a pessoa que o proferiu estuda FMC, determine se ela aprende FMC, ou não. Justifique sua resposta.

(c) Determine a negação deste enunciado.

Resposta: (a) Legenda:

p : Eu gosto de FMC
q : Eu estudo FMC
r : Eu aprendo FMC.

Simbolização: $\varphi : p \wedge (p \to (q \to r))$. (b) Como φ é V, temos que p é V e $p \to (q \to r)$ é V. Como p é V e $p \to (q \to r)$ é V, temos que $q \to r$ é V. Como, de acordo com o enunciado, q é V e $q \to r$ é V, temos que r é V. Logo, a pessoa aprende FMC. (c) Vamos determinar a negação de $\varphi : p \wedge (p \to (q \to r))$. Assim:

$\neg[p \wedge (p \to (q \to r))]$ é equivalente a
$\neg p \vee \neg(p \to (q \to r))$ é equivalente a
$\neg p \vee \neg(\neg p \vee (q \to r))$ é equivalente a
$\neg p \vee (p \wedge \neg(q \to r))$ é equivalente a
$\neg p \vee (p \wedge \neg(\neg q \vee r))$ é equivalente a
$\neg p \vee (p \wedge (q \wedge \neg r))$ é equivalente a
$(\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)$ é equivalente a
$(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)$

Com isso, a negação do enunciado é: Eu não gosto de FMC ou estudo FMC, e eu não gosto de FMC ou não aprendo FMC.

11. Durante uma aula de lógica, o professor perguntou aos alunos por um enunciado equivalente a negação de:

$$\varphi\text{: Se } x \text{ é par e } y \text{ é ímpar, então } x+y \text{ é ímpar.}$$

Um dos alunos rapidamente respondeu:

$$\psi\text{: Se } x+y \text{ é par e } y \text{ é ímpar, então } x \text{ é ímpar.}$$

Ao ouvir a resposta do colega, um outro aluno retrucou: nada disso, este enunciado que você proferiu é equivalente ao primeiro.

Sabendo que ser par é a negação de ser ímpar (e vice e versa), determine qual dos dois alunos está correto. Justifique sua resposta.

Reposta: Legenda: $\begin{array}{lcl} p & : & x \text{ é par} \\ q & : & y \text{ é ímpar} \\ r & : & x+y \text{ é ímpar.} \end{array}$ O enunciado original pode ser simbolizado como: $\varphi : (p \wedge q) \to r$. Enquanto que, como ser par é a negação de ser ímpar (e vice-versa), o enunciado que o aluno apresentou como equivalente a negação pode ser simbolizado como: $\psi : (\neg r \wedge q) \to (\neg p)$.

Construindo a tabela verdade conjunta destes enunciados, temos:

p	q	r	$p \wedge q$	φ	$\neg r$	$\neg r \wedge q$	$\neg p$	ψ
V	V	V	V	V	F	F	F	V
V	V	F	V	F	V	V	F	F
V	F	V	F	V	F	F	F	V
V	F	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	F	F	V	V	F	V	V

Como os enunciados φ e ψ possuem os mesmos valores nas mesmas interpretações, eles são equivalentes e o segundo aluno é quem está correto.