Aula 10: Combinação com repetição

Luís Felipe

UFF

03 de Novembro de 2020

Luís Felipe
03/11/20

Na aula passada...

- Resolvemos uma série de problemas que buscam obter cardinalidade de conjuntos.
- Esses conjuntos possuem restrições de modo a serem subconjuntos de outros conjuntos.
- Para tal, usamos o princípio aditivo e o princípio multiplicativo.
- Vimos consequências do PA e PM.
  - ▶ Vimos conceitos de permutações, arranjos e combinações.

Luís Felipe
03/11/20

Resumidamente

Permutações: quantidade de arrumações de n objetos distintos em ordem. $P_n = n!$.

Arranjos: quantidade de arrumações de k objetos dentre n objetos distintos em ordem. $A(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Combinações: quantidade de conjuntos de k objetos dentre n objetos distintos. $C(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Obs.: Note que os n objetos são distintos.

Como resolver problemas em que podemos ter objetos iguais?

Luís Felipe
03/11/20

Problemas

Problema 1: Você tem 12 anéis iguais e quer distribuir em uma mão de 5 dedos. Quantas são as formas de distribuir os anéis nos dedos?

Uma configuração é uma distribuição dos 12 anéis em 5 dedos.

Por exemplo: 1 anel no polegar, 2 no indicador, 9 no médio, 0 tanto no anelar quanto no mindinho.

Obs.: Note que os anéis são iguais. Logo, estamos interessados na quantidade de anéis por dedo, e não nos anéis em si.

Luís Felipe

03/11/20

Problemas

Problema 2: Você tem 12 bolas iguais e quer distribuir em 5 caixas. Quantas são as formas de distribuir as bolas nas caixas?

Uma configuração é uma distribuição das 12 bolas em 5 caixas.

Obs.: Problemas 1 e 2 são idênticos.

Luís Felipe
03/11/20

Problemas

Problema 3: Quantas são as raízes não negativas da expressão: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$

Uma configuração é uma distribuição de valores para x_i, $i = 1, ..., 5$, tal que a soma seja igual a 12.
Por exemplo: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 9$, $x_4 = x_5 = 0$.

Obs.: Há diferença entre os Problemas 1, 2, e 3? Não!!!!

Luís Felipe
03/11/20

Modelagem

Para resolver esses problemas, primeiro, vamos fazer uma modelagem de cada problema.

Associação com sequências binárias:

- dígito 1: cada variável distinta (caixa, dedo, x_i, ...);
- dígito 0: cada objeto igual (bolas, anéis, unidade não negativa, ...).

Retornando ao Problema 3, vimos que $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 9$, $x_4 = x_5 = 0$ é uma atribuição que induz a uma solução para o problema. Ou seja: $1 + 2 + 9 + 0 + 0 = 12$.

Podemos modelar essa atribuição da seguinte forma:

$$0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

Note que cada atribuição de valores implica exatamente uma associação com as sequências binárias. Da mesma forma, cada sequência binária nos associa a exatamente uma atribuição de valores.

Luís Felipe
03/11/20

Configuração

Para resolver esses problemas, vamos, agora analisar a modelagem feita e avaliar as configurações.

Modelamos o problema obtendo sequências binárias (ou seja, com dígitos 0's e 1's) de tamanhos $r+n$, onde r é o número de variáveis (caixas, dedos, x_i's,...) e n é o número de objetos iguais (bolas, anéis, unidade não negativa,...).

Modelamos $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 9$, $x_4 = x_5 = 0$ da seguinte forma:

$$0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

$r = 5$ e $n = 12$.

Portanto, cada possível atribuição é uma sequência binária com 17 dígitos, satisfazendo as seguintes restrições:

- Há 5 dígitos 1;
- Há 12 dígitos 0;
- O último dígito é 1.

Luís Felipe
03/11/20

Solução

De modo geral, dado um problema com r variáveis, n objetos iguais, cada possível solução é uma sequência binária com $r + n$ dígitos, satisfazendo as seguintes restrições:

- Há r dígitos 1;
- Há n dígitos 0;
- O último dígito é 1.

Queremos saber quantas são as sequências de $r + n$ dígitos satisfazendo as restrições apresentadas.

Note que o último dígito é sempre igual a 1. Dessa forma, a solução desse problema é equivalente a responder a seguinte pergunta:
Pergunta: Quantas são as sequências de $r + n - 1$ dígitos com $r - 1$ dígitos iguais a 1?

Assim, queremos saber quantas são as escolhas de $r - 1$ lugares dentre $r + n - 1$. Ou seja, quantos são os subconjuntos de tamanho $r - 1$ dentre $r + n - 1$ elementos?
$C(r + n - 1, r - 1)$.

Luís Felipe
03/11/20

Exemplo

Uma atribuição é:

$$0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1$$

Outra atribuição é:

$$0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1$$

Assim, quantas são as formas de escolhermos 4 lugares dentre 16 para alocarmos os dígitos 1? $C(16, 4)$

Note que escolher 4 objetos dentre 16 é o mesmo que escolher 12 objetos dentre 16. Ou seja, cada atribuição de posições para o dígito 1 implica necessariamente em uma atribuição de posições para o dígito 0.

Em outras palavras: $C(r + n - 1, r - 1) = C(r + n - 1, n)$.

Obs.: De modo geral: $C(n, k) = C(n, n - k)$

Luís Felipe
03/11/20

Problema 4

Problema 4: Vimos no Problema 1 que você tinha 12 anéis iguais e queria distribuí-los em 5 dedos de uma mão. Agora, pense que você tenha 12 anéis distintos e queira distribuí-los em 5 dedos de uma mão. Quantas são as formas de distribuir os anéis nos dedos?

Note que nosso interesse não é somente na quantidade de anéis por dedo, mas para cada disposição dos 12 anéis, temos que contar quantas são as formas de dispor esses anéis.

Façamos, primeiramente, tal como o Problema 1 (pense que os anéis sejam iguais). Assim, há $C(16, 4)$ formas de distribuição.

Para cada distribuição, como uma mão tem uma ordem linear dos dedos, temos $12!$ arrumações dos anéis.

Assim, pelo PM, a resposta é dada por $12!C(16, 4)$.

Luís Felipe
03/11/20

Problema 5

Problema 5: Use todas as restrições do Problema 4. Além disso, considere que o dedo polegar deve ter pelo menos 1 anel.

Note que inicialmente (tal como o Problema 1) queríamos saber quantas são as soluções não negativas para a expressão:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$$

Ou seja, cada variável assumiria valor pelo menos 0, isto é, $x_i \geq 0$. Agora, temos que uma das variáveis tem que assumir valor pelo menos 1.

Vamos, reescrever a expressão adicionando essa restrição sobre x_1: Assim, $x_1 = x_1' + 1$, para $x_1' \geq 0$. Ou seja, $x_1 \geq 1$.

$$x_1' + 1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$$
$$x_1' + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$$

Assim, pelo PM, a resposta é dada por $12!C(15, 4)$.

Luís Felipe
03/11/20

Problema 6

Problema 6: Há 12 anéis iguais e 5 dedos, queremos saber quantas formas temos para pôr no máximo os 12 anéis nos dedos.

Note que a diferença do Problema 6 para o Problema 1 é que lá queremos pôr exatamente 12 anéis, enquanto aqui queremos pôr no máximo 12 anéis.

Note que podemos resolver o Problema 6 particionando a solução nos casos em que 0 anéis são usados, ou 1 anel é usado, ou 2 anéis são usados, ... até o caso em que os 12 anéis são usados. Assim, pelo PA, a soma dos resultados de cada caso dá a solução.

Luís Felipe
03/11/20

Problema 6 (outra resolução)

Observe também que podemos resolver o Problema 6 pela seguinte expressão:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 12$$

Para passar essa desigualdade para uma igualdade (e assim podermos usar o que vimos)podemos simplesmente, adicionar uma variável de folga f, para $f \geq 0$.
Assim, se quiséssemos, utilizar 9 anéis, por exemplo, f teria valor igual a 3.

Portanto, a solução para:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 12$$

é dada por:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + f = 12$$

Para $x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 5$ e $f \geq 0$.

Luís Felipe
03/11/20

Observação

Combinação com repetição de r variáveis e n objetos é também denotado por: $CR(r, n) = C(r + n - 1, r - 1)$