Aula 13: Técnicas de Demonstrações (parte 1)

Luís Felipe

UFF

12 de Novembro de 2020

Luís Felipe
12/11/20

Na aula de hoje...

- Definiremos os conceitos de Axioma, Proposição, Teorema, Lema e Corolário
- Veremos como fazer uma demonstração direta
- Veremos como fazer uma demonstração por contrapositiva

Luís Felipe
12/11/20

Demonstração

- Uma proposição é uma sentença que pode ser validada ou não.
- Uma demonstração é uma sequência de argumentos formais que validam uma proposição.
- O objeto básico de uma demonstração é uma proposição.
- Um axioma é uma proposição que não é demonstrada.
  - Verdade inquestionável;
  - Ponto de partida para dedução e inferências de outras verdades (dependentes de teoria).
- Um teorema é uma proposição que pode ser validada através de uma demonstração, utilizando axiomas e outros teoremas já provados.

Luís Felipe
12/11/20

Teorema

Um teorema é composto por duas partes:

hipótese e tese

Hipótese: informações presentes no teorema que são assumidas verdadeiras.

Tese: é o que queremos validar, utilizando as hipóteses presentes no teorema e outros argumentos formais previamente conhecidos.

Teorema : Hipótese → Tese

Luís Felipe
12/11/20

Lema e Corolário

Quando uma proposição é utilizada na demonstração de um teorema, em geral "mais complexo", ela é dita lema.

Quando uma proposição é consequência "imediata" de um teorema, ela é dita corolário.

Exemplo:

Teorema. A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Corolário. ?
Em um triângulo equilátero, os ângulos internos valem 60°.

Luís Felipe
12/11/20

Técnicas de Demonstração

Veremos as seguintes técnicas de demonstração:

- Direta
- por Contrapositiva
- por Contradição ou Absurdo
- por Casos

Luís Felipe
12/11/20

Demonstração Direta

Uma demonstração direta de uma implicação $p \to q$ é uma sequência de passos lógicos:

$$p \to p_1 \to p_2 \to \ldots \to p_n \to q$$

Por transitividade, prova-se que $p \to q$

Em cada passo da demonstração, utilizam-se axiomas, ou teoremas previamente demonstrados.

Luís Felipe
12/11/20

Exemplos:

Proposição 1. A soma de números pares é um número par.

Reescrita: Se a e b são números pares, então a+b é um número par.

hipótese: a e b são números pares

tese: a+b é um número par

Dica: Como escrevemos um número par?

Demonstração: Qualquer número par pode ser escrito como $2k$, para $k \in \mathbb{Z}$. Assim, temos que existem $k' \in \mathbb{Z}$ e $k'' \in \mathbb{Z}$ tais que $a = 2k'$ e $b = 2k''$.
Consequentemente, $a + b = 2k' + 2k'' = 2(k' + k'') = 2k'''$.
Como k' e k'' são números inteiros, então a soma também é inteiro (Aula 8). Portanto $k''' \in \mathbb{Z}$ e dessa forma, $a + b$ é par.

Luís Felipe
12/11/20

Proposição 2. A soma de números de paridades opostas é um número ímpar.

Reescrita: Se a é um número par e b é um número ímpar, então a+b é um número ímpar.

Sem perda de generalidade, podemos assumir a par e b ímpar.

hipótese: a é par e b é ímpar

tese: a+b é um número ímpar

Demonstração: Similar a Proposição 1, escrevemos qualquer par pode ser escrito como $a = 2k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, e qualquer ímpar pode ser escrito como $b = 2k' + 1$, e $k' \in \mathbb{Z}$.

Dessa forma, a soma $a + b = 2k + 2k' + 1$. E assim, similar a Proposição 1, temos: $a + b = 2k''' + 1$, para $k''' = k + k'$.

Como $k''' \in \mathbb{Z}$, temos que $a + b$ é ímpar, por possuir resto da divisão por 2 igual a 1.

Luís Felipe
12/11/20

Proposição 3. $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}, \ k \in \mathbb{N}$
Dica: Desenvolva o somatório
Demonstração: Sabemos que $\sum_{i=1}^{k} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ (Aula 12). Façamos uma nova soma nessa expressão:
$2\sum_{i=1}^{k} i = (\sum_{i=1}^{k} i) + (\sum_{i=1}^{k} i) =$
$(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + (1 + 2 + 3 + \cdots + n)$
Assim:
$2\sum_{i=1}^{k} i = (1 + 2 + 3 + \cdots + n) + (1 + 2 + 3 + \cdots + n)$
Arrumando a expressão da direita (somando o 1o termo com o último, o 2o com o penúltimo, ...), temos:
$2\sum_{i=1}^{k} i = (1 + n) + (2 + n - 1) + (3 + n - 2) + \cdots (n + 1)$
Ou seja:
$2\sum_{i=1}^{k} i = (n + 1) + (n + 1) + (n + 1) + \cdots (n + 1)$
Há n termos com valor $(n + 1)$ cada um, ou seja:
$2\sum_{i=1}^{k} i = n(n + 1)$
Portanto: $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Luís Felipe
12/11/20

Proposição 4. $\sum_{i=1}^{k}(2i-1)=k^2,\ k\in\mathbb{N}$
Dica: Utilize a Proposição 3.
Demonstração: Podemos trabalhar com o somatório da seguinte forma:
$\sum_{i=1}^{k}(2i-1)=(\sum_{i=1}^{k}2i)-(\sum_{i=1}^{k}1)$.
Note que no primeiro somatório, o 2 aparece em todos os termos. Logo, podemos pôr em evidência:

$$\sum_{i=1}^{k}(2i-1)=(\sum_{i=1}^{k}2i)-(\sum_{i=1}^{k}1)=(2\sum_{i=1}^{k}i)-(\sum_{i=1}^{k}1).$$

No segundo somatório, há k termos iguais a 1, assim:

$$\sum_{i=1}^{k}(2i-1)=(2\sum_{i=1}^{k}i)-(\sum_{i=1}^{k}1)=(2\sum_{i=1}^{k}i)-k$$

Pela Proposição 3, temos:
$\sum_{i=1}^{k}(2i-1)=(2\sum_{i=1}^{k}i)-k=2\frac{k(k+1)}{2}-k=k(k+1)-k=$
$k(k+1-1)=k.k=k^2$.

Obs.: Como aplicamos a Proposição 3, temos que a Proposição 4 é um corolário.

Luís Felipe
12/11/20

Proposição 5. Seja A um conjunto arbitrário com n elementos. Então a cardinalidade de $\mathcal{P}(A)$ é 2^n.
Dica: Argumento combinatório Aula 9, Aula 11

Proposição 6. Todo número composto n é divisível por um inteiro $n_1 \leq \sqrt{n}$
Dica: Escreva n como produto de dois números.
Demonstração: Se n é composto, então existem n_1 e n_2, tais que $n = n_1.n_2$, em que $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$.

Suponha que $n_2 \geq n_1$ (o caso $n_1 \geq n_2$ é análogo). Assim:

$$n = n_1 n_2 \geq n_1 n_1 = n_1^2$$

Dessa forma $n_1 \leq \sqrt{n}$.

Seja p fator primo de n_1 (caso n_1 seja primo, então acabamos). Como $n_1 \leq \sqrt{n}$ e p é divisor de n_1, então $p \leq n_1 \leq \sqrt{n}$. Como p é divisor de n_1, então n_1 pode ser escrito $n_1 = p.k$, para $k \in \mathbb{Z}$. Da mesma forma, $n = n_1.n_2 = p.k.n_2$. E assim, n possui o fator primo p menor ou igual a $\sqrt{n}$.

Luís Felipe
12/11/20

Demonstração por Contrapositiva

- A contrapositiva de uma implicação $p \rightarrow q$ é dada por $\neg q \rightarrow \neg p$. (Já mostramos essa equivalência lógica anteriormente)

Uma demonstração por contrapositiva para uma implicação $p \rightarrow q$ valida a implicação $\neg q \rightarrow \neg p$, que é equivalente à implicação original.

Luís Felipe
12/11/20

Exemplos:

Proposição 1. Se a e b são números primos entre si, então a e b não são ambos pares.
Demonstração: Queremos mostrar por contrapositiva que: Se a e b são ambos pares, então a e b não são primos entre si.
Assim, $a = 2k$ e $b = 2k'$, para $k, k' \in \mathbb{Z}$. Como ambos possuem o 2 como divisor comum, temos que o máximo divisor comum entre a e b é um inteiro $d \geq 2 > 1$.

Luís Felipe
12/11/20

Exemplos:

Proposição 2. Se p^2 é par, então p é par.

Reescrita: Se p é ímpar, então p^2 é ímpar.

Proposição 3. Se xy é ímpar, então x e y são ímpares.

Reescrita: Se x é par ou y é par, então xy é par.

Proposição 4. Se $x + y$ é par, então x e y têm a mesma paridade.

Reescrita: Se x e y possuem paridades distintas, então $x + y$ é ímpar.

Proposição 5. Se $x + y$ é par e $y + z$ é par, então x e z têm a mesma paridade.

Reescrita: Se x e z possuem paridades distintas, então $x + y$ e $y + z$ possuem paridades distintas ou $x + y$ e $y + z$ são ímpares.