Aula 3: Negação de Enunciados e Validade de Argumentos

Luís Felipe

UFF

24 de Setembro de 2020

Luís Felipe

24/09/20

Na aula passada...

- Vimos como avaliar um enunciado simbolizado.
- Para tanto, utilizamos as tabelas de avaliação dos conectivos para construir a tabela de avaliação do enunciado.
- Também definimos o conceito de enunciados equivalentes.
- A equivalência de enunciados pode ser provada utilizando o método das tabelas.

Luís Felipe

24/09/20

Na aula de hoje...

- Veremos como negar enunciados.
- Definiremos o conceitos de argumento e de argumento válido.
- Definiremos os conceitos de tautologia, contingência e contradição.

Luís Felipe

24/09/20

Negação de enunciados

- Negação da Conjunção

$\neg(\varphi \wedge \psi)$ tem a tabela verdade:

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\neg(\varphi \wedge \psi)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Note que $\neg(\varphi \wedge \psi)$ só é falso quando ambos, φ e ψ são V.

Na aula passada, vimos que os enunciados $\neg(\varphi \wedge \psi)$ e $\neg\varphi \vee \neg\psi$ são equivalentes.

Por isso, esta tabela é, justamente, a tabela do conectivo $\vee$ quando os enunciados estão negados.
Portanto, $\neg(\varphi \wedge \psi)$ é equivalente a $\neg\varphi \vee \neg\psi$.

Esta equivalência é conhecida como Lei de De Morgan.

Luís Felipe

24/09/20

- Negação da Disjunção

$\neg(\varphi \vee \psi)$ tem a tabela verdade:

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$	$\neg(\varphi \vee \psi)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

Note que $\neg(\varphi \vee \psi)$ é verdadeira apenas quando φ e ψ são, ambos, F. Esta tabela é, justamente, a tabela do conectivo $\wedge$ quando os enunciados estão negados. Portanto, $\neg(\varphi \vee \psi)$ é equivalente a $\neg\varphi \wedge \neg\psi$.

Esta equivalência é conhecida como Lei de De Morgan.

Luís Felipe

24/09/20

- Negação da Implicação

$\neg(\varphi \to \psi)$ tem a tabela verdade:

φ	ψ	$\varphi \to \psi$	$\neg(\varphi \to \psi)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	F

Note que $\neg(\varphi \to \psi)$ é verdadeira apenas quando φ é V e ψ é F.
Esta tabela é, justamente, a tabela do conectivo $\wedge$ quando o enunciado φ é afirmado e o enunciado ψ é negado.

Portanto, $\neg(\varphi \to \psi)$ é equivalente a $\varphi \wedge \neg\psi$.

Obs.: $(\varphi \to \psi)$ é equivalente a $(\neg\varphi \vee \psi)$.

Luís Felipe

24/09/20

- Negação da Bi-implicação

$\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$ tem a tabela verdade:

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$	$\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	V	F

Note que $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$ é verdadeira apenas quando φ e ψ assumem valores opostos.

Observe que $\{[\varphi \wedge (\neg\psi)] \vee [(\neg\varphi) \wedge \psi]\}$ possui a mesma tabela verdade que $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$.

Portanto, $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$ é equivalente a $\{[\varphi \wedge (\neg\psi)] \vee [(\neg\varphi) \wedge \psi]\}$.

Obs.: $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ é equivalente a $\{[(\neg\varphi) \vee \psi)] \wedge [(\neg\psi) \vee \varphi]\}$.

Luís Felipe
24/09/20

Exemplos:

1. F não é um quadrado ou, se F é um quadrado, então G não é.
   - Legenda:

     f: F é um quadrado
     g: G é um quadrado
   - Simbolização:

     $\neg f \vee (f \rightarrow \neg g)$
   - Negação:

     $\neg[\neg f \vee (f \rightarrow \neg g)]$ é equivalente a $f \wedge g$

   Em outras palavras, F é um quadrado e G é um quadrado.

Luís Felipe
24/09/20

Exemplos:

2. Laura foi à feira, o tomate estava caro e, por isso, ela não comprou tomate.
   - Legenda:

     f: Laura foi à feira
     t: tomate estava caro
     c: Laura comprou tomate
   - Simbolização:

     $(f \wedge t) \wedge [(f \wedge t) \rightarrow \neg c]$
   - Negação:

     $\neg\{(f \wedge t) \wedge [(f \wedge t) \rightarrow \neg c]\}$ é equivalente a $(f \wedge t) \rightarrow c$

Em outras palavras, Se Laura foi à feira e o tomate estava caro, então Laura comprou tomate.

Luís Felipe
24/09/20

Exemplos:

3. x é primo sse x possui fatores próprios.
   - Legenda:

     p: x é primo
     f: x possui fatores próprios
   - Simbolização:

     $p \leftrightarrow f$
   - Negação:

     $\neg (p \leftrightarrow f)$ é equivalente a $[p \wedge (\neg f)] \vee [(\neg p) \wedge f]$

Em outras palavras, x é primo e x não tem fatores próprios ou x não é primo e x possui fatores próprios.

Luís Felipe

24/09/20

Veremos agora . . .

- Conceitos de argumento, argumento válido e argumento inválido.
- Definiremos os conceitos de tautologia, contingência e contradição.

Luís Felipe

24/09/20

Tautologias

Seja φ um enunciado simbolizado. Dizemos que φ é uma tautologia se φ é verdadeiro em todas as suas interpretações.

Tautologias são verdades lógicas, i.e., enunciados verdadeiros que não podem ser falsificados em nenhum contexto.

Exemplos:

1. $p \vee \neg p$ é tautologia.
2. $[p \wedge (p \to q)] \to q$ é tautologia??

Luís Felipe

24/09/20

Contingências

Seja φ um enunciado simbolizado. Dizemos que φ é uma contingência se φ é verdadeiro em, pelo menos, uma de suas interpretações e falso em, ao menos, uma outra interpretação.

Exemplos:

1. $u \wedge d$ é uma contingência.
2. $[q \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow p$ é contingência??

Luís Felipe

24/09/20

Contradições

Seja φ um enunciado simbolizado. Dizemos que φ é uma contradição se φ é falso em todas as suas interpretações.

Contradições são falsidades lógicas, i.e., enunciados falsos que não podem ser verdadeiros em nenhum contexto.

Exemplos:

1. $d \wedge \neg d$ é uma contradição.
2. $(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ é contradição??

Luís Felipe

24/09/20

OBS.: Verificar se os enunciados φ e ψ são equivalentes é o mesmo que verificar se $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Luís Felipe

24/09/20

Validade

- Em ciência, toda afirmação que não seja considerada suficientemente clara, deve ser justificada de maneira adequada.
- Em Lógica Matemática, a justificativa de um enunciado faz-se por meio de outros enunciados.
  - O que varia é o nível de detalhes apresentados na justificativa de um enunciado por meio de outros.

Luís Felipe
24/09/20

Validade

Exemplos:

1. $\sqrt{2}$ é algébrico (I)

   não está suficientemente claro

   - toda raiz de um polinômio é um número algébrico (II)

     tenta justificar (I)

   (I) ainda não está bem justificado?

   - $\sqrt{2}$ é raiz de $x^2 - 2$ (III)

     e obtemos:

     $\sqrt{2}$ é raiz de $x^2 - 2$

     toda raiz de um polinômio é um número algébrico

     Logo, $\sqrt{2}$ é algébrico

   Ainda não é suficiente?

   - $x^2 - 2$ é um polinômio (IV)

     e obtemos:

     $x^2 - 2$ é um polinômio

     $\sqrt{2}$ é raiz de $x^2 - 2$

     toda raiz de um polinômio é um número algébrico

     Logo, $\sqrt{2}$ é algébrico

Luís Felipe
24/09/20

No exemplo anterior, o enunciado (I) é justificado pelos enunciados (II), (III) e (IV).
Em outras palavras, temos um argumento com premissas (II), (III) e (IV) e conclusão (I).

? As premissas do argumento realmente sustentam a conclusão?

Em caso positivo, temos um argumento válido.

OBS.: Neste estudo, a questão não é se a conclusão é verdadeira ou falsa, nem a de se as premissas são verdadeiras ou não, mas sim a de se as premissas do argumento sustentam a sua conclusão.

Luís Felipe

24/09/20

Validade de argumentos

Um argumento é uma sequência finita de enunciados em que um é considerado como conclusão e os demais, premissas.

Notação: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ são as premissas e φ a conclusão.

$$\begin{array}{c} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \\ \hline \varphi \end{array}$$

Luís Felipe
24/09/20

Exemplos:

1. João faz faculdade.
   João estuda filosofia.
   Logo, João é intelectual.
   é um argumento

2. João tem cabeça grande.
   Se João tem cabeça grande, então João é intelectual.
   Logo, João é intelectual.
   é um argumento

Luís Felipe
24/09/20

Validade de argumentos

Um argumento é válido se, em qualquer contexto que suas premissas forem simultaneamente verdadeiras, a sua conclusão for verdadeira.

Um argumento é inválido se, existe um contexto no qual suas premissas são simultaneamente verdadeiras mas a sua conclusão é falsa.

Surge, então, o Problema da Validade de argumentos.

Luís Felipe
24/09/20

Simbolização de argumentos

Para analisarmos a validade de um argumento, inicialmente simbolizamos suas premissas e conclusão.

Exemplos:

1. $\dfrac{\text{2 é par e primo}}{\text{2 é primo}}$

- Enunciados componentes das premissas:

  2 é par
  2 é primo

- Enunciado componente da conclusão:

  2 é primo

- Legenda:

  d: 2 é par
  p: 2 é primo

- Simbolização:

$$\frac{d \wedge p}{p}$$

Luís Felipe
24/09/20

2. $\dfrac{\text{Eu estudo ou sou reprovado}}{\text{Eu estudo}}$

- Enunciados componentes das premissas:
  Eu estudo
  Eu sou reprovado
- Enunciado componente da conclusão:
  Eu estudo
- Legenda:
  e: Eu estudo
  r: Eu sou reprovado
- Simbolização:

$$\frac{e \vee r}{e}$$

Luís Felipe
24/09/20

3.
$$\frac{\begin{array}{c}\text{Se 2 é ímpar, então 4 é ímpar}\\ \text{2 é ímpar}\end{array}}{\text{4 é ímpar}}$$

- Enunciados componentes das premissas:
  2 é ímpar
  4 é ímpar
- Enunciado componente da conclusão:
  4 é ímpar
- Legenda:
  i: 2 é ímpar
  q: 4 é ímpar
- Simbolização:

$$\frac{\begin{array}{c} i \rightarrow q \\ i \end{array}}{q}$$

Luís Felipe
24/09/20

4. Se Djalma treina, então tem bom rendimento
Mas ele não treina

Ele não tem bom rendimento

- Enunciados componentes das premissas:
  - Djalma treina
  - Djalma tem bom rendimento
- Enunciado componente da conclusão:
  - Djalma tem bom rendimento
- Legenda:
  - t: Djalma treina
  - b: Djalma tem bom rendimento
- Simbolização:

$$\begin{array}{c} t \rightarrow b \\ \neg t \\ \hline \neg b \end{array}$$

Luís Felipe
24/09/20

Método das tabelas para validade

Afirmar que o argumento

$$\begin{array}{c} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \\ \hline \varphi \end{array}$$

é valido é o mesmo que afirmar que:

- em todos os contextos em que as premissas $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ são simultaneamente verdadeiras, a conclusão φ também é verdadeira.

Luís Felipe
24/09/20

Como contexto $\approx$ interpretação, isto é o mesmo que afirmar:

- em todas as interpretações em que as premissas $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ são simultaneamente verdadeiras, a conclusão φ também é verdadeira.

Mas isso é o mesmo que afirmar:

- em todas as interpretações para $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ em que a conjunção $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ é verdadeira, a conclusão φ também é verdadeira.

O que é o mesmo que afirmar:

- não existe uma interpretação para $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ na qual a conjunção $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ seja verdadeira e a conclusão φ seja falsa.

Luís Felipe
24/09/20

Isto é o mesmo que afirmar:

- não existe uma interpretação para $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ na qual a implicação $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi$ seja falsa.

E isto é o mesmo que afirmar:

- na última coluna da tabela verdade da implicação $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi$ ocorre somente V.

Luís Felipe
24/09/20

Em suma...

Afirmar que o argumento

$$\begin{array}{c} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \\ \hline \varphi \end{array}$$

é válido é o mesmo que afirmar que, na última coluna da tabela verdade da implicação $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi$ ocorre somente V.

Luís Felipe 24/09/20

Exemplos:

1. $$\frac{\begin{array}{c}\text{João tem cabeça grande}\\ \text{Se João tem cabeça grande, então João é intelectual}\end{array}}{\text{João é intelectual}}$$

- Legenda:

  g: João tem a cabeça grande
  i: João é intelectual

- Simbolização:

$$\frac{\begin{array}{c} g \\ g \to i \end{array}}{\neg i}$$

- Implicação associada:

$$\varphi : [g \wedge (g \to i)] \to i$$

Podemos concluir que o argumento é válido pelo método das tabelas para validade.

O argumento é válido pois caso admitamos que João tem a cabeça grande e que se João tem a cabeça grande, então somos obrigados a aceitar que João é intelectual.

Luís Felipe
24/09/20

$$2.\quad \frac{\begin{array}{c}\text{João faz faculdade}\\ \text{João estuda filosofia}\end{array}}{\text{João é intelectual}}$$

- Legenda:

  f: João faz faculdade
  e: João estuda filosofia
  i: João é intelectual

- Simbolização:

$$\frac{\begin{array}{c} f \\ e \end{array}}{i}$$

- Implicação associada:

$$\varphi : [f \wedge e] \to i$$

Podemos concluir que o argumento é inválido pelo método das tabelas para validade.

Isto é, mesmo que admitamos que João faz faculdade e que João estuda filosofia, não somos obrigados a aceitar que João é intelectual.

Luís Felipe
24/09/20

3. $\dfrac{\text{2 é par e primo}}{\text{2 é primo}}$

- Legenda:

  d: 2 é par
  p: 2 é primo

- Simbolização:

$$\frac{d \wedge p}{p}$$

- Implicação associada:

$$\varphi : (d \wedge p) \rightarrow p$$

Podemos concluir que o argumento é válido pelo método das tabelas para validade.

Luís Felipe
24/09/20

4. $\dfrac{\text{Eu estudo ou sou reprovado}}{\text{Eu estudo}}$

- Legenda:

  e: eu estudo
  r: eu sou reprovado

- Simbolização:

$$\frac{e \vee r}{e}$$

- Implicação associada:

$$\varphi : (e \vee r) \rightarrow e$$

Podemos concluir que o argumento é inválido pelo método das tabelas para validade.

Luís Felipe
24/09/20

5.
$$\frac{\begin{array}{c}\text{Se 2 é ímpar, então 4 é ímpar}\\ \text{2 é ímpar}\end{array}}{\text{4 é ímpar}}$$

- Legenda:
  i: 2 é ímpar
  q: 4 é ímpar
- Simbolização:
$$\frac{\begin{array}{c} i \to q \\ i \end{array}}{q}$$
- Implicação associada:
$$\varphi : [(i \to q) \wedge i] \to q$$

Podemos concluir que o argumento é válido pelo método das tabelas para validade.

Luís Felipe
24/09/20

6.

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Se Djalma treina, então tem bom rendimento}\\ \text{Mas ele não treina}\end{array}}{\text{Ele não tem bom rendimento}}$$

- Legenda:

  t: Djalma treina
  b: Djalma tem bom rendimento

- Simbolização:

$$\frac{\begin{array}{c} t \to b \\ \neg t \end{array}}{\neg b}$$

- Implicação associada:

$$\varphi : [(t \to b) \wedge \neg t] \to \neg b$$

Podemos concluir que o argumento é inválido pelo método das tabelas para validade.

Luís Felipe

24/09/20

OBS.:

1. Em lógica, válido $\neq$ verdadeiro, pois se referem a conceitos completamente diferentes. Não confundam!!

   Enunciados são verdadeiros ou falsos.
   Argumentos são válidos ou inválidos.

2. A relação entre verdade e validade não é tão direta quanto podemos pensar. Existem argumentos válidos com:
   - premissas e conclusão verdadeiras.
   - uma ou mais premissas falsas e conclusão verdadeira.
   - uma ou mais premissas falsas e conclusão falsa.

   Mas não existem argumentos válidos com todas as premissas V e a conclusão F.

Luís Felipe
24/09/20

OBS.: Verificar se o argumento

$$\begin{array}{c} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \\ \hline \varphi \end{array}$$

é válido é o mesmo que verificar se a implicação associada $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to \varphi$ é uma tautologia.

Luís Felipe

24/09/20

Moral da aula de hoje

A validade de um argumento não depende da veracidade e do conteúdo das premissas e conclusão, mas "apenas" da sua estrutura lógica.