Aula 9: Princípios aditivo, multiplicativo e aplicações

Luís Felipe

UFF

20 de Outubro de 2020

Luís Felipe
20/10/20

Na aula passada...

- Vimos operações e identidades em conjuntos
- Definimos cardinalidade de um conjunto
- Definimos e mostramos o Princípio da Inclusão e Exclusão para 2 e 3 conjuntos.
- Revisamos Conjuntos Numéricos.

Luís Felipe
20/10/20

Na aula de hoje...

- Resolveremos uma série de problemas que buscam obter cardinalidade de conjuntos.
- Esses conjuntos possuem restrições de modo a serem subconjuntos de outros conjuntos.
- Para tal, usaremos o princípio aditivo e o princípio multiplicativo.
- Veremos consequências do PA e PM.

Luís Felipe

20/10/20

Problemas de contagem

Um problema de contagem trata de objetos que são formados de uma certa maneira, e pergunta-se quantos objetos deste certo tipo podem ser formados.

Esses são os problemas que lidamos em Análise Combinatória.

Luís Felipe

20/10/20

Exemplo 1

Exemplo: Suponha que tenha entrado em cartaz 3 filmes e 2 peças de teatro e você só tenha dinheiro para assistir apenas um desses programas. Quantos são programas que você pode fazer?

Resposta: Como você só tem dinheiro para um evento, então você assiste ou ao filme 1, ou ao filme 2, ou ao filme 3, ou à peça 1 ou à peça 2. Portanto, ao todo, são 5 programas diferentes.

Obs.: Note que, assim, uma forma de obter a solução seria listar todas as possibilidades.

Luís Felipe
20/10/20

Exemplo 2

Exemplo: Suponha que tenha entrado em cartaz 5 filmes e 4 peças de teatro e você só tenha dinheiro para assistir um filme e uma peça de teatro desses programas. Quantos são programas que você pode fazer?

Resposta: Assim como no exemplo anterior, poderíamos listar todas possibilidades de eventos. Note que queremos saber quantos pares de cinema-teatro podemos formar.

Ao analisar as possibilidades: Considerando o filme 1 a ser assistido, temos 4 possíveis peças de teatro. Considerando o filme 2, também temos 4 possíveis peças de teatro. Sendo assim: $\underbrace{4 + 4 + \ldots + 4}_{5 \text{ vezes}} = 20.$

Obs.: Listar todos os possíveis pares é rápido de se obter? É viável?

Luís Felipe
20/10/20

Princípio aditivo

Partição em dois conjuntos: A e B são dois conjuntos disjuntos ($A \cap B = \emptyset$) e união é o conjunto universo considerado no contexto.

Note que os dois exemplos anteriores obedecem a um mesmo princípio básico que chamamos de princípio aditivo (PA).

Princípio aditivo (de dois conjuntos): Se A e B são dois conjuntos disjuntos com, respectivamente, p e q elementos, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos.

Exemplo 1: $A = \{x \mid x \text{ é filme}\} = \{F1, F2, F3\}$
$B = \{x \mid x \text{ é peça de teatro}\} = \{T1, T2\}$

Note que $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B$ é a solução do problema.

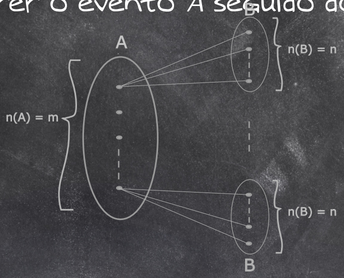
Obs.: O princípio aditivo é exatamente o princípio da inclusão e exclusão para quando a interseção é vazia.

Luís Felipe

20/10/20

Princípio Multiplicativo

Princípio multiplicativo (PM): Se um evento A pode ocorrer de m maneiras diferentes, e se para cada uma dessas m maneiras possíveis de A ocorrer, um outro evento B pode ocorrer de n maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o evento A seguido do evento B é $m.n$.



Obs.: Cada segmento representa um par associado a uma possível solução.

Obs.: Cada segmento representa uma configuração viável para solução.

Luís Felipe

Retornando ao Exemplo 2 . . .

O Exemplo 2 obedece ao princípio multiplicativo. Lembre que você vai assistir um filme e uma peça de teatro. Além disso, pra cada um dos 5 filmes há 4 peças de teatro.

Portanto, há $5.4 = 20$ programas diferentes.

Luís Felipe

20/10/20

PA e PM

Tanto o PA quanto o PM podem ser estendidos para um número finito qualquer de conjuntos.

- PA: Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos tais que $A_i \cap A_j = \emptyset$, para $i \neq j$, e se A_i possui a_i elementos, então a união dos n conjuntos possui $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ elementos.

- PM: Se um evento A_i pode ocorrer de m_i maneiras diferentes, para $i = 1, \ldots, n$, então esses eventos podem ocorrer, em sucessão, de $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$ maneiras diferentes.

Luís Felipe
20/10/20

Exemplo 3

Na sua estante há 7 livros diferentes de matemática e 5 livros diferentes de física. De quantas maneiras você pode escolher um livro de cada matéria?

Resposta: Note que uma configuração é dada por um par sendo um livro de matemática e um livro de física. Como para cada um dos 7 livros de matemática, temos 5 de física, temos então, pelo PM, $5.7 = 35$ possíveis maneiras.

Luís Felipe

20/10/20

Exemplo 4

Na sua estante há 7 livros diferentes de matemática, 5 livros diferentes de física e 3 livros de inglês. De quantas maneiras você pode escolher dois livros com a condição de que os livros não possam ser da mesma matéria?

Resposta: Note que uma configuração é dada por um par sendo que um livro não pode ter mesma matéria do outro escolhido.
Ou seja, dois livros devem ser de matérias distintas.
Podemos obter uma partição em três partes, a seguir:

- Livros escolhidos são de matemática e física: 7×5 maneiras.
- Livros escolhidos são de matemática e inglês: 7×3 maneiras.
- Livros escolhidos são de física e inglês: 5×3 maneiras.

Luís Felipe
20/10/20

Exemplo 4

Observe que cada maneira realmente satisfaz umas dos três tipos a destacados no slide anterior. Além disso, não há maneira que esteja em mais de um tipo apresentado. Assim, isso foi de fato uma partição do conjunto solução.

Com isso, pelo PA temos $(7 \times 5) + (7 \times 3) + (5 \times 3)$ maneiras.

Luís Felipe
20/10/20

Exemplo 5

Quantos anagramas podemos formar com a palavra chinelo de modo que as vogais estão juntas?

Resposta: Temos 4 consoantes e 3 vogais. Usemos a seguinte estratégia:

1. Remova as vogais;
2. Verifique os anagramas das consoantes;
3. Verifique os anagramas das vogais;
4. Nos espaços entre consoantes coloque os anagramas das vogais.

Luís Felipe
20/10/20

Exemplo 5

1. Ao remover as vogais, queremos saber quantos anagramas há com as 4 consoantes.

2. Uma configuração é uma palavra de 4 consoantes distintas, donde para a primeira posição temos 4 possibilidades, para a segunda temos 3, para a terceira temos 2 e para a quarta nos restam 1 possibilidade. Assim, pelo PM, temos $4 \times 3 \times 2 \times 1$ anagramas das consoantes.

3. Uma configuração é uma palavra de 3 vogais distintas. Pelo PM (similar ao caso anterior), temos $3 \times 2 \times 1$ anagramas das vogais.

4. Note que há 5 espaços possíveis para alocar os anagramas das vogais. A saber: antes da primeira consoante, entre a primeira e a segunda consoante, ..., após a quarta consoante. Assim, pelo PM, temos $5 \times (3 \times 2 \times 1) \times (4 \times 3 \times 2 \times 1)$ maneiras.

Luís Felipe
20/10/20

Exemplo 6

De quantas maneiras podemos distribuir n objetos diferentes em duas caixas diferentes, de modo que nenhuma caixa fique vazia?

Resposta: Note que as configurações podem ser separadas da seguinte forma:

- A: uma caixa possui todos os objetos.
- B: nas duas caixas há objetos

Pelo PA, temos que $n(A) + n(B)$ nos dá o número de distribuições dos n objetos.
Suponha uma caixa seja rotulada por C_1 e outra caixa seja rotulada por C_2. Uma configuração é uma atribuição de rótulos para os n objetos.
Como cada objeto por estar em 2 possíveis caixas, pelo PM, temos o total de $\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n \text{ vezes}} = 2^n$ distribuições.
Ou seja, $n(A) + n(B) = 2^n$. Note que $n(A) = 2$ (ou todos os objetos estão em C_1 ou estão em C_2). Assim: $n(B) = 2^n - 2$.

Luís Felipe
20/10/20

Permutações simples

Problema: De quantas formas podemos organizar quatro pessoas numa fila?

Uma configuração é uma sequência de quatro pessoas em fila. Pelo PM, temos $4 \times 3 \times 2 \times 1$ maneiras.

De modo geral, quando queremos saber quantas são as arrumações de n objetos distintos em ordem, resolvemos da seguinte forma: $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$.

Em outras palavras, o número de arrumações de n objetos distintos em ordem é a permutação de n elementos.

$$P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!$$

Obs.: Retornando ao Exemplo 5, há 3! formas de organizar as 3 vogais e 4! formas de organizar as 4 consoantes. Assim: $5 \times P_3 \times P_4$ anagramas da palavra chinelo com as vogais juntas.

Luís Felipe
20/10/20

Exercício

De quantas formas 12 moças e 12 rapazes podem formar pares para uma dança?

Dica: Pense em cada moça escolher um rapaz. Inicialmente, uma moça tem quantos rapazes disponíveis?! E depois?...

Luís Felipe
20/10/20

Arranjos simples

Problema: De quantas formas podemos organizar um pódio (de 3 pessoas) de uma disputa de natação envolvendo 8 competidores?

Uma configuração é uma sequência de três pessoas, escolhidas em ordem dentre 8. Pelo PM, temos $8 \times 7 \times 6$ maneiras.

Uma outra forma de resolver seria pela seguinte conta: $8 \times 7 \times 6 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$

De modo geral, quando queremos saber quantas são as arrumações de k objetos dentre n objetos distintos em ordem, resolvemos da seguinte forma: $\frac{n!}{(n-k)!}$

Em outras palavras, o número de arrumações de k objetos dentre n objetos distintos em ordem é o arranjo de n objetos tomados k a k.

$$A(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Luís Felipe
20/10/20

Exemplo

Retornando aos anagramas da palavra chinelo, queremos agora obter quantos são os anagramas de modo que as três vogais estejam separadas.

Resposta: Similar ao Exemplo 5, vamos resolver esta questão por etapas. Inicialmente remova as vogais; ordene as consoantes; escolha três lugares para ocupar as vogais.

- Ordenar as consoantes: P_4 maneiras;
- Escolher três lugares para as vogais: Temos, aqui, 5 posições (antes da primeira consoantes, entre a primeira e a segunda, . . ., após a quarta) para ocupar somente três delas as letras i, e, o. Temos assim, $A(5, 3)$ maneiras;
- Com isso, temos: $P_4 \times A(5, 3)$.

Luís Felipe
20/10/20

Combinações simples

Problema: De quantas formas podemos ter um trio para formar um pódio (de 3 pessoas) de uma disputa de natação envolvendo 8 competidores?

Uma configuração é um conjunto de três pessoas, escolhidas dentre 8. Como resolver este problema?

Note que na contagem $A(8,3)$ temos mais do que trios, pois também temos também ordem entre eles. Ou seja, se João, Marcos e Lucas são escolhidos, isto é diferente se Marcos, Lucas e João são escolhidos, pois a ordem é importante.

Note também que cada conjunto de 3 elementos possui P_3 arrumações entre eles (por exemplo: JMC, JCM, MCJ, MJC, CMJ, CJM). Da solução de $A(8,3)$ temos que cada trio possui P_3 configurações que devem ser consideradas iguais.

Assim, a solução deste problema apresentado é dado por: $\frac{A(8,3)}{P_3} = \frac{A(8,3)}{3!}$.

Luís Felipe
20/10/20

Combinações simples

De modo geral, quando queremos saber quantas são os conjuntos de k objetos dentre n objetos distintos, resolvemos da seguinte forma: $\frac{A(n,k)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Em outras palavras, o número de conjuntos de k objetos dentre n objetos distintos é a combinação de n objetos tomados k a k.

$$C(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Luís Felipe

20/10/20

Exemplo

Quantas diagonais um polígono regular de n lados possui?

Resposta: Note que inicialmente podemos obter todos os conjuntos de dois vértices do polígono. Com isso temos $C(n,2)$ pares.

Como toda diagonal é necessariamente dentre vértices que não são consecutivos no polígono, e há n pares consecutivos.

Portanto, pelo PA, temos uma partição dentre os pares que são consecutivos e os não consecutivos no polígono. Seja D o número de diagonais, temos: $C(n,2) = n + D$.

Assim, $D = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-1)-2n}{2} = \frac{n(n-1-2)}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$.