Aula 8: Álgebra dos conjuntos e Cardinalidade dos conjuntos

Luís Felipe

UFF

13 de Outubro de 2020

Luís Felipe
13/10/20

Na aula passada...

- Vimos noções iniciais em Teoria dos Conjuntos

Luís Felipe
13/10/20

Na aula de hoje...

- Veremos operações e identidades em conjuntos

- Definiremos cardinalidade de um conjunto

- Definiremos e mostraremos o Princípio da Inclusão e Exclusão para 2 e 3 conjuntos.

- Revisaremos Conjuntos Numéricos.

Luís Felipe

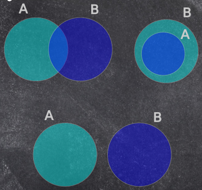
13/10/20

União de Conjuntos

Dados 2 conjuntos A e B, a união de A e B é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A ou a B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

$A \cup B$ é formado pelos elementos que pertencem a, pelo menos um dos dois conjuntos.



Luís Felipe
13/10/20

Exemplos:

1. $\{a, b\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$
2. $\{a, b\} \cup \{a, b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$
3. $\{a, b, c\} \cup \{c, d, e\} = \{a, b, c, d, e\}$
4. $\{a, b, c\} \cup \emptyset = \{a, b, c\}$
5. $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$

Luís Felipe

13/10/20

Propriedades da União

Sejam A,B,C conjuntos quaisquer. Valem as seguintes propriedades:

1. $A \cup A = A$ (idempotente)
2. $A \cup \emptyset = A$ (elemento neutro)
3. $A \cup B = B \cup A$ (comutativa)
4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (associativa)

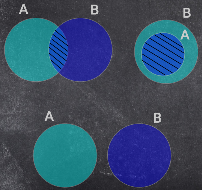
Luís Felipe
13/10/20

Interseção de Conjuntos

Dados 2 conjuntos A e B, a interseção de A e B é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem, simultaneamente, a A e a B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

$A \cap B$ é formado pelos elementos que pertencem a A e B, ao mesmo tempo.



Luís Felipe
13/10/20

Propriedades da Interseção

Sejam A,B,C conjuntos quaisquer. Valem as seguintes propriedades

1. $A \cap A = A$ (idempotente)
2. $A \cap U = A$ (elemento neutro)
3. $A \cap B = B \cap A$ (comutativa)
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (associativa)

Luís Felipe
13/10/20

Conjuntos disjuntos

Dois conjuntos A e B são disjuntos se $A \cap B = \emptyset$.

Luís Felipe
13/10/20

Relações com união e interseção

Sejam A, B, C conjuntos quaisquer. Valem as seguintes propriedades

1. $A \cup (A \cap B) = A$ (lei de absorção)
2. $A \cap (A \cup B) = A$ (lei de absorção)
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributiva do $\cup$ sobre $\cap$)
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributiva do $\cap$ sobre $\cup$)

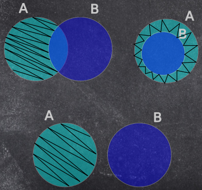
Luís Felipe
13/10/20

Diferença de Conjuntos

Dados 2 conjuntos A e B, a diferença entre A e B é o conjunto formado por todos os elementos de A que não pertencem a B.

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

$A - B$ é formado pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B.



Luís Felipe
13/10/20

Exemplos:

1. $\{a, b, c\} - \{b, c, d, e\} = \{a\}$
2. $\{a, b, c\} - \{b, c\} = \{a\}$
3. $\{a, b\} - \{c, d, e, f\} = \{a, b\}$
4. $\{a, b\} - \{a, b, c, d, e\} = \emptyset$

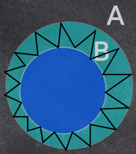
Luís Felipe
13/10/20

Complementar de B em A

Dados 2 conjuntos A e B, tais que $\boxed{B \subseteq A}$, chama-se complementar de B em A, o conjunto A-B.

Notação: C_A^B

$$C_A^B = A - B$$



Luís Felipe
13/10/20

Exemplos:

1. $A = \{a, b, c, d, e\} \;\; B = \{c, d, e\} \to C_A^B = \{a, b\}$
2. $A = \{a, b, c, d\} = B \to C_A^B = \emptyset$
3. $A = \{a, b, c, d\} \;\; B = \emptyset \to C_A^B = A$

OBS.:

1. Quando o conjunto A é U, denotamos $C_U^B = \overline{B}$
2. $A - B = A \cap \overline{B}$

Luís Felipe
13/10/20

Propriedades da complementação

Sejam B, C subconjuntos de A. Valem as seguintes propriedades

1. $C_A^B \cap B = \emptyset$
2. $C_A^B \cup B = A$
3. $C_A^A = \emptyset$
4. $C_A^\emptyset = A$
5. $C_A^{C_A^B} = B$
6. $C_A^{B \cap C} = C_A^B \cup C_A^C$
   Quando $A = U$, temos: $\overline{(B \cap C)} = \overline{B} \cup \overline{C}$
   Lei de De Morgan
7. $C_A^{B \cup C} = C_A^B \cap C_A^C$
   Quando $A = U$, temos: $\overline{(B \cup C)} = \overline{B} \cap \overline{C}$
   Lei de De Morgan

Luís Felipe

13/10/20

Vamos demonstrar?

1. $A \subseteq B$ e $A \subseteq C \rightarrow A \subseteq (B \cap C)$
2. $A \subseteq B \leftrightarrow A - B = \emptyset$
3. $\overline{(A \cup B)} \subseteq (\overline{A} \cup \overline{B})$

Luís Felipe

13/10/20

Álgebra de Conjuntos

Utilize as propriedades vistas nas operações de união, interseção, diferença e complemento para conjuntos para demonstrar algebricamente proposições sobre conjuntos.

1. $(A \cup B) \cap \overline{B} = A \cap \overline{B}$
2. $A \cap (\overline{B \cup C}) = (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C})$
3. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$
4. $\overline{(A \cap \overline{B})} \cup (B \cap C) = (\overline{A} \cup B)$

Luís Felipe
13/10/20

Veremos agora…

- Definiremos cardinalidade de um conjunto
- Definiremos e mostraremos o Princípio da Inclusão e Exclusão para 2 e 3 conjuntos.
- Revisaremos Conjuntos Numéricos

Luís Felipe
13/10/20

Cardinalidade

Seja A um conjunto qualquer. Denotamos por $n(A)$ o número de elementos do conjunto A, ou a cardinalidade de A.

Exemplos:

1. $A =$
   $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 3\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
   $n(A) = 7$
2. $A = \{x \mid x$ é pessoa e nasceu antes de $2000\}$
   A está bem definido e é finito, mas, dependendo do contexto, pode se tornar impraticável contar A.

Luís Felipe
13/10/20

Cardinalidade da união de conjuntos

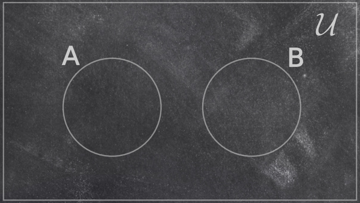
Vamos assumir que temos um conjunto finito e que é possível determinar $n(A)$.
Nosso objetivo é, dados A e B, calcular $n(A \cup B)$.

Como?

Luís Felipe
13/10/20

Conjuntos disjuntos

Inicialmente, vamos considerar A e B disjuntos ($A \cap B = \emptyset$)



$$\boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B)}$$

Princípio Aditivo

Luís Felipe
13/10/20

Exemplo:

$U = \{x \mid x$ é aluno da UFF $\}$

$A = \{x \mid x$ é aluno do 1o período de SI $\}$

$B = \{x \mid x$ é aluno do 2o período de SI $\}$

Dados $n(U) = 1000$, $n(A) = 30$, $n(B) = 60$

Calcule a quantidade de alunos da UFF que estão no 1o ou 2o período de SI.

Luís Felipe
13/10/20

OBS.: Com 3 conjuntos A,B,C 2 a 2 disjuntos, temos:

$$\boxed{n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)}$$

Luís Felipe
13/10/20

Princípio da Inclusão e Exclusão

- Dois conjuntos: Dados A e B, então

$$\boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$

Luís Felipe
13/10/20

Princípio da Inclusão e Exclusão

- Três conjuntos: Dados A, B e C, então

$$\boxed{\begin{gathered} n(A \cup B \cup C) = \\ n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \end{gathered}}$$

Luís Felipe

13/10/20

Exemplo: Determine a quantidade de números naturais que existem entre 1 e 100 (inclusive) que não são divisíveis por 2 nem por 5.

Luís Felipe
13/10/20

Conjuntos Numéricos

Faremos uma breve revisão sobre Conjuntos Numéricos e suas propriedades.

Luís Felipe
13/10/20

Números Naturais

- É o conjunto denotado por $\mathbb{N}$ formado pelos números $1, 2, 3, 4, \ldots$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

OBS.: Neste curso, não consideramos o número 0 como número natural.

Luís Felipe
13/10/20

Propriedade fundamental

Todo número natural possui um sucessor, que também é um número natural.

Além disso, números naturais diferentes têm sucessores diferentes.

O único número natural que não é sucessor de nenhum outro é o número 1.

Luís Felipe

13/10/20

Definição de $\mathbb{N}$

Uma definição natural para $\mathbb{N}$ é a seguinte:

1. 1 é número natural
2. Se n é número natural, então $(n+1)$, seu sucessor, também é número natural
3. Todo número natural é obtido usando 1 e 2

Luís Felipe

13/10/20

Operações em $\mathbb{N}$

- Operações fundamentais: adição e multiplicação
- Propriedades válidas:
  - $a+b = b+a$ comutativa da adição
  - $ab = ba$ comutativa da multiplicação
  - $(a+b)+c = a+(b+c)$ associativa da adição
  - $(ab)c = a(bc)$ associativa da multiplicação
  - $a(b+c) = ab + ac$ distributiva da multiplicação sobre a adição
  - $a \times 1 = a$ elemento neutro da multiplicação

OBS.:

1. Note que, pelo fato do zero não ser considerado natural, não temos o elemento neutro da adição.
2. Em $\mathbb{N}$ não temos a operação de subtração bem definida, uma vez que não existe o simétrico de a, $-a$, em $\mathbb{N}$, para todo $a \in \mathbb{N}$

Luís Felipe
13/10/20

Números inteiros

- É o conjunto denotado por $\mathbb{Z}$ formado pelos números naturais, os simétricos e o zero.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

- Subconjuntos:

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ inteiros não negativos
$\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$ inteiros não positivos
$\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\}$ inteiros não nulos
$\mathbb{Z}_+{}^* = \mathbb{N}$ naturais
$\mathbb{Z}_-{}^* = \{\ldots, -3, -2, -1\}$ inteiros negativos

Luís Felipe
13/10/20

Propriedades e Operações em $\mathbb{Z}$

- São válidas em $\mathbb{Z}$ todas as propriedades válidas em $\mathbb{N}$ acrescidas de:
  5. $a+0 = a$ elemento neutro da adição
  6. $a+(-a) = 0$ simétrico ou oposto

OBS.: Devido à propriedade 6, podemos definir a operação de subtração em $\mathbb{Z}$:

$a + (-b) = a-b, \forall\, a,b \in \mathbb{Z}$

Luís Felipe
13/10/20

Divisor inteiro

Dizemos que $a \in \mathbb{Z}^*$ é divisor inteiro de b, e denotamos por $a \mid b$ (lê-se: a divide b), quando $\exists\, c \in \mathbb{Z}$ tal que $ca = b$

$$\boxed{a \mid b \leftrightarrow (\exists\, c \in \mathbb{Z} \mid ca = b)}$$

Equivalentemente, podemos denotar $a \mid b$ por $b \equiv 0 \pmod{a}$, ou, ainda, por $b \% a = 0$.

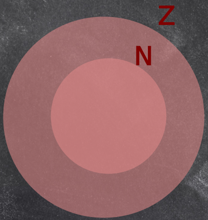
Exemplo:

1. $2 \mid 12$ pois $6 \times 2 = 12$
2. $3 \mid 27$ pois $9 \times 3 = 27$
3. $-5 \mid 20$ pois $-4 \times -5 = 20$
4. $4 \mid 0$ pois $0 \times 4 = 0$
5. $d \mid 0$ pois $0 \times d = 0, \forall\, d \in \mathbb{Z}^*$

Luís Felipe

13/10/20

Diagrama



Luís Felipe
13/10/20

Considerações finais sobre $\mathbb{Z}$

- Em $\mathbb{Z}$ temos solução para a equação $2x+3=0$??
  - Não, pois não existe a noção de inverso multiplicativo de um número $a \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$
  - Consequentemente, a operação de divisão não está bem definida em $\mathbb{Z}$.

Luís Felipe
13/10/20

Números Racionais

- O conjunto dos números racionais, denotado por $\mathbb{Q}$, é o conjunto dos pares ordenados $\frac{a}{b}$, onde $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$ que satisfazem:

1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow ad = bc$ igualdade
2. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ adição
3. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ multiplicação

Luís Felipe
13/10/20

Fração Irredutível

- Dizemos que $\frac{a}{b}$ é uma fração, onde a é o numerador e b é o denominador.
- Uma fração é irredutível, se $MDC(a,b) = 1$. Neste caso, a e b são ditos primos entre si.

Luís Felipe
13/10/20

OBS.: Considere $\mathbb{Q}' = \left\{ \frac{x}{1} \mid x \in \mathbb{Z} \right\}$.

Note que:

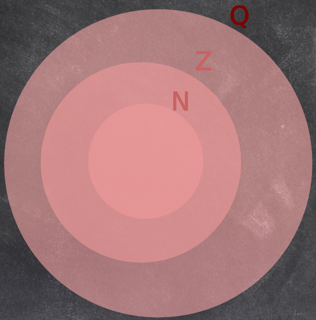
1. $\frac{a}{1} = \frac{b}{1} \leftrightarrow a = b$
2. $\frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \frac{a+b}{1} = a + b$
3. $\frac{a}{1} \times \frac{b}{1} = \frac{ab}{1} = ab$

Logo, $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

Luís Felipe

13/10/20

Diagrama



Luís Felipe
13/10/20

Propriedades e Operações em $\mathbb{Q}$

- São válidas em $\mathbb{Q}$ todas as propriedades válidas em $\mathbb{Z}$ acrescidas de:
  7. $\forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*, \exists \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}^*$ tal que $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$
- Todas as operações válidas em $\mathbb{Z}$ são válidas em $\mathbb{Q}$ e, devido à propriedade 7., podemos definir a operação de divisão em $\mathbb{Q}$.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}, \ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ e } \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}^*$$

Luís Felipe
13/10/20

Representação

Todo número racional pode ser representado por um número fracionário. Temos dois casos possíveis:

1. número fracionário com quantidade finita de algarismos, i.e., fracionário exato.

   Exemplos:

   - $\frac{3}{1} = 3$
   - $\frac{1}{20} = 0.05$
   - $\frac{1}{2} = 0.5$
   - $\frac{27}{1000} = 0.027$

Luís Felipe
13/10/20

Representação

2. número fracionário com infinitos algarismos que se repetem periodicamente, i.e., dízima periódica.
   Exemplos:
   - $\frac{1}{3} = 0.333...$
   - $\frac{2}{7} = 0.285714285714...$

Luís Felipe
13/10/20

Considerações finais sobre $\mathbb{Q}$

- $\mathbb{Q}$ cobre todos os números que conhecemos?
- Qual o comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1, por exemplo?
  - Mais adiante, em Técnicas de demonstração, vamos mostrar que $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Luís Felipe

13/10/20

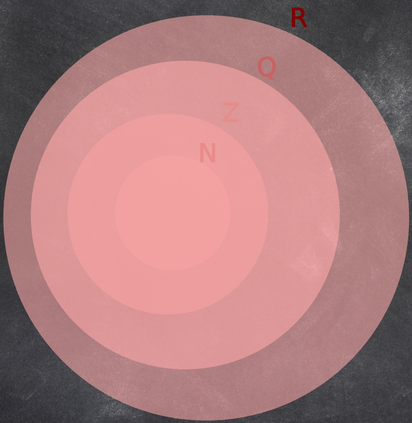
Números Reais

- Composto por todos os números de representação fracionária, i.e., exatas e periódicas (que constituem $\mathbb{Q}$), não exatas e não periódicas (que constituem o conjunto dos números irracionais, denotado por $\mathbb{I}$).
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

Luís Felipe

13/10/20

Diagrama



Luís Felipe
13/10/20

Operações em $\mathbb{R}$

- Todas as operações válidas em $\mathbb{Q}$ são válidas em $\mathbb{R}$.
- Em $\mathbb{R}_+$ a operação de radiciação está bem definida, i.e., $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}$

OBS.: Quando $n \in \mathbb{N}$ é ímpar, $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R}$

Luís Felipe
13/10/20

Considerações finais sobre $\mathbb{R}$

- Em $\mathbb{R}$, a equação $x^2+1=0$ tem solução?
- Acabamos de ver que a operação de radiciação só está bem definida em $\mathbb{R}_+$.

Luís Felipe
13/10/20

Números Complexos

Denotado por $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos é o conjunto formado por elementos $x = a + bi$, onde $i = \sqrt{-1}$.