Aula 6: Passos Lógicos e Demonstrações

Luís Felipe

UFF

06 de Outubro de 2020

Luís Felipe
06/10/20

Na aula passada...

- Negamos existencializações e generalizações.

Luís Felipe
06/10/20

Na aula de hoje...

- Veremos outra forma de demonstrar a validade de argumentos

Luís Felipe

06/10/20

Passos lógicos

Há algumas aulas vimos o método das tabelas para validade a fim de decidir se um argumento não quantificado é valido.

Entretanto, este método torna-se bastante exaustivo dependendo do número de enunciados componentes.

Surge, portanto, o problema de verificar a validade de argumentos "muito grandes".

Nesses casos, vamos utilizar o Método das Demonstrações

Luís Felipe
06/10/20

Exemplos: Vamos validar (ou invalidar)?

1. $$\frac{p \wedge q}{p}$$

   Note que, se $p \wedge q$: V, então conclui-se que p: V e q: V. Logo, o argumento é válido.

   Ou seja, em todas as interpretações nas quais as premissas são simultaneamente verdadeiras, a conclusão também é verdadeira.

2. $$\frac{p \wedge q}{q}$$

   Argumento é válido pela mesma argumentação anterior.

Luís Felipe
06/10/20

Exemplos: Vamos validar (ou invalidar)?

3. $$\frac{p \vee q}{p}$$

Este argumento é inválido. A interpretação p: F e q: V resulta em premissa verdadeira e conclusão falsa.

4. $$\frac{p \vee q}{q}$$

Este argumento é inválido. A interpretação p: V e q: F resulta em premissa verdadeira e conclusão falsa.

Luís Felipe
06/10/20

Passo lógico

Um passo lógico é um argumento simbolizado que:

1. possui, no máximo ocorrências de 3 letras
2. possui, no máximo 3 premissas
3. é válido

Luís Felipe

06/10/20

Exemplos

1. Os argumentos dos exemplos 1. e 2. são passos lógicos.
2. Os argumentos dos exemplos 3. e 4. não são passos lógicos.
3. $$\frac{\begin{array}{c} p \\ p \to q \end{array}}{q}$$

   É um passo lógico.
   De fato, se p: V e $p \to q$: V, concluímos que q: V. Logo, o argumento é válido. Além disso, possui 2 letras e 2 premissas.
4. $$\frac{\begin{array}{c} q \\ p \to q \end{array}}{p}$$

   Não é um passo lógico.
   De fato, embora tenha ocorrência de 2 letras e duas premissas, o argumento é inválido, pois a interpretação p: F e q: V, retorna premissas verdadeiras e conclusão falsa.

Luís Felipe
06/10/20

5. $$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg q \\ \hline p \end{array}$$

É um passo lógico.
De fato, $p \vee q$: V e $\neg q$: V garantem que q: F e p: V. Portanto, o argumento é válido. Além disso, possui a ocorrência de 2 letras e 2 premissas.

6. $$\begin{array}{c} p \vee q \\ q \rightarrow r \\ \hline r \end{array}$$

Não é um passo lógico.
De fato, embora tenha a ocorrência de 3 letras e 2 premissas, o argumento é invalido, pois a interpretação p: V, q: F e r: F retorna premissas verdadeiras e conclusão falsa.

Luís Felipe
06/10/20

De modo geral...

A validade de um argumento candidato a passo lógico pode ser verificada da seguinte forma:

1. Supor que as premissas são simultaneamente verdadeiras

2. Raciocinar a partir desta suposição, por meio das avaliações dos conectivos lógicos de modo a mostrar que, sob esta suposição, a conclusão também é verdadeira.

Por outro lado, para justificar que o argumento candidato a passo lógico não é passo lógico por não ser válido, basta exibir uma interpretação com premissas simultaneamente verdadeiras e conclusão falsa.

Luís Felipe
06/10/20

Validade baseada em passos lógicos

Exemplos:

1. $$\begin{array}{c} p \\ p \to q \\ q \to r \\ r \to s \\ s \to t \\ \hline t \end{array}$$

Este argumento não é um passo lógico, mas a conclusão de sua validade é quase imediata.

Note que $\begin{array}{c} p \\ p \to q \\ \hline q \end{array}$

é um passo lógico e que o argumento possui várias instâncias deste passo lógico.

Luís Felipe
06/10/20

Das premissas $p, p \to q$, concluímos q.
Então, das premissas $q, q \to r$, concluímos r.
Analogamente, das premissas $r, r \to s$, concluímos s e das premissas $s, s \to t$, concluímos t.

Assim, o argumento do Exemplo 1. pode ser "dissecado" na seguinte sequência de passos lógicos:

$$\frac{\begin{array}{c} p \\ p \to q \end{array}}{q} \qquad \frac{\begin{array}{c} q \\ q \to r \end{array}}{r} \qquad \frac{\begin{array}{c} r \\ r \to s \end{array}}{s} \qquad \frac{\begin{array}{c} s \\ s \to t \end{array}}{t}$$

Luís Felipe
06/10/20

2.
$$\begin{array}{c} p \lor q \\ \neg p \\ q \to \neg r \\ r \lor (s \land t \land u) \\ \hline u \end{array}$$

Este argumento não é um passo lógico e, aparentemente, a validade deste argumento não é tão fácil de ser concluída.

Vamos "dissecar" este argumento:

$$\begin{array}{c} p \lor q \\ \neg p \\ \hline q \end{array} \qquad \begin{array}{c} q \\ q \to \neg r \\ \hline \neg r \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg r \\ r \lor (s \land t \land u) \\ \hline s \land t \land u \end{array} \qquad \begin{array}{c} s \land t \land u \\ \hline u \end{array}$$

Luís Felipe
06/10/20

3. $$\begin{array}{c} p \to (r \vee \neg q) \\ \neg r \\ (\neg q) \to s \\ (\neg s) \vee t \\ (\neg r) \to p \\ \hline t \end{array}$$

Este argumento não é um passo lógico e, aparentemente, a validade deste argumento não é tão fácil de ser concluída.
Vamos "dissecar" este argumento:

$$\begin{array}{c} \neg r \\ (\neg r) \to p \\ \hline p \end{array} \qquad \begin{array}{c} p \\ p \to (r \vee \neg q) \\ \hline (r \vee \neg q) \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg r \\ (r \vee \neg q) \\ \hline \neg q \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg q \\ (\neg q) \to s \\ \hline s \end{array}$$

$$\begin{array}{c} s \\ (\neg s) \vee t \\ \hline t \end{array}$$

Luís Felipe

06/10/20

Demonstração direta

Uma demonstração direta da validade de um argumento é um texto construído, passo a passo, a partir das hipóteses do argumento, por meio da aplicação de passos lógicos, como nos Exemplos 1., 2., 3.

A seguir, veremos como redigir uma demonstração direta.

Atenção! A demonstração deve ser feita exatamente como descreveremos no próximo slide.

Luís Felipe
06/10/20

Redação das demonstrações diretas

Exemplos:

1. $$\begin{array}{c} p \\ p \to q \\ q \to r \\ r \to s \\ s \to t \\ \hline t \end{array}$$

Demonstração:
Suponhamos
1. p
2. $p \to q$
3. $q \to r$
4. $r \to s$
5. $s \to t$

Daí, temos

1, 2	6. q
6, 3	7. r
7, 4	8. s
8, 5	9. t

$\square$

Luís Felipe

06/10/20

2.
$$\begin{array}{c} p \lor q \\ \neg p \\ q \to \neg r \\ r \lor (s \land t \land u) \\ \hline u \end{array}$$

Demonstração:

Suponhamos

1. $p \lor q$
2. $\neg p$
3. $q \to \neg r$
4. $r \lor (s \land t \land u)$

Daí, temos

1, 2	5. q
5, 3	6. $\neg r$
6, 4	7. $s \land t \land u$
7	8. u

$\square$

Luís Felipe

06/10/20

3.

$$\begin{array}{c} p \to (r \lor \neg q) \\ \neg r \\ (\neg q) \to s \\ (\neg s) \lor t \\ (\neg r) \to p \\ \hline t \end{array}$$

Demonstração:

Suponhamos

1. $p \to (r \lor \neg q)$
2. $\neg r$
3. $\neg q \to s$
4. $(\neg s) \lor t$
5. $(\neg r) \to p$

Daí, temos

2,5   6. p

6,1   7. $r \lor \neg q$

2,7   8. $\cancel{q}$

3,8   9. s

9,4   10. t

$\square$

Luís Felipe

06/10/20

Como demonstrar validade?

Um dos principais procedimentos usados para justificar que uma conclusão φ é demonstrável a partir das premissas $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ pode ser descrito da seguinte forma:

1. A validade de um argumento é imediata, se ela pode ser verificada por uma tabela verdade que possui, no máximo, 8 linhas.
2. Se a validade for imediata, estabelecemos esta validade pela tabela de avaliação.
3. A validade de um argumento simbolizado é não imediata, se, para verificá-la, precisamos utilizar uma tabela de mais de 8 linhas.
4. Se a validade de um argumento simbolizado não é imediata, estabelecemos esta validade por meio de uma demonstração baseada em passos lógicos, do seguinte modo:

Luís Felipe
06/10/20

a. Supomos $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ para demonstrar φ
b. Examinamos $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de modo a elaborar passos lógicos que levem a enunciados intermediários que, por sua vez, levem à demonstração de φ.
c. Por aplicação dos passos lógicos, seguimos na obtenção de mais e mais enunciados que levam à demonstração de φ.

Se o procedimento acima for bem sucedido, terminamos a demonstração (escrevendo um texto nos moldes vistos) e concluímos que φ é demonstrável a partir de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.