Aula 5: Equivalência de enunciados quantificados

Luís Felipe

UFF

01 de Outubro de 2020

Luís Felipe
01/10/20

Na aula passada...

- Vimos os conceitos de constante, variável e propriedade.

- Generalizamos e Existencializamos (se é que isso existe :p)

- Simbolizamos enunciados quantificados

Luís Felipe
01/10/20

Na aula de hoje...

- Vamos estudar o problema da equivalência de enunciados quantificados.

Luís Felipe
01/10/20

Equivalência de Enunciados Quantificados

Considere o seguinte enunciado:

Nem todos são felizes

Se ser infeliz é a negação de ser feliz, é o mesmo que dizer que :

Existem infelizes

Considerando a legenda:

f(x): x é feliz

Podemos simbolizar o enunciado da seguinte forma:

$$\neg \forall x [f(x)]$$

ou, equivalentemente (será??):

$$\exists x [\neg f(x)]$$

Luís Felipe

01/10/20

Equivalência de Enunciados Quantificados

Entretanto, se nosso enunciado já está simbolizado, como, por exemplo:

$$\forall x[f(x) \wedge g(x)]$$

Surge a questão de se podemos simbolizá-lo equivalentemente de outra forma, por exemplo:

$$[\forall x f(x)] \wedge [\forall x g(x)]$$

Isto é, é possível distribuir o quantificador $\forall$ sobre uma conjunção? E sobre uma disjunção?
E o quantificador $\exists$?

Luís Felipe
01/10/20

Problema da Equivalência

Vimos que a generalização $\forall x[p(x)]$, sobre um domínio D onde x toma valores, pode ser entendida como a conjunção (possivelmente) infinita:

$$p(a) \wedge p(b) \wedge p(c) \wedge \ldots$$

onde $a, b, c, \ldots$ são objetos de D.
Semelhantemente, a existencialização $\exists x[p(x)]$, pode ser entendida como a disjunção (possivelmente) infinita:

$$p(a) \vee p(b) \vee p(c) \vee \ldots$$

Com base nisso, vamos mostrar que $\neg\forall x[f(x)]$ é equivalente a $\exists x[\neg f(x)]$

Luís Felipe

01/10/20

Equivalências Fundamentais

- $\neg\forall x[f(x)] \approx \exists x[\neg p(x)]$

$\neg\forall x[p(x)] : V$ sse $\forall x[p(x)] : F$ sse $(p(a) \wedge p(b) \wedge \ldots) : F$ sse

$[\neg\neg p(a) \wedge \neg\neg p(b) \wedge \ldots] : F$ sse $\neg[\neg p(a) \vee \neg p(b) \vee \ldots] : F$ sse

$[\neg p(a) \vee \neg p(b) \vee \ldots] : V$ sse $\exists x[\neg p(x)] : V$

Logo, $\neg\forall x[p(x)]$ e $\exists x[\neg p(x)]$ assumem os mesmos valores lógicos para qualquer domínio D e qualquer propriedade $p(x)$ em D.

Portanto, $\neg\forall x[f(x)]$ e $\exists x[\neg p(x)]$ são equivalentes.

Luís Felipe
01/10/20

Equivalências Fundamentais

- $\forall x[p(x) \wedge q(x)] \approx [\forall x p(x)] \wedge [\forall x q(x)]$

$\forall x[p(x) \wedge q(x)]$: V sse $[p(a) \wedge q(a)] \wedge [p(b) \wedge q(b)] \wedge \ldots\}$: V sse

$[p(a) \wedge p(b) \wedge \ldots] \wedge [q(a) \wedge q(b) \wedge \ldots]\}$: V sse
$(\forall x[p(x)]) \wedge (\forall x[q(x)])$: V

Logo, $\forall x[p(x) \wedge q(x)]$ e $(\forall x[p(x)]) \wedge (\forall x[q(x)])$ assumem os mesmos valores lógicos para qualquer domínio D e qualquer propriedades $p(x), q(x)$ em D.

Portanto, $\forall x[p(x) \wedge q(x)]$ e $(\forall x[p(x)]) \wedge (\forall x[q(x)])$ são equivalentes.

Luís Felipe
01/10/20

Enunciados quantificados equivalentes

Sejam φ e ψ enunciados quantificados que possuem ocorrências dos componentes $p(v_1), p(v_2), \ldots$, que representam propriedades.

Dizemos que φ e ψ são equivalentes se, e somente, se para qualquer domínio D e propriedades em D representadas por $p(v_1), p(v_2), \ldots$, temos que φ e ψ possuem valores iguais.

Luís Felipe
01/10/20

ou, equivalentemente...

$\forall$ domínio D e propriedades em D representadas por $p(v_1), p(v_2), \ldots,$ φ e ψ possuem valores iguais.

Luís Felipe

01/10/20

Enunciados quantificados não equivalentes

Dois enunciados φ e ψ não são equivalentes se, e somente, se:
$\exists$ domínio D e propriedades em D representadas por $p(v_1), p(v_2), \ldots$ em D, tais que φ e ψ possuem valores diferentes.

Luís Felipe
01/10/20

Interpretação para Enunciados quantificados

Seja φ um enunciado quantificado que possui ocorrências dos componentes $p(v_1), p(v_2), \ldots$.
Uma interpretação para φ consiste de um domínio de quantificação, D, e algumas propriedades em D, que são representadas por $p(v_1), p(v_2), \ldots$.
Observe que os itens de uma interpretação (domínio e propriedades) são os mesmos de uma legenda. E que interpretar é uma espécie de ação contrária a de simbolizar.

Luís Felipe
01/10/20

Algumas não equivalências fundamentais

1. $\exists x[f(x)]$ e $\forall x[f(x)]$

Para mostrar que os enunciados não são equivalentes, precisamos exibir uma interpretação na qual eles não assumam o mesmo valor.
Considere, por exemplo:

D: números inteiros
propriedade: ser negativo
Nesta interpretação, a existencialização "significa":
existem números inteiros que são negativos
e tem valor lógico: V
Nesta interpretação, a generalização "significa":
todos os números inteiros são negativos
e tem valor lógico: F

Logo, os enunciados não são equivalentes.

Luís Felipe
01/10/20

Algumas não equivalências fundamentais

2. $\exists x[p(x)] \wedge \exists x[q(x)]$ e $\exists x[p(x) \wedge q(x)]$

   D: números naturais
   propriedade: ser par
   propriedade: ser ímpar
   Nesta interpretação, $\exists x[p(x)] \wedge \exists x[q(x)]$ "significa":
   existem números naturais que são pares e existem números naturais que são ímpares
   e tem valor lógico: V
   Nesta interpretação, $\exists x[p(x) \wedge q(x)]$ "significa":
   existem números naturais que são, ao mesmo tempo, pares e ímpares
   e tem valor lógico: F

Logo, os enunciados não são equivalentes.