Aula 7: Teoria dos Conjuntos: Noções Iniciais

Luís Felipe

UFF

08 de Outubro de 2020

Luís Felipe
08/10/20

Na aula de hoje...

- Veremos noções iniciais da Teoria dos Conjuntos
- Conjuntos importantes
- Propriedades de conjuntos

Luís Felipe

08/10/20

Teoria dos Conjuntos

Em Teoria dos conjuntos, 3 noções são aceitas sem definição, i.e., são noções primitivas:

1. conjunto
2. elemento
3. pertinência entre elemento e conjunto

Luís Felipe
08/10/20

Conjuntos

De modo geral, um conjunto é um agrupamento, uma coleção de objetos distintos.

Exemplos:

1. conjunto das vogais
2. conjunto dos alunos de FMC
3. conjunto de professores do DCC
4. conjunto dos números naturais
5. conjunto dos meses com 30 dias
6. conjunto dos números ímpares

Note que, em todos esses conjuntos, os elementos satisfazem a uma determinada propriedade que define o conjunto.

Luís Felipe
08/10/20

Elemento x conjunto

Cada objeto que compõe um conjunto é dito elemento do conjunto.

Exemplos:

1. a, e, i, o, u
2. Vocês
3. 1,2,3,4...
4. abril, junho, setembro, novembro
5. 1,3,5,7,...

Luís Felipe

08/10/20

Mais formalmente...

Um conjunto é uma coleção BEM DEFINIDA de objetos, denominados elementos.

Exemplo: C é o conjunto das pessoas altas

Este conjunto está BEM DEFINIDO?

Uma pessoa de 1,78 é elemento de C?

Para que os objetos que pertencem a este conjunto estejam bem definidos, faz-se necessária a redefinição de C.

C é o conjunto das pessoas com, pelo menos, 1,77 m.

Luís Felipe
08/10/20

Elemento × conjunto

Dado um conjunto, dizemos que um objeto pertence ao conjunto se este objeto for elemento deste conjunto.

Exemplo: O objeto 5 pertence ao conjunto dos números ímpares, pois é elemento deste conjunto.

Luís Felipe
08/10/20

Elemento × conjunto

Observações:

1. A relação de pertinência é uma relação entre elemento e conjunto.
2. Um conjunto pode ser elemento de um outro conjunto.

Exemplo:

Conjunto das seleções que disputam um campeonato

Luís Felipe
08/10/20

Notação

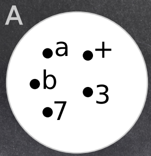
- Denotamos um conjunto por uma letra maiúscula: $A, B, C, \ldots$
- Denotamos um elemento de um conjunto por uma letra minúscula: $a, b, c, \ldots, x, y, \ldots$
- Seja A um conjunto e x um elemento de A.
  Neste caso, escrevemos: $x \in A$.
  Se x não pertence a A, escrevemos: $x \notin A$

Luís Felipe
08/10/20

Representação

É comum representarmos um conjunto utilizando diagramas. No Diagrama de Venn:

- um círculo representa o conjunto
- pontos interiores ao círculo representam os elementos do conjunto



$a \in A \qquad + \in A \qquad j \notin A$

Luís Felipe
08/10/20

Descrição

Podemos fazê-la através da enumeração dos elementos do conjunto ou através da propriedade característica dos elementos que o compõem.

No caso da enumeração, os elementos são escritos entre chaves:

Exemplos:

1. conjunto das vogais $\{a, e, i, o, u\}$
2. conjunto dos números naturais $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
3. conjunto dos meses do ano com 30 dias
   {abril, junho, setembro, novembro}
4. conjunto dos números ímpares positivos $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

Luís Felipe

08/10/20

Descrição através de propriedade

No caso de descrever um conjunto A por meio de uma propriedade característica P de seus elementos, escrevemos:

$$A = \{x \mid x \text{ tem a propriedade } P\}$$

lê-se: "A é o conjunto dos elementos x tal que x tem a propriedade P"

Exemplos:

1. $\{x \mid x$ é um estado da região Sul do país $\}$
   - { Santa Catarina, Paraná, Rio Grande do Sul }
2. $\{x \mid x$ é divisor inteiro de 3 $\}$
   - $\{ -3, -1, 1, 3 \}$

Luís Felipe
08/10/20

Alguns Conjuntos Importantes

- Conjunto unitário: conjunto com apenas um elemento
  Exemplos:
  1. conjunto dos divisores positivos de 1: $\{1\}$
  2. conjunto dos estados brasileiros que fazem fronteira com o Uruguai: {Rio Grande do Sul}
- Conjunto vazio: não possui elemento Notação: $\emptyset$ ou $\{\}$
  Exemplos:
  1. $\{x \mid x \neq x\} = \emptyset$
  2. $\{x \mid x$ é ímpar e múltiplo de $2\} = \emptyset$

Obs.: $\{\emptyset\}$ é um conjunto unitário cujo elemento é o conjunto vazio. Não confundam com o conjunto vazio.

Luís Felipe
08/10/20

Conjunto universo

- Conjunto universo: conjunto U ao qual pertencem todos os elementos que participam de um mesmo contexto

  Exemplos:

  1. Ao considerarmos todas as soluções reais para uma equação, o conjunto U é o conjunto dos números reais.
  2. Ao resolvermos um problema de geometria plana, o conjunto universo é o plano.

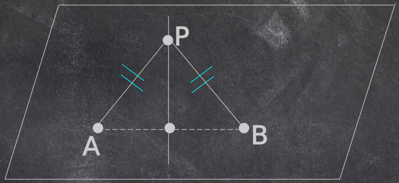
OBS.: Quase sempre a resposta de um problema depende do conjunto universo U no qual ele está contextualizado.

Luís Felipe
08/10/20

Exemplo: Qual o conjunto de pontos P que ficam a igual distância de dois pontos distintos A e B?
Depende

1. Se U é a reta AB, o conjunto procurado é P, unitário.

2. Se U é o plano contendo A, B, o conjunto procurado é a reta mediatriz do segmento $\overline{AB}$



Luís Felipe
08/10/20

Logo, quando vamos descrever um conjunto através de uma propriedade P, é fundamental fixarmos o conjunto universo U no qual estamos trabalhando.

$$\{x \in U \mid x \text{ tem a propriedade } P\}$$

Luís Felipe
08/10/20

Conjuntos iguais

Sejam A e B dois conjuntos. $A = B$ (A é igual a B) sse todo elemento de A é também elemento de B e vice-versa.

$$A = B \leftrightarrow \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Exemplos:

1. $\{a, b, c, d\} = \{d, b, c, a\}$
2. $\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\} = \{x \mid x$ é inteiro, positivo e ímpar $\}$
3. $\{x \in \mathbb{N} \mid 2x + 1 = 5\} = \{2\}$
4. $\{a, b, c, d\} = \{a, a, a, b, c, d, d\}$

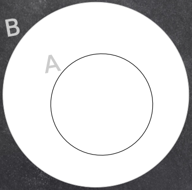
Se A não é igual a B, escrevemos $A \neq B$
Exemplo: $\{a, b, d\} \neq \{a, b, c, d\}$

Luís Felipe
08/10/20

Subconjuntos

Um conjunto A é subconjunto de um conjunto B sse todo elemento de A é também elemento de B.

Notação: $A \subseteq B$
$B \supseteq A$



Em símbolos:

(I)

$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$$

Luís Felipe
08/10/20

Exemplos:

1. $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, d\}$
2. $\{a, b\} \subseteq \{a, b\}$
3. $\{x \mid x$ é inteiro e par $\} \subseteq \{x \mid x$ é inteiro $\}$

Quando A não é subconjunto de B, denotamos por $A \not\subseteq B$

Exemplos:

1. $\{a, b, c\} \not\subseteq \{b, c, d, e\}$
2. $\{x \mid x$ é inteiro e par $\} \not\subseteq \{x \mid x$ é inteiro e primo $\}$

Luís Felipe

08/10/20

Inclusão estrita

Dizemos que um conjunto A é subconjunto próprio (ou estrito) de um conjunto B sse A é subconjunto de B e existe ao menos um elemento de B que não é elemento de A.

Notação: $A \subset B$

$B \supset A$

Obs.: Note que se $A \subset B$ então $A \subseteq B$, mas se $A \subseteq B$ então não necessariamente $A \subset B$.

Luís Felipe
08/10/20

OBS.:

1. A partir de (I), temos:

$$\boxed{A = B \leftrightarrow A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A}$$

2. A relação de inclusão é sempre entre conjuntos.

Luís Felipe
08/10/20

Propriedades da inclusão

Sejam A,B,C três conjuntos arbitrários. Valem as seguintes propriedades:

1. $\emptyset \subseteq A$
2. $A \subseteq A$ reflexiva
3. $(A \subseteq B)$ e $(B \subseteq A) \rightarrow A = B$ antissimétrica
4. $(A \subseteq B)$ e $(B \subseteq C) \rightarrow A \subseteq C$ transitiva

Luís Felipe
08/10/20

Conjunto das Partes

Dado um conjunto A, o conjunto de todos os subconjuntos de A é dito conjunto das partes de A, denotado por $\mathcal{P}(A)$.

$$\mathcal{P}(A = \{X \mid X \subseteq A\})$$

Luís Felipe
08/10/20

Exemplos:

1. $A = \{a\} \qquad \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$
2. $\{a, b\} \qquad \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
3. $A = \{a, b, c\}$
   $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

Luís Felipe
08/10/20

OBS.: Se A tem n elementos, então $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos.

Argumento Combinatório

Para cada elemento de A temos duas possibilidades: pertencer ou não pertencer ao subconjunto de A.