

# Aula 2: Lógica Matemática: Tabelas e Equivalências

Luís Felipe

UFF

22 de Setembro de 2020

## Na aula passada ...

- Vimos que, para avaliar um enunciado, inicialmente temos que simbolizá-lo.
- Para tanto, primeiro decomparamos o enunciado em enunciados componentes (onde não ocorrem conectivos).
- Depois, criamos uma legenda para cada enunciado componente distinto
- e, em seguida, simbolizamos o enunciado utilizando os conectivos.

Luis Felipe  
22/09/20

## Aula de hoje - Parte I

- O próximo passo para a análise lógica de um enunciado é a **Avaliação**.
- Vamos introduzir os conceitos de:
  - ▶ **tabela de avaliação de um conectivo;**
  - ▶ **interpretação para um enunciado simbolizado;**
  - ▶ **tabela de avaliação de um enunciado simbolizado;**

Luis Felipe

22/09/20

# Tabelas dos Conectivos

- Cada enunciado componente pode ser classificado como verdadeiro ou falso.
- Em outras palavras, cada um tem um valor.

Valor	Símbolo
Verdadeiro	V
Falso	F

Luis Felipe

22/09/20

# Vamos Brincar?

Jogo da **verdade** ou **mentira**.

Vocês devem avaliar se a frase é uma verdade ou uma mentira de acordo com os possíveis contextos.

1. Ontem choveu **e** fez frio.



**mentira**

**verdade**

Luis Felipe  
22/09/20

# Vamos Brincar?

2. Ontem choveu ou fez frio.



39°

verdade



10°

verdade



43°

mentira



15°

verdade

Luis Felipe  
22/09/20

## Vamos Brincar?

3. Se ontem choveu então fez frio.



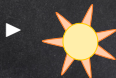
39°

mentira



10°

verdade



43°

verdade



15°

verdade

Luis Felipe  
22/09/20

## Vamos Brincar?

4. Ontem choveu **sse** fez frio.



39°

mentira



10°

mentira



43°

verdade



15°

verdade



Luis Felipe

22/09/20

## Tabela do $\neg$

Quando negamos um enunciado, simplesmente trocamos seu valor.

### Tabela Verdade do $\neg$

$\varphi$	$\neg\varphi$
V	F
F	V

Luis Felipe  
22/09/20

## Tabela do $\wedge$

Quando afirmamos uma conjunção, afirmamos **AMBOS** os enunciados.

### Tabela Verdade do $\wedge$

$\varphi$	$\psi$	$\varphi \wedge \psi$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Luis Felipe

22/09/20

## Tabela do $\vee$

Quando afirmamos uma disjunção, afirmamos pelo menos um dos enunciados.

### Tabela Verdade do $\vee$

$\varphi$	$\psi$	$\varphi \vee \psi$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

# Observação

Disjunções também podem apresentar possibilidades que se excluem mutuamente.

## Exemplos:

1. 2018 é par ou 2018 é ímpar
2.  $F$  é um quadrado ou  $F$  é um pentágono.
3. Ela é solteira ou ela é casada.

Assim, o conectivo  $\vee$  tem duas interpretações: ou exclusivo ou inclusivo.

Atenção! Neste curso, a disjunção  $\varphi \vee \psi$  SEMPRE será interpretada como ou inclusivo.

Luis Felipe  
22/09/20

## Tabela do $\rightarrow$

Uma implicação é verdadeira sse, nela, a "verdade não passa de V para F".

### Tabela Verdade do $\rightarrow$

$\varphi$	$\psi$	$\varphi \rightarrow \psi$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Luis Felipe  
22/09/20

## Tabela do $\leftrightarrow$

Quando afirmamos uma bi-implicação, afirmamos que **ambos** os enunciados têm o **mesmo** valor.

### Tabela Verdade do $\leftrightarrow$

$\varphi$	$\psi$	$\varphi \leftrightarrow \psi$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Luis Felipe

22/09/20

**Exemplos:** Considere os seguintes enunciados:

- Paris é a capital da França
- Rio de Janeiro é uma cidade maravilhosa
- 2 é composto
- 4 é primo

**Exemplos:** Considere e avalie os seguintes enunciados:

- Paris é a capital da França : V
- Rio de Janeiro é uma cidade maravilhosa : V
- 2 é composto : F
- 4 é primo : F

Agora, avalie os seguintes enunciados:

1. Paris não é a capital da França : F
2. Paris não é a capital da França e Rio de Janeiro é uma cidade maravilhosa : F
3. Não é o caso que: 2 é composto ou 4 é primo : V
4. Se Paris não é a capital da França, então 4 não é primo :  
V
5. Rio de Janeiro é uma cidade maravilhosa sse 2 não é composto : V



Luis Felipe

22/09/20

# Interpretações

- Nem sempre conhecemos o valor lógico de um enunciado componente.
- Muitas vezes, precisamos pesquisar tais valores para avaliar um enunciado.
- Vamos, portanto, associar a um enunciado uma tabela que lista **todas as possíveis atribuições de valores** aos seus componentes bem como os valores que o enunciado pode assumir em cada caso.

Luis Felipe

22/09/20

## Definição

Uma interpretação para um enunciado simbolizado  $\varphi$  é uma atribuição de valores  $V$  ou  $F$  a todas as letras que ocorrem em  $\varphi$ , de modo que a cada letra seja atribuído um único valor.

Luis Felipe  
22/09/20

### Exemplos:

1.  $p$        $\frac{p}{V}$   
                   $F$

2.  $p \wedge \neg p$        $\frac{p}{V}$   
                                   $F$

3.  $(p \wedge q) \rightarrow p$

$p$	$q$
$V$	$V$
$V$	$F$
$F$	$V$
$F$	$F$

Luis Felipe  
22/09/20

Exemplo:

$$4. [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Luis Felipe

22/09/20

## Tabela de um Enunciado

Cada enunciado simbolizado  $\varphi$  possui uma **tabela verdade**, i.e., valores que  $\varphi$  assume em cada uma de suas interpretações.

**Exemplo:**  $(p \wedge q) \rightarrow [(\neg p) \rightarrow (\neg q)]$

Neste exemplo, ocorrem apenas as letras **p** e **q**, cujas possíveis interpretações são:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

## Continuação do Exemplo

Agora, vamos utilizar as tabelas dos conectivos e calcular, gradativamente, os valores de cada enunciado simbolizado utilizado na formação de  $\varphi$ :  $(p \wedge q) \rightarrow [(\neg p) \rightarrow (\neg q)]$ .

Sejam:

$$\alpha = p \wedge q, \quad \beta = \neg p, \quad \gamma = \neg q, \quad \psi = (\neg p) \rightarrow (\neg q) \quad e$$
$$\varphi = (p \wedge q) \rightarrow [(\neg p) \rightarrow (\neg q)]$$

p	q	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\psi$	$\varphi$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V

# Equivalências

- Estudaremos a equivalência lógica de enunciados e a reescrita da negação de enunciados por meio de equivalências.
- Em matemática, dois enunciados são **logicamente equivalentes** quando
  1. ambos são verdadeiros ou ambos falsos no contexto em que são proferidos e
  2. são ambos verdadeiros ou ambos falsos em qualquer outro contexto.
- Surge, portanto, o **Problema da equivalência lógica de enunciados**
  - ▶ Dados dois enunciados, classificá-los como logicamente equivalentes ou não.
  - ▶ Este problema pode ser resolvido com o uso de tabelas de avaliação.

Luis Felipe

22/09/20

# Interpretação para dois enunciados

Sejam  $\varphi$  e  $\psi$  dois enunciados não necessariamente distintos.

Uma interpretação para  $\varphi$  e  $\psi$  é uma atribuição de valores,  $\mathbb{V}$  ou  $\mathbb{F}$ , para todas as letras que ocorrem em  $\varphi$  e  $\psi$ , de modo que a cada letra seja atribuído um único valor.



Luis Felipe  
22/09/20

## Exemplos:

1. Os enunciados  $p \wedge \neg p$  têm duas interpretações.  $\frac{p}{V}$   
 $F$

2. Os enunciados  $\neg(p \wedge q)$  e  $\neg p \vee \neg q$  têm quatro

interpretações.

P	Q
V	V
V	F
F	V
F	F

Luis Felipe  
22/09/20

3. Os enunciados  $p \rightarrow (q \rightarrow r)$  e  $(p \rightarrow q) \rightarrow r$  têm oito

interpretações.

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Pergunta: Quantas interpretações têm um enunciado com  $m$  letras?  $2^m$

Luis Felipe  
22/09/20

Expressões do Exemplo 3 são equivalentes?

Tabela verdade para  $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ : Tabela verdade para  $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ :

p	q	r	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	p	q	r	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow r$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	V	F	V	F
V	F	V	V	V	V	F	V	F	V
V	F	F	V	V	V	F	F	F	V
F	V	V	V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F	F	V	V	V
F	F	F	V	V	F	F	F	V	F