

# Aula 1: Lógica Matemática: Enunciados e Simbolização

Luís Felipe

UFF

17 de Setembro de 2020

Luís Felipe  
11/09/20

# Enunciados

- Em matemática, lidamos com objetos abstratos (números, figuras etc.) e fazemos determinadas afirmações sobre eles que podem ou estar **corretas** ou **incorretas**.
- **Enunciados** expressam afirmações matemáticas.
- **Enunciados** são classificados quanto ao seus **valores lógicos**: **verdadeiro** ou **falso**.

## Exemplo:

- 7 é um número primo
- 2 é par ou 7 não é um número primo
- O quadrado de todo número ímpar é ímpar

Valor Lógico??  
verdadeiras

Luís Felipe  
11/09/20

## Ainda sobre enunciados...

- Enunciados também servem para justificar o valor lógico de outros enunciados.

### Exemplos:

1. Seja  $T$  um triângulo cujos lados são  $a, b, c$ . Se  $T$  satisfaz à equação  $a^2 + b^2 = c^2$ , então  $T$  é retângulo.
2. Um triângulo de lados  $3, 4, 5$  é retângulo.

Note que o valor lógico do enunciado 2 é verdadeiro e é justificado pelo enunciado 1.

suficiência

Luís Felipe  
11/09/20

### Exemplos:

1. Seja  $T$  um triângulo cujos lados são  $a, b, c$ . Se  $T$  é retângulo, então  $T$  satisfaz à equação  $a^2 + b^2 = c^2$
2. Um triângulo de lados  $3, 4, 6$  é retângulo

Note que o valor lógico do enunciado 2 é falso e é justificado pelo enunciado 1.

necessidade

Luís Felipe

11/09/20

## Formalizando...

- Em nível introdutório, a **Lógica Matemática** estuda a avaliação e formação dos enunciados.
- Um **enunciado** é uma frase que pode ser avaliada com valor ou **verdadeira** ou **falsa**, de **maneira exclusiva**, em um dado contexto.

Luís Felipe  
11/09/20

## Exemplos:

1. 5 é um número par
2. O carro amarelo é azul
3. se  $x$  é negativo, então  $x^2$  é positivo

4. 5
5. o carro amarelo
6.  $x$
7.  $x^2$

enunciados

~~enunciados~~

Luís Felipe

11/09/20

# Formação de enunciados

- Os enunciados podem ser combinados para formar enunciados estruturalmente mais complexos.
- Utilizaremos, inicialmente, conectivos lógicos, tais como: não; e; ou; se ..., então; se, e somente se e algumas de suas variantes para a formação de negações, conjunções, disjunções, implicações e Bi-implicações, como veremos a seguir.

# Negação

Enunciado obtido pela aplicação do conectivo **não** (anteposto ao verbo ou locução verbal) a um único enunciado.

## Exemplo:

1. O violão está tocando sozinho.

### Negação:

O violão **não** está tocando sozinho.

**Não é o caso que** o violão esteja tocando sozinho.

**Não é verdade que** o violão esteja tocando sozinho.

**É mentira que** o violão esteja tocando sozinho.

# Conjunção

Enunciado obtido através da aplicação do conectivo **e** a dois enunciados (não necessariamente distintos).

## Exemplo:

1. O carro é amarelo.  
O violão é amarelo.

**Conjunção:** O carro é amarelo **e** o violão é amarelo.

2.  $x$  não é igual a 0.  
 $x$  não é igual a 1.  
 $x$  não tem divisores próprios diferentes de 1.

**Conjunção:**  $x$  não é igual a 0 **e**  $x$  não é igual a 1 **e**  $x$  não tem divisores próprios diferentes de 1.

Luís Felipe  
11/09/20

# Disjunção

Enunciado obtido pela aplicação do conectivo **ou** a dois enunciados (não necessariamente distintos).

## Exemplo:

1. Ficamos em casa.  
vamos à UFF.

**Disjunção:** Ficamos em casa **ou** vamos à UFF.

2. O triângulo é retângulo.  
O triângulo tem dois lados iguais.

**Disjunção:** O triângulo é retângulo **ou** o triângulo tem dois lados iguais.

Luís Felipe

11/09/20

# Implicação

Enunciado obtido pela aplicação do conectivo *se ...*, então a dois enunciados (não necessariamente distintos).

## Exemplo:

### 1. A implicação do enunciado

A reta toca o círculo em um único ponto ou a reta toca o círculo em infinitos pontos.

pele enunciado

A reta toca o círculo.

é o enunciado:

*Se* a reta toca o círculo, *então* a reta toca o círculo em um único ponto ou a reta toca o círculo em infinitos pontos.

Luís Felipe  
11/09/20

## Exemplo:

1. A implicação do enunciado

O triângulo é retângulo ou o triângulo tem dois lados iguais.

pelo enunciado

O triângulo é a metade do quadrado

é o enunciado:

Se o triângulo é a metade do quadrado, então o triângulo é retângulo ou o triângulo tem dois lados iguais.

Luís Felipe  
11/09/20

# Bi-implicação

Enunciado obtido pela aplicação do conectivo *se, e somente se* (sse) a dois enunciados (não necessariamente distintos).

## Exemplo:

1. A bi-implicação do enunciado:

$x$  é primo.

com o enunciado:

$x$  não é igual a zero e  $x$  não é igual a 1 e  $x$  não tem divisores próprios diferentes de 1.

é o enunciado:

$x$  é primo sse  $x$  não é igual a zero e  $x$  não é igual a 1 e  $x$  não tem divisores próprios diferentes de 1.

Luís Felipe  
11/09/20

# Observações

1. A ordem dos enunciados na formação de um novo enunciado pode ser relevante.

Exemplo:

- ▶ Se  $x$  é positivo, então  $x^2$  é positivo.
- ▶ Se  $x^2$  é positivo, então  $x$  é positivo.

Note que o primeiro enunciado é verdadeiro, enquanto que o segundo é falso.

2. O número de vezes que um enunciado aparece na formação de outro também pode ser relevante.

Exemplo:

- ▶ Se estou gravando vídeo, então estou gravando vídeo.  
não significa o mesmo que
- ▶ Estou gravando vídeo.

Note que a implicação é sempre verdadeira, enquanto que o segundo enunciado tem valor lógico dependente do contexto.

Luís Felipe  
11/09/20

# Simbolização

Observem agora o seguinte enunciado:

Se 2 é ímpar, então 4 é par.

- Como 2 não é ímpar, há uma grande tendência deste enunciado ser avaliado como falso, afinal, isso não seria uma justificativa válida para 4 ser par.
- Entretanto, do ponto de vista da **Lógica Matemática**, esta análise prévia está incorreta.
- Este equívoco ocorre porque estamos nos atendo ao conteúdo do enunciado.
- Um dos passos principais na análise lógica é a ocultação do conteúdo dos enunciados através de sua reescrita utilizando **legendas**.
- A avaliação do enunciado quanto ao seu valor lógico é posterior à obtenção de uma legenda que o represente.

Luís Felipe  
11/09/20

# Conectivos, Simbolização e Sintaxe

Exemplo:

- 2, 3 e 4 são pares.

- 2 e 3 e 4 são pares.

~~estruturada~~

estruturada

mesma info

Luís Felipe  
11/09/20

# Análise Lógica: primeiros passos

O início da análise lógica de um enunciado consiste em reescrevê-lo de **forma estruturada** com o uso de conectivos.

- **Passo 1:** determinar enunciados mais simples a partir dos quais o enunciado é formado
- **Passo 2:** explicitar a maneira como é formado a partir dos enunciados mais simples por meio dos conectivos.

**Principal Ferramenta:** Simbolização

Luís Felipe  
11/09/20

# Simbolização dos conectivos

Conectivo	Símbolo
não	$\neg$
e	$\wedge$
ou	$\vee$
se ..., então	$\rightarrow$
sse	$\leftrightarrow$

Luis Felipe  
11/09/20

## Exemplos:

-  $\neg$  (eu faço os exercícios)

negação

-  $[\neg$  (eu faço os exercícios) ]  $\wedge$  (eu quero passar em FMC)

conjunção

- (eu faço os exercícios)  $\vee$   $[\neg$  (eu passo em FMC) ]

disjunção

-  $[\neg$  (eu faço os exercícios) ]  $\rightarrow$   $[\neg$  (eu passo em FMC) ]

implicação

-  $[\neg$  (eu passo na matéria) ]  $\leftrightarrow$   $[\neg$  (eu faço os exercícios)]

bi-implicação

Luís Felipe  
11/09/20

# Resumo

Sejam  $\varphi$  e  $\psi$  enunciados:

- Negação:  $\neg\varphi$
- Conjunção:  $\varphi \wedge \psi$
- Disjunção:  $\varphi \vee \psi$
- Implicação:  $\varphi \rightarrow \psi$
- Bi-implicação:  $\varphi \leftrightarrow \psi$

**Atenção!!!!**

OBS.: Para eliminar ambiguidades, usamos parênteses, colchetes, chaves etc.

Luís Felipe

11/09/20

# Enunciados Componentes

Sejam  $\varphi$  um enunciado qualquer e  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  enunciados que não possuem ocorrência de conectivos lógicos.

Dizemos que  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  são os componentes de  $\varphi$ , quando  $\varphi$  é formado a partir de  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  pela aplicação (zero, uma ou mais vezes) dos conectivos lógicos.

O primeiro passo para a análise de um enunciado é determinar os enunciados componentes dele.

**Exemplos:** Determinar os enunciados componentes de:

1.  $x$  é primo.
  - ▶  $x$  é primo.
2. Ela não gosta de BEBIDAS AMARGAS.
  - ▶ Ela gosta de BEBIDAS AMARGAS.
3. Está chovendo ou fazendo sol.
  - ▶ Está chovendo.
  - ▶ Está fazendo sol.
4. Não é o caso que  $x$  não seja primo.
  - ▶  $x$  é primo.

5. Se  $x$  não é primo, então  $x$  é igual a 1 ou  $x$  não tem um fator próprio.

- ▶  $x$  é primo.
- ▶  $x$  é igual a 1.
- ▶  $x$  tem um fator próprio.

6. João e Ricardo são felizes por serem saudáveis e ricos.

- ▶ João é feliz.
- ▶ Ricardo é feliz.
- ▶ João é saudável.
- ▶ Ricardo é saudável.
- ▶ João é rico.
- ▶ Ricardo é rico.

Luis Felipe  
11/09/20

# Legendas

- Segundo passo da análise de um enunciado é simbolizar seus enunciados componentes.

Sejam  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  enunciados distintos dois a dois que não possuem ocorrências de conectivos. Uma legenda para  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  é um esquema da forma:

$$\begin{array}{lcl} l_1 & : & \varphi_1 \\ l_2 & : & \varphi_2 \\ \vdots & : & \vdots \\ l_n & : & \varphi_n \end{array}$$

onde  $l_1, l_2, \dots, l_n$  são letras distintas.

Luís Felipe  
11/09/20

# Legendas

Seja  $\varphi$  um enunciado. Uma **legenda** para  $\varphi$  é uma legenda para os enunciados componentes de  $\varphi$ .

**Exemplos:** Crie legendas para os seguintes enunciados:

1. Ela gosta de BEBIDAS AMARGAS.
  - ▶  $G$  : ela gosta de BEBIDAS AMARGAS
2. Ela não gosta de BEBIDAS AMARGAS.
  - ▶  $G$  : ela gosta de BEBIDAS AMARGAS
3. Não é o caso que  $x$  não seja primo.
  - ▶  $p$  :  $x$  é primo
4. Está chovendo ou fazendo sol.
  - ▶  $c$  : está chovendo
  - ▶  $s$  : está fazendo sol

5. Se  $x$  não é primo, então  $x$  é igual a 1 ou  $x$  não tem um fator próprio.

▶  $p$  :  $x$  é primo

▶  $u$  :  $x$  é igual a 1

▶  $f$  :  $x$  tem um fator próprio

6. Se 2 é par e 3 é par, então 2 é par.

▶  $d$  : 2 é par

▶  $t$  : 3 é par

7. Eu vou, eu vou e eu vou

▶  $v$  : eu vou

Luís Felipe  
11/09/20

# Simbolização dos enunciados

Aplicação dos conectivos aos componentes descritos na legenda para compor um enunciado.

## Exemplos:

1. Ela não gosta de BEBIDAS amargas.

▶ Legenda:

$G$  : ela gosta de BEBIDAS amargas

▶ Simbolização:

$\neg G$

2. Não é o caso que  $x$  não seja primo.

▶ Legenda:

$p$  :  $x$  é primo

▶ Simbolização:

$\neg(\neg p)$  ou  $\neg\neg p$

3. Está chovendo ou fazendo sol.

▶ Legenda:

$c$  : está chovendo

$s$  : está fazendo sol

▶ Simbolização:

$c \vee s$

Luís Felipe

11/09/20

4. Se  $x$  não é primo, então  $x$  é igual a 1 ou  $x$  não tem um fator próprio.

▶ Legenda:

$p$  :  $x$  é primo

$u$  :  $x$  é igual a 1

$f$  :  $x$  tem um fator próprio

▶ Simbolização:

$(\neg p) \rightarrow [u \vee (\neg f)]$

5. Se 2 é par e 3 é par, então 2 é par.

▶ Legenda:

$d$  : 2 é par

$t$  : 3 é par

▶ Simbolização:

$(d \wedge t) \rightarrow d$

6. Eu vou, eu vou e eu vou

▶ Legenda:

$v$  : eu vou

▶ Simbolização:

$v \wedge v \wedge v$

Luís Felipe  
11/09/20

## Parênteses: cuidado!!

Atenção ao utilizar parênteses (e afins) em uma simbolização. O mau uso de parênteses pode fazer com que o enunciado simbolizado não corresponda ao enunciado em questão.

**Exemplo:** Considere o enunciado:

Se 2 é ímpar, então 1 é ímpar e 3 é par.

Legenda:

d : 2 é ímpar

u : 1 é ímpar

t : 3 é par

Simbolização:  $d \rightarrow (u \wedge t) \neq (d \rightarrow u) \wedge t$

Veremos como avaliar se duas simbolizações correspondem ao mesmo enunciado.