Aula 4: Enunciados quantificados

Luís Felipe

UFF

29 de Setembro de 2020

Luís Felipe
29/09/20

Na aula passada...

- Vimos negação de enunciados.
- Vimos os conceitos de tautologia, contingência e contradição.
- Definimos argumentos válidos e inválidos.
- Vimos o método das tabelas para validade.

Luís Felipe
29/09/20

Na aula de hoje...

- Definiremos os conceitos de constante, variável e propriedade.
- Veremos como formar enunciados utilizando quantificadores.
- Definiremos os conceitos de generalização e existencialização.
- Veremos como simbolizar os quantificadores e um enunciado que possui a ocorrência de quantificadores.

Luís Felipe

29/09/20

Constante × Variável

Uma constante denota um objeto fixo e bem determinado em um dado contexto, mas não deve denotar nenhum outro objeto no mesmo contexto.

Exemplos: Considere os enunciados:

1. 1 é um número natural.

   possui a ocorrência do objeto: 1
   que denota um número específico e bem determinado.
   Logo, este objeto é uma constante.

2. O eixo $0x$ é perpendicular ao eixo $0y$.

   possui a ocorrência dos objetos: o eixo $0x$
   o eixo $0y$
   que denotam retas orientadas específicas e bem determinadas. Logo, estes objetos são constantes.

Luís Felipe
29/09/20

Constante × Variável

Uma variável denota um objeto fixo e indeterminado em um dado contexto, mas pode denotar qualquer objeto do mesmo tipo que o objeto já denotado no mesmo contexto.

Exemplos: Considere os enunciados:

1. Se x é par, então x^2 é par.

   possui a ocorrência dos objetos: x
   x^2
   que denotam números que não estão determinados.
   Logo, estes objetos são variáveis.

2. O triângulo ABC é isósceles.

   possui a ocorrência do objeto: o triângulo ABC que denota uma figura. Como A,B,C são valores indefinidos, o objeto o triângulo ABC é variável.

Luís Felipe
29/09/20

Propriedade

Uma propriedade é uma característica que pode ser atribuída a objetos de um determinado tipo, sendo atribuída a um objeto de cada vez.

Exemplo: Características que são propriedades

ser mulher

ser aluno

ser estudioso

Usando as variáveis de maneira adequada, podemos reescrever as propriedades como enunciados.

Exemplos:

x é mulher

y é aluno

z é estudioso

Luís Felipe
29/09/20

Proposições mais complexas

Podemos formar proposições mais complexas ao combinarmos propriedades escritas como enunciados utilizando conectivos.

Exemplos:

ser infinito

ser mulher feliz

ser número ou figura

ser racional, se animal

ser matriz é o mesmo que ser tabelas de números

ser feliz, ou seja, ser realizado

Luís Felipe
29/09/20

Exemplos:

não (x é finito)

(y é mulher) e (y é feliz)

(z é número) ou (z é figura)

se (u é animal), então (u é racional)

(v é matriz) sse (v é tabela de números)

(w é feliz) e (w é feliz) sse (w é realizado)

Luís Felipe
29/09/20

Enunciados por meio de quantificadores

Quando queremos afirmar que todos os objetos ou alguns objetos de um determinado tipo possuem certa propriedade, sem especificar nenhum objeto em particular, utilizamos os quantificadores lógicos.

Seja $\varphi(v)$ um enunciado que expressa uma propriedade por meio da variável v.
Seja D um domínio de objetos onde v toma valores.
Quantificar v, em $\varphi(v)$ sobre D, consiste em prefixar $\varphi(v)$ com uma das expressões para todo v ou existe ao menos um v que se referem aos objetos em D.

As partículas para todo e existe são chamadas de quantificadores quando usadas na formação de enunciados ditos generalizações e existencializações.

Luís Felipe
29/09/20

Exemplos:

1. Considerando o enunciado:

    n é par

    e o domínio

    D: números naturais

    podemos formar os enunciados obtidos pela quantificação da variável n sobre D

    para todo n (n é par)

    existe ao menos um n (n é par)

OBS.: Note que o primeiro enunciado é falso enquanto que o segundo é verdadeiro.

Luís Felipe
29/09/20

2. Considerando o enunciado:

   y respira

   e o domínio

   D: pessoas vivas

   podemos formar os enunciados obtidos pela quantificação da variável y sobre D

   para todo y (y respira)
   existe ao menos um y (y respira)

   OBS.: Note que ambos os enunciados são verdadeiros.

Luís Felipe

29/09/20

Generalizações

Uma generalização é um enunciado obtido pela aplicação da partícula todo ou de uma de suas variantes: toda, todos, todas, para todo, para todos etc., a um único enunciado que expressa uma propriedade por meio de uma variável.

Exemplos: Vamos generalizar?

1. Ele é sapo
   - Todos são sapos
     Com variável x, temos: x é sapo
     para todo x (x é sapo)
2. M é matriz invertível
   - Todas são matrizes invertíveis
     Com variável y, temos: (y é matriz) e (y é invertível)
     para todo y [(y é matriz) e (y é invertível)]

Luís Felipe
29/09/20

Importante!!!!

Esta generalização **não pode** ser reescrita como:

- Todas as matrizes são invertíveis ou seja
- para todo y[se (y é matriz), então (y é invertível)]

Luís Felipe
29/09/20

3. Se ele é homem, então é mortal

- Todos os homens são mortais

  Com variável z, temos: se(z é homem), então (z é mortal)

  para todo z [se (z é homem), então (z é mortal)]

Luís Felipe

29/09/20

Importante!!!!

Esta generalização **não pode** ser reescrita como:

- Todos são homens e mortais ou seja
- para todo z[(z é homem) e (z é mortal)]

Luís Felipe
29/09/20

Existencializações

Uma existencialização é um enunciado obtido pela aplicação da partícula existe ou de uma de suas variantes: existem, há, existe ao menos um, existe ao menos uma etc., a um único enunciado que expressa uma propriedade por meio de uma variável.

Exemplos: Vamos existencializar? (essa palavra existe??? :p)

1. Ele é um príncipe
   - Existem príncipes
     Com variável x, temos: x é príncipe
     existe x (x é príncipe)
2. T é transformação injetiva
   - Existem transformações injetivas
     Com variável y, temos: (y é transformação) e (y é injetiva)
     existe y [(y é transformação) e (y é injetiva)]

Luís Felipe
29/09/20

Importante!!!!

Esta existencialização não pode ser reescrita como:

- Existem as injetivas, se são transformações ou seja
- existe y[se(y é transformação), então (y é injetiva)]

Luís Felipe
29/09/20

3. Ele toma uma atitude, quando é forçado.

- Existem os que se forçados, tomam uma atitude

  Com variável z, temos: se(z é forçado), então (z toma uma atitude)

  existe z [se (z é forçado), então (z toma uma atitude)]

Luís Felipe

29/09/20

Importante!!!!

Esta existencialização **não pode** ser reescrita como:

- Existem os que são forçados e tomam uma atitude ou seja
- existe z[(z é forçado) e (z toma uma atitude)]

Luís Felipe
29/09/20

OBS.: Uma diferença crucial entre os enunciados:

para todo v $(\varphi \wedge \psi)$ (I) e

para todo v $(\varphi \rightarrow \psi)$ (II)

ocorre quando eles são considerados em um domínio D onde nenhum objeto satisfaz φ.

Neste caso, (I) é falso e (II) é verdadeiro.

O mesmo ocorre na existencialização.

Luís Felipe

29/09/20

Simbolização dos quantificadores

quantificador	símbolo
para todo	$\forall$
existe	$\exists$

Luís Felipe
29/09/20

Regra de formação do $\forall$

O quantificador $\forall$ em conjunto com a variável v é aplicado a um enunciado $\varphi(v)$, que expressa uma propriedade por meio de v (e que pode possuir ocorrências de outras variáveis) e forma o enunciado:

$$\forall v[\varphi(v)]$$

chamado de generalização de $\varphi(v)$

Luís Felipe
29/09/20

Regra de formação do $\exists$

O quantificador $\exists$ em conjunto com a variável v é aplicado a um enunciado $\varphi(v)$, que expressa uma propriedade por meio de v (e que pode possuir ocorrências de outras variáveis) e forma o enunciado:

$$\exists v[\varphi(v)]$$

chamado de existencialização de $\varphi(v)$

Luís Felipe

29/09/20

Enunciados componentes

Seja φ um enunciado que possui uma única ocorrência de quantificador e somente ocorrências de propriedades.
Para determinar os enunciados componentes de φ, devemos explicitar todas as propriedades que ocorrem em φ e reescrevê-las usando variáveis, como veremos nos exemplos.

Luís Felipe

29/09/20

Exemplos

1. Todos são mortais.

   Propriedade: ser mortal

   Enunciado componente: x é mortal

2. Existem alienígenas

   Propriedade: ser alienígena

   Enunciado componente: y é alienígena

3. Cada uma é uma viúva-negra

   Propriedade: ser viúva-negra

   Enunciado componente: z é viúva-negra

4. Todos os homens são mortais

   Propriedades: ser homem
ser mortal

   Enunciados componentes: x é homem
x é mortal

Luís Felipe

29/09/20

5. Existem pessoas que valem a pena

Propriedades: ser pessoa
valer a pena

Enunciados componentes: *w* é pessoa
w vale a pena

6. Todos os atletas amadores têm contusões

Propriedades: ser atleta
ser amador
ter contusão

Enunciados componentes: *k* é atleta
k é amador
k tem contusão

OBS.: Os enunciados componentes não possuem ocorrências de conectivos ou quantificadores.

Luís Felipe
29/09/20

Legendas

Sejam $\varphi_1(v_1), \varphi_2(v_2), \ldots, \varphi_n(v_n)$ enunciados componentes, distintos 2 a 2, onde $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são variáveis (não necessariamente distintas 2 a 2).
Uma legenda para $\varphi_1(v_1), \varphi_2(v_2), \ldots, \varphi_n(v_n)$ é um esquema da forma:

$$\begin{array}{ccc} l_1(v_1) & : & \varphi_1(v_1) \\ l_2(v_2) & : & \varphi_2(v_2) \\ \vdots & & \vdots \\ l_n(v_n) & : & \varphi_n(v_n) \end{array}$$

onde $l_1, l_2, \ldots, l_n$ são letras distintas.
Seja φ um enunciado.
Uma legenda para φ é uma legenda para os enunciados componentes de φ.

Luís Felipe
29/09/20

Simbolização

Se o enunciado possui uma única ocorrência de uma propriedade, aplicamos o quantificador correspondente à propriedade reescrita, de acordo com a variável usada na legenda.

1. Todos são mortais.

   Legenda: $m(x)$: x é mortal
   Simbolização: $\forall x[m(x)]$
2. Existem alienígenas

   Legenda: $a(y)$: y é alienígena
   Simbolização: $\exists y[a(y)]$
3. Cada uma é uma viúva-negra

   Legenda: $n(z)$: z é viúva-negra
   Simbolização: $\forall z[n(z)]$

Luís Felipe
29/09/20

Simbolização

Se o enunciado possui mais de uma ocorrência de alguma propriedade, devemos:

1. determinar a maneira como os enunciados estão estruturados por aplicações sucessivas dos conectivos
2. simbolizar o enunciado formado a partir dos componentes por aplicação dos conectivos, de acordo com a legenda
3. aplicar o quantificador correspondente ao enunciado simbolizado, de acordo com a variável usada na legenda

Luís Felipe

29/09/20

Exemplos:

4. Todos os homens são mortais

   Legenda: $h(x)$: x é homem

   $m(x)$: x é mortal

   Simbolização: $\forall x[h(x) \rightarrow m(x)]$

5. Existem pessoas que valem a pena

   Legenda: $p(w)$: w é pessoa

   $v(w)$: w vale a pena

   Simbolização: $\exists w[p(w) \wedge v(w)]$

6. Todos os atletas amadores têm contusões

   Legenda: $a(k)$: k é atleta

   $m(k)$: k é amador

   $c(k)$: k tem contusão

   Simbolização: $\forall k[(a(k) \wedge m(k)) \rightarrow c(k)]$