Aula 15: Princípio da Indução Matemática

Luís Felipe

UFF

19 de Novembro de 2020

Luís Felipe
19/11/20

Nas duas últimas aulas...

- Para demonstrar $p \to q$:

Vimos como fazer uma demonstração direta

- Mostre $p \to q$.

Vimos como fazer uma demonstração por contrapositiva

- Mostre $\neg q \to \neg p$.

Vimos como fazer uma demonstração por contradição

- Assuma $p \wedge \neg q$ e encontre uma contradição.

Vimos como fazer uma demonstração por casos

- Particione a solução em casos e prove cada um, individualmente.

Luís Felipe
19/11/20

Na aula de hoje...

- Veremos como fazer uma demonstração por indução matemática

Luís Felipe
19/11/20

Números Naturais

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$;
- Surgiram com a contagem;
- Todo elemento de $\mathbb{N}$ tem um sucessor que também $\in \mathbb{N}$;
- Números diferentes têm sucessores diferentes;
- O único número natural que não é sucessor de nenhum outro é o número 1.

Luís Felipe
19/11/20

Definição Natural para $\mathbb{N}$

Podemos definir o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ da seguinte forma:

1. $1 \in \mathbb{N}$;
2. Se $n \in \mathbb{N}$, então $(n+1) \in \mathbb{N}$;
3. Todo número natural é obtido utilizando 1 e 2.

Luís Felipe
19/11/20

Analogia PIM e Dominó

Intuição sobre Princípio da Indução Matemática

Se uma lei garante que cada pedra derrubada, derruba a pedra da frente em uma fileira de pedras de dominó , então, se você derrubar a primeira pedra, todas as demais pedras enfileiradas também serão derrubadas.

Luís Felipe
19/11/20

Princípio da Indução Matemática - PIM

Seja $P(n)$ uma propriedade, para cada $n \in \mathbb{N}$. Se

1. $P(1)$ é verdadeira e
2. $P(k)$ verdadeira $\Rightarrow$ $P(k+1)$ verdadeira, $\forall k \in \mathbb{N}$,

então $P(n)$ é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$.

Obs.: Uma outra forma de pensar a indução é não como um princípio (verdade sem prova), mas como um teorema que pode ser provado a partir de um outro princípio (equivalente):
Princípio da Boa Ordenação: Todo subconjunto não vazio S de $\mathbb{Z}$ limitado inferiormente possui um mínimo.

Luís Felipe
19/11/20

Utilização do PIM

Devemos executar 3 passos:

1. Base da Indução
   Mostrar que $P(1)$ é verdadeira.
   Caso a propriedade esteja sendo considerada para $n \geq n_0 > 1$, então devemos provar que $P(n_0)$ é verdadeira.

2. Hipótese de Indução - HI
   Assumir $P(k)$ verdadeira para $k \geq 1$ ou para $k \geq n_0 > 1$.

3. Passo Indutivo
   Mostrar que se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1)$ é verdadeira.

Luís Felipe
19/11/20

Mostre que $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Queremos mostrar a seguinte propriedade $P(n): 1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$.

- BASE: Vamos mostrar $P(1): 1=\frac{1(1+1)}{2}$. Isto é, vamos mostrar que a propriedade $P(n)$ é verdadeira para $n=1$.

  De fato, do lado esquerdo da expressão temos a soma do primeiro termo natural, ou seja 1. Do lado direito, aplicando a fórmula para $n=1$, temos: $\frac{1(1+1)}{2}=\frac{1.2}{2}=1$.
- HI: Vamos supor verdadeira $P(k): 1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$, para $k \geq 1$ e $k \in \mathbb{N}$.
- PASSO: Vamos mostrar $P(k+1): 1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$.
  Como supomos $P(k)$ verdadeiro, então:
  $1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$. Assim, somando em $P(k)$ ambos os lados dessa expressão por $k+1$, temos:
  $1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=(k+1)[\frac{k}{2}+1]=(k+1)\frac{k+2}{2}=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$.

Luís Felipe 19/IV/20

Mostre que todo inteiro maior do que 1 é primo ou produto de primos.

Demonstração: Equivalentemente, queremos mostrar a seguinte propriedade $P(n)$: n é primo ou produto de primos, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$.

- **BASE:** Vamos mostrar $P(2)$: 2 é primo ou produto de primos. 2 é divisível somente por $-1, 1, -2, 2$. Logo, 2 é primo. Assim, 2 é primo ou produto de primos.
- **HI:** Vamos supor verdadeira $P(k)$: k é primo ou produto de primos.
- **PASSO:** vamos mostrar $P(k+1)$: $k+1$ é primo ou produto de primos. Temos dois casos mutuamente exclusivos para $k+1$:
  - $k+1$ é primo. Neste caso, não temos nada a fazer e a propriedade está verificada.
  - $k+1$ não é primo. Neste caso, como $k+1$ não é primo, então $k+1$ é composto, $k+1 = ab$, tais que $a > 1$ e $b > 1$. Como a e b são menores que $k+1$, então $P(a)$ e $P(b)$ são verdadeiras por HI. I.e., a e b são primos ou produto de primos. Como $k+1$ é o produto $a.b$, então $k+1$ é primo ou produto de primos.

Luís Felipe
19/11/20

Exercícios

Mostre, por indução matemática, o Teorema das colunas e o Teorema das Diagonais.

Obs.: Vimos a ideia das demonstrações na Aula 11.