Aula 11: Triângulo de Pascal

Luís Felipe

UFF

05 de Novembro de 2020

Luís Felipe
05/11/20

triângulo de Pascal

O triângulo de Pascal é uma matriz cujo elemento na linha n e coluna k é igual a $C(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!k!}$. Obs.: $C(n,k) = \binom{n}{k}$

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\
\hline
0 & \binom{0}{0} & & & & & & \\
1 & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & \\
2 & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & \\
3 & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & \\
4 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & \\
5 & \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & \\
\vdots & & & & & & & \ddots
\end{array}
$$

Não existe $\binom{n}{k}$ se $n < k$. Pois $\binom{n}{k}$ é número de subconjuntos de tamanho k de um conjunto de tamanho n.
Assim, a matriz é triangular inferior.

Luís Felipe
05/11/20

Observação

$0! = 1.$

Justificativa: Note que para qualquer n natural, temos que $n! = n(n-1)!$.
Ou seja, $(n-1)! = \frac{n!}{n}$. Assim, tomando $n = 1$, temos que:
$(1-1)! = \frac{1!}{1}$. Ou seja, $0! = \frac{1!}{1} = 1$.

Luís Felipe
05/11/20

Consequências do triângulo de Pascal

Vamos verificar algumas relações que existem no triângulo de Pascal.

- $\binom{n}{0} = 1$. Por que? Basta verificar na fórmula $\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{n!}{n!} = 1$.
  - Assim, toda a la coluna é igual a 1.

- $\binom{n}{n} = 1$. Por que? Podemos verificar na fórmula (algebricamente), OU basta notar que $\binom{n}{n}$ é o número de subconjuntos de tamanho n de um conjunto de tamanho n. Ou seja, só há o próprio conjunto de solução.
  - Assim, toda diagonal é igual a 1.

Luís Felipe
05/11/20

Consequências do triângulo de Pascal

Assim:

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\
\hline
0 & 1 & & & & & & \\
1 & 1 & 1 & & & & & \\
2 & 1 & \binom{2}{1} & 1 & & & & \\
3 & 1 & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & 1 & & & \\
4 & 1 & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & 1 & & \\
5 & 1 & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & 1 & \\
\vdots & & & & & & & \ddots
\end{array}
$$

Luís Felipe
05/11/20

+ consequências do triângulo de Pascal

Relação de Stifel: $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$.

Ou seja, no triângulo de Pascal, a soma de dois elementos consecutivos (colunas k e $k+1$) numa mesma linha (linha n) é igual ao elemento da coluna mais à direita (coluna $k+1$) e linha abaixo (linha $n+1$).

Como provar a Relação de Stifel? Podemos provar de duas formas:

- Argumento algébrico: Basta calcular $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n!}{(n-k)!k!}+\frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}$. (continue as contas...)
- Argumento combinatório: Pense no seguinte problema: há $n+1$ pessoas, onde n são mulheres e 1 é homem. Você quer selecionar $k+1$ pessoas, quantas são as formas? $\binom{n+1}{k+1}$ dá a resposta (Aula 9). Outra forma de obter essa mesma resposta é aplicando o PA particionando as soluções: i) o homem estará presente. Há $\binom{n}{k}$ formas; ou ii) o homem não estará presente. Há $\binom{n}{k+1}$ formas.

Luís Felipe
05/11/20

+ consequências do triângulo de Pascal

Assim:

	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$							$\ddots$

Luís Felipe
05/11/20

+ teoremas

Note que fomos capazes de construir todo o triângulo de Pascal em consequência da primeira coluna, da diagonal e da relação de Stifel.

Além disso, há alguns teoremas (muito importantes) que podemos verificar no triângulo de Pascal.

- Teorema das linhas
- Teorema das colunas
- Teorema das diagonais

Luís Felipe
05/11/20

Teorema das linhas

Teorema das linhas: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

Ou seja, no triângulo de Pascal, a soma de toda uma linha n é igual a 2^n.

Como provar o Teorema das linhas? Note que $\binom{n}{k}$ é o número de subconjuntos de tamanho k de um conjunto de tamanho n. Ou seja, a soma de uma linha do triângulo de Pascal é exatamente o número de subconjuntos de um conjunto de tamanho n.

Vimos que, pelo PM, o número de subconjuntos de um conjunto de tamanho n é 2^n.

Luís Felipe
05/11/20

Exemplo

	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$							$\ddots$

Na linha 4, temos $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$.
Note também que, dado um conjunto de tamanho 4, há:
1 subconjunto de tamanho 0 (a saber, o conjunto vazio);
4 subconjuntos de tamanho 1;
...

Luís Felipe
05/11/20

Teorema das colunas

Teorema das colunas:

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\cdots+\binom{n+p-1}{n}+\binom{n+p}{n}=\binom{n+p+1}{n+1}$$

Ou seja, no triângulo de Pascal, a soma de uma coluna desde o início (linha n e coluna n até alguma linha (linha $n+p$) é igual ao elemento da coluna a direita (coluna $n+1$) e linha abaixo (linha $n+p+1$).

Como provar o Teorema das colunas? Podemos provar usando uma técnica que será vista mais a frente (Indução Matemática).

Ideia: Assuma que para a soma dos elementos até a linha $p-1$ o resultado seja verdadeiro. Ou seja,

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\cdots+\binom{n+p-1}{n}=\binom{n+p}{n+1}.$$

Queremos saber o resultado da soma

$$\underbrace{\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\cdots+\binom{n+p-1}{n}}_{\text{por hipótese } \binom{n+p}{n+\mathbf{1}}}+\binom{n+p}{n}=\underbrace{\binom{n+p+1}{n+1}}_{\text{pela Relação de Stifel}}.$$

Luís Felipe
05/11/20

Teorema das diagonais

Teorema das diagonais:

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+p-1}{p-1}+\binom{n+p}{p}=\binom{n+p+1}{p}$$

Ou seja, no triângulo de Pascal, a soma das diagonais desde o início (linha n e coluna 0 até alguma linha (linha $n+p$ e coluna p) é igual ao elemento da coluna onde paramos (coluna p) e linha abaixo (linha $n+p+1$).

Como provar o Teorema das diagonais? Podemos provar usando novamente a (Indução Matemática).

Ideia: Assuma que para a soma dos elementos até a linha $n+p-1$ o resultado seja verdadeiro. Ou seja,

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+p-1}{p-1}=\binom{n+p}{p-1}.$$

Queremos saber o resultado da soma

$$\underbrace{\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+p-1}{p-1}}_{\text{por hipótese } \binom{n+p}{p-\mathbf{1}}}+\binom{n+p}{p}=\underbrace{\binom{n+p+1}{p}}_{\text{pela Relação de Stifel}}.$$

Luís Felipe
05/11/20

Exemplo

Determine a soma $5.4.3 + 6.5.4 + 7.6.5 + \cdots + 20.19.18$

Primeiramente, note que a multiplicação de três naturais consecutivos é na verdade, pelo PM, arranjo. Ou seja,
$5.4.3 = A(5,3)$, $6.5.4 = A(6,3)$, $7.6.5 = A(7,3)$, ...

Além disso, $A(n,k) = \binom{n}{k} k!$ (Aula 9). Dessa forma, façamos a seguinte reescrita:

$$5.4.3 + 6.5.4 + 7.6.5 + \cdots + 20.19.18 = 3!\binom{5}{3} + 3!\binom{6}{3} + 3!\binom{7}{3} + \cdots + 3!\binom{20}{3}.$$

Assim, temos:
$$3!\binom{5}{3} + 3!\binom{6}{3} + 3!\binom{7}{3} + \cdots + 3!\binom{20}{3} = 3![\binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3} + \cdots + \binom{20}{3}]$$

Pelo Teorema das Colunas,
$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3} + \cdots + \binom{20}{3} = \binom{21}{4}$$

Ou seja, $\binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3} + \cdots + \binom{20}{3} = \binom{21}{4} - [\binom{3}{3} + \binom{4}{3}]$.