# Aula 12: Binômio de Newton

Luís Felipe

UFF

10 de Novembro de 2020

Luís Felipe
10/11/20

# Coeficientes binomiais

Um binômio é qualquer expressão da forma $a + b$, ou seja, é a soma de dois símbolos distintos.

Objetivo: Obter expansões de potências de $a + b$.

Considere o seguinte produto de binômios:

$$(a + b)(c + d)(e + f) = ace + acf + ade + adf + bce + bcf + bde + bdf$$

Há 8 termos. Por que? Aplicação do PA e do PM!!!

- Cada termo é um produto de 3 letras (cada uma selecionada de um dos binômios).
- Há 2 possibilidades de letras para cada uma das 3 seleções.
- Pelo PM, temos $2 \times 2 \times 2 = 2^3$ termos.

Assim, com o produto de $n$ binômios cujas todas as letras são distintas, há $2^n$ termos.

Luís Felipe
10/11/20

# Binômio de Newton

Binômio de Newton: Binômio elevado a potência não negativa $n$.

Exemplos:

$$(a+b)^0$$
$$(a+b)^1$$
$$(a+b)^2$$
$$(a+b)^3$$
$$(a+b)^4$$
$$(a+b)^5$$
$$(a+b)^6$$

Luís Felipe
10/11/20

# Expansões do Binômio de Newton

Vamos obter os produtos dos $n$ binômios no produto e obter sua forma expansiva.

Exemplos:

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa+ab+ba+bb = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) =$$
$$aaa+aab+aba+baa+abb+bab+bba+bbb = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$\vdots$$

Luís Felipe
10/11/20

# Ou seja...

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1\\
(a+b)^1 &= a+b\\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\\
(a+b)^5 &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5\\
(a+b)^6 &= a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Pergunta 1: Olhe para os coeficientes de cada expansão. O que cada coeficiente representa?

Luís Felipe
10/11/20

# Exemplo

Considere, por exemplo, o binômio
$(a+b)^6 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$.

Como vimos, pelo PM, esse binômio pode ser escrito como produto de 6 letras (cada uma selecionada).

Cada seleção é pela letra $a$ ou $b$. Ou seja, a soma de $a$'s e $b$'s num termo deve ser igual a 6.

Por exemplo, de $(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$, selecionando as letras coloridas abaixo:

$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$,

temos um termo que é $a^4b^2$.

Pergunta 2: Quantos termos com 4 $a$'s e 2 $b$'s existem? (Obs.: Note que essa pergunta é equivalente a saber qual o coeficiente de $a^4b^2$).

Resposta (da pergunta 2): De 6 lugares, devemos escolher 2 para selecionar os $b$'s. Assim, há $\binom{6}{2}$ formas.

Luís Felipe
10/11/20

# Resposta (da pergunta 1)

Pergunta 1: Olhe para os coeficientes de cada expansão. O que cada coeficiente representa?
Resposta (da pergunta 1): Cada coeficiente representa o número de termos que satisfaz:

- Sequência de $a$'s e $b$'s
- A soma da quantidade de $a$'s com a quantidade de $b$'s é igual a $n$. Ou seja: $a^{n-k}b^k$ é um termo da expansão para $k = 0, 1, \cdots, n$.
- Dessa forma, há $\binom{n}{k}$ termos de $a^{n-k}b^k$. Valor dado justamente pelas escolhas de $n$ lugares, escolhermos $k$ para ocupar os $b$'s
- Ou de modo análogo, escolhermos $n-k$ para ocupar os $a$'s, e assim, $\binom{n}{n-k}$, mas lembre que: $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

Luís Felipe
10/11/20

# Ou seja...

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= \binom{0}{0} = 1\\
(a+b)^1 &= \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b = a+b\\
(a+b)^2 &= \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2 = a^2+2ab+b^2\\
(a+b)^3 &= \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Cada termo da expansão do Binômio de Newton $(a+b)^n$ possui como coeficientes a $n$-ésima linha do triângulo de Pascal (aula 11).

Luís Felipe
10/11/20

# Pausa para notação

Considere as somas:

- $1 + 2 + 3 + \cdots + n$
- $1.2 + 2.3 + 3.4 + \cdots + n(n+1)$
- $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$
- $21 + 21 + 21 + 21$
- $2.3^2 + 2.3^3 + 2^2.3^2 + 2^2.3^3$

Note que há um padrão na formação dos termos dessas somas. Assim, vamos introduzir uma notação que simplifica o modo de escrevermos essas somas.

$\Sigma$: letra maiúscula do alfabeto grego denominada "sigma". Corresponde ao nosso "S", que nos remete ao nome soma.

$\Sigma$ designará ao operador "soma" dos termos cujas regras de formação são comuns em função de variáveis associadas.

Luís Felipe
10/11/20

# Assim...

A soma:

$$\sum_{i=1}^{n} f(i),$$

é lida como a soma de $f(i)$ para $i$ variando de 1 até $n$. Ou seja:

## Exemplos:

- $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i$
- $1.2 + 2.3 + 3.4 + \cdots + n(n+1) = \sum_{i=1}^{n} i(i+1)$
- $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3$
- $21 + 21 + 21 + 21 = \sum_{i=1}^{4} 21$
- $2.3^2 + 2.3^3 + 2^2.3^2 + 2^2.3^3 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=2}^{3} 2^i 3^j$

Luís Felipe
10/11/20

# Voltando aos Binômios

Provamos que:

$(a+b)^6 = \binom{6}{0}a^6 + \binom{6}{1}a^5b + \binom{6}{2}a^4b^2 + \binom{6}{3}a^3b^3 + \binom{6}{4}a^2b^4 + \binom{6}{5}ab^5 + \binom{6}{6}b^6$

Note que podemos reescrever como:

$(a+b)^6 =$

$\binom{6}{0}a^6b^0 + \binom{6}{1}a^5b^1 + \binom{6}{2}a^4b^2 + \binom{6}{3}a^3b^3 + \binom{6}{4}a^2b^4 + \binom{6}{5}a^1b^5 + \binom{6}{6}a^0b^6$

Dessa forma, um termo $k+1$, para $k = 0, \cdots n$, denotado por $T_{k+1}$, é igual a: $T_{k+1} = \binom{6}{k}a^{6-k}b^k, \quad k = 0, 1, \cdots, 6$

Dado um binômio $(a+b)^n$, um termo $T_{k+1}$:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k}a^{n-k}b^k, \quad k = 0, 1, \cdots, 6$$

Assim, simplificando a fórmula expansiva do binômio:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Luís Felipe
10/11/20

# Aplicação

Exemplo 1: Calcule o quarto termo da expansão de $(x+1)^8$.
Temos no binômio: $a = x$, $b = 1$, $n = 8$, e $k+1 = 4$. Logo, $k = 3$, e assim:
$T_4 = T_{3+1} = \binom{8}{3} x^{8-3} 1^3 = \binom{8}{3} x^5$

Exemplo 2: Calcule o sexto termo da expansão de $(x-5y)^{10}$.
Temos no binômio: $a = x$, $b = -5y$, $n = 10$, e $k+1 = 6$. Logo, $k = 5$, e assim:
$T_6 = T_{5+1} = \binom{10}{5} x^5 (-5y)^5 = \binom{10}{5} x^5 (-1)^5 (5y)^5 = -\binom{10}{5} 5^5 x^5 y^5$.

Luís Felipe
10/11/20

# Aplicação

Exemplo 3: Calcule o termo independente de $x$ no binômio $(x^2 + \frac{1}{x^2})^6$.

O termo independente de $x$ é aquele termo em que a potência de $x$ é igual a 0. Ou seja, é um termo que o valor que $x$ possa assumir não faz importância na soma.

Um termo $k+1$ é igual a $T_{k+1} = \binom{6}{k}(x^2)^{6-k}(\frac{1}{x^2})^k$. Desejamos obter o valor de $k$ para que $x^0$. Simplifiquemos, portanto $T_{k+1}$:
$T_{k+1} = \binom{6}{k}x^{12-2k}\frac{(1)^k}{x^{2k}} = \binom{6}{k}\frac{x^{12-2k}}{x^{2k}} = \binom{6}{k}x^{12-2k-2k} = \binom{6}{k}x^{12-4k}$.

Como queremos que $x^{12-4k} = x^0$ , temos que saber qual valor de $k$ faz com que $12 - 4k = 0$, assim:

$12 - 4k = 0 \therefore k = 3$.

Assim, este é índice é $3 + 1 = 4$, com isso: $T_4 = \binom{6}{3}$.

Luís Felipe
10/11/20

# Aplicação

Exemplo 4: Mostre que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Mostramos que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$. Tomando $a = 1$ e $b = 1$, temos que $(a+b)^n = (1+1)^n = 2^n$.

Assim:

$$(a+b)^n = (1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$