Universidade Federal Fluminense
Disciplina: Fundamentos Matemáticos para Computação
Professor: Luís Felipe

Demonstração da Indução Matemática

Indução: A seguir, vamos demonstrar que a Indução Matemática é de fato uma técnica de demonstração matemática. Para essa demonstração, utilizaremos o **Princípio da Boa Ordenação**, que diz: Todo subconjunto não vazio S de $\mathbb{Z}$ limitado inferiormente possui um mínimo.

Teorema da Indução: Seja $P(n)$ uma propriedade, para cada $n \in \mathbb{N}$. Se

i. $P(1)$ é verdadeira e

ii. $P(k)$ verdadeira $\Rightarrow$ $P(k+1)$ verdadeira, $\forall k \in \mathbb{N}$,

então $P(n)$ é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Suponha, por contradição, que as afirmações (i) e (ii) sejam verdadeiras, porém $P(n)$ não seja verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$.

Seja $S \subseteq \mathbb{N}$ onde para cada elemento $s \in S$ a afirmação $P(s)$ seja falsa. Ou seja, $S = \{s \mid P(s) \text{ é falsa}\}$. Como supomos que existe elemento que não satisfaz P, então $S \neq \emptyset$.

Como S é um subconjunto de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}$ é limitado inferiormente, então S também é limitado inferiormente, e assim, pelo Princípio da Boa Ordenação, S possui um elemento mínimo.

Seja $s_0 \in S$ o elemento mínimo de S. Assim, $P(s_0)$ é falsa, por definição de S. Como a afirmação (i) é verdadeira, temos que $P(1)$ é verdadeira, e assim $s_0 > 1$. Portanto, $s_0 \geq 2$.

Considere $k = s_0 - 1$, ou seja, k é o antecessor de s_0. Como $s_0 \geq 2$, então $k \geq 1$. Como s_0 é o elemento mínimo de S, temos que k necessariamente não pertence a S, ou seja, $P(k)$ é verdadeira. Como a afirmação (ii) é verdadeira, então $P(k+1)$ é verdadeira, e assim, como $k = s_0 - 1$, temos $k + 1 = s_0$ e, dessa forma, $P(s_0)$ é verdadeira.

Contradição por termos tomado s_0 como pertencente a S e assim, $P(s_0)$ é falsa. Dessa forma, concluímos que $S = \emptyset$, e portanto, o teorema da indução está demonstrado. $\square$