Aula 14: Técnicas de Demonstrações (parte II)

Luís Felipe

UFF

17 de Novembro de 2020

Luís Felipe
17/11/20

Na aula passada...

- Definimos os conceitos de Axioma, Proposição, Teorema, Lema e Corolário
- Vimos como fazer uma demonstração direta
  - Para mostrar um enunciado $p \rightarrow q$, usamos informações sobre p, e "trabalhando" nisso, conseguimos concluir q.
- Vimos como fazer uma demonstração por contrapositiva
  - Primeiramente, lembre que $p \rightarrow q$ e $\neg q \rightarrow \neg p$ são expressões equivalentes (Semana 1 - tabela de equivalências).
  - Para mostrar um enunciado $p \rightarrow q$, como $p \rightarrow q$ é equivalente a $\neg q \rightarrow \neg p$, usamos informações sobre $\neg q$, e "trabalhando" nisso, conseguimos concluir $\neg p$.

Luís Felipe
17/11/20

Na aula de hoje...

- Veremos como fazer uma demonstração por contradição
- Veremos como fazer uma demonstração por casos

Luís Felipe
17/11/20

Demonstração por Contradição

Já vimos que a negação de $p \to q$ é $p \wedge \neg q$.
Recordar é viver:

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$\neg p \vee q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Como $p \to q$ é equivalente a $\neg p \vee q$, então $\neg(p \to q)$ é equivalente a $\neg(\neg p \vee q)$. Pela Lei de De Morgan, temos que $\neg(\neg p \vee q)$ é equivalente a $p \wedge \neg q$.

Um enunciado só pode ser ou verdadeiro ou falso. Assim, mostrar $p \to q$ verdadeiro por contradição:

- Supomos que $p \to q$ seja falso. Ou seja, suponha que $p \wedge \neg q$ seja verdadeiro;
- Após uma sequência de argumentos válidos, chegaremos em uma conclusão contraditória.

Luís Felipe
17/11/20

Ou seja...

- Para mostrar que $p \to q$ seja verdadeiro por contradição, "trabalhamos" com a expressão $p \wedge \neg q$.

- Uma demonstração por contradição ou por absurdo, supõe-se que a hipótese p seja verdadeira e a tese q seja falsa, a fim de, após uma sequência de argumentos válidos, chegar em uma conclusão contraditória.

- Uma vez que a hipótese contraditória conduziu a um absurdo, concluímos que negar a tese foi um erro e, portanto, a tese é verdadeira.

- Observe que demonstração por contradição é diferente de demonstração por contrapositiva. Isso porque na contrapositiva só temos em mãos $\neg q$.

Luís Felipe
17/11/20

Exemplos:

Proposição 1. Se A é um conjunto arbitrário, então $\emptyset \subseteq A$.

Demonstração: Por absurdo, suponha A um conjunto arbitrário e $\emptyset \not\subseteq A$.

Por definição de subconjunto, B é subconjunto de A se todo elemento de B é elemento de A.

Equivalentemente, B não é subconjunto de A se houver algum elemento de B que não for elemento de A.

Dessa forma, $\emptyset$ possui algum elemento que não é elemento de A. Mas $\emptyset$ é um conjunto sem elementos. Ou seja, temos uma contradição.

Assim, $\emptyset$ é subconjunto de A.

Luís Felipe
17/11/20

Proposição 2. $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Demonstração: Por absurdo, suponha que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*$.
Como qualquer número racional possui uma forma irredutível, ou seja, sem poder ser simplificada, então tome $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ tal que a e b não podem ser ambos pares. Assim:
$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \therefore 2 = (\frac{a}{b})^2 \therefore 2 = \frac{a^2}{b^2}$

Continuando, temos que: $a^2 = 2b^2$. Assim, a^2 é um número par. Dessa forma, temos que a é também um número par. (mostre por contrapositiva com o que vimos na aula 13: se n^2 é par então n é par)

Assim, como a é par, temos que $a = 2k$, para $k \in \mathbb{Z}$. Na equação $a^2 = 2b^2$, temos:

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{(2k)^2}{b^2} \\ 2 &= \frac{4k^2}{b^2} \\ 2b^2 &= 4k^2 \\ b^2 &= 2k^2 \end{aligned}$$

Concluímos, assim, que b^2 é par, e da mesma forma como a, b é também par. Contradição, pois a e b não são ambos pares.

Luís Felipe
17/11/20

Demonstração por Casos

- Numa demonstração por casos, particionamos o universo de possibilidades em um número finito de casos e demonstramos cada um deles separadamente.
- Qualquer técnica de demonstração pode ser utilizada para demonstrar cada caso individualmente.

Luís Felipe
17/11/

Proposição 3. Sejam $x, y \in \mathbb{Z}$. Se x, y têm a mesma paridade, então $x + y$ é par.

Dica: Quais as possibilidades para x, y se x, y têm a mesma paridade? Caso 1: x e y são ambos pares; Caso 2: x e y são ambos ímpares.

OBS.: Demonstrada a Proposição 3, podemos enunciar os seguintes Teorema e Corolário.

Teorema. 1 $x + y$ é par sse x, y têm a mesma paridade.

Como mostrar um sse? (Obs.: Lembram? sse é lido como se, e somente se.) Assim, temos dois casos pra tratar:

- Caso 1: Se $x + y$ é par então x, y têm a mesma paridade.
  - Caso 1 é chamado de ida do sse, denotado por $\rightarrow$.
- Caso 2: Se x, y têm a mesma paridade então $x + y$ é par.
  - Caso 2 é chamado de volta do sse, denotado por $\leftarrow$.

Corolário. Se $x + y$ é par e $y + z$ é par, então $x + z$ é par.

Demonstração: Pelo Teorema 1, como $x + y$ é par, então x, y possuem mesma paridade. Da mesma forma que como $y + z$ é par, então y, z possuem mesma paridade. Portanto, x, y, z possuem mesma paridade. Assim, $x + z$ é par.

Luís Felipe
17/11/20

Proposição 4. Todo inteiro que é um cubo perfeito é um múltiplo de 9 ou um múltiplo de 9 mais 1 ou um múltiplo de 9 menos 1.

Dica: Um inteiro qualquer é um múltiplo de 3 ou um múltiplo de 3 mais 1 ou menos 1.

Assim, considere os casos: caso 1: $n = 3k$. Analise $(3k)^3$; caso 2: $n = 3k + 1$. Analise $(3k+1)^3$; caso 3: $n = 3k - 1$. Analise $(3k-1)^3$.