Universidade Federal Fluminense
Disciplinas: Fundamentos Matemáticos para Computação / Análise e Síntese de Algoritmos / Análise e Projeto de Algoritmos
Professor: Luís Felipe

Revisão – Técnicas de Demonstrações, Indução e Relações de Recorrência

1. Mostre por contrapositiva que, $\forall n \in \mathbb{Z}$, se $3n+2$ é ímpar, então n é ímpar.

   Resposta: Por contrapositiva queremos mostrar que $\forall n \in \mathbb{Z}$, se n é par, então $3n+2$ é par.

   Como n é par, portanto $n = 2k, k \in \mathbb{Z}$. Assim, $3n+2 = 3(2k)+2 = 2(3k+1) = 2k'$, para $k' = 3k+1$. Note assim, que $3n+2$ foi escrito como um múltiplo de 2. Portanto, $3n+2$ é par.

2. Mostre que em qualquer festa há ao menos duas pessoas que conheçam um mesmo número de pessoas.

   Resposta: Considere uma festa com n pessoas, para algum $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$. Liste uma sequência de n elementos, onde cada posição $i = 1, 2, \cdots, n$ associa quantas pessoas a pessoa i conhece. Note que se uma pessoa a conhece uma pessoa b, então a pessoa b também conhece a pessoa a.

   Note que cada pessoa pode conhecer de 0 até $n-1$ pessoas (de 0 até $n-1$ há n possíveis valores), e além disso, 0 e $n-1$ não podem ambos estar na sequência, pois a pessoa com valor $n-1$ conheceria todas as demais pessoas, e assim, cada uma das n pessoas conheceria pelo menos 1 outra. Portanto, há n posições, para cada uma ser ocupada com valores de 1 até $n-1$. Como há mais posições (n posições) do que possíveis valores ($n-1$ valores), então necessariamente algum valor dentre os $n-1$ se repete.

3. Mostre que n^2+n é sempre um número par pela técnica direta.

   Resposta: Note que n^2+n pode ser reescrito como $n^2+n = n(n+1)$. Dessa forma, $n(n+1)$ é o produto de dois inteiros consecutivos. Assim, ou n ou $n+1$ é par. Supondo, sem perda de generalidade, que n seja par, então $n(n+1) = 2k(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$. E assim, $n(n+1) = 2(2k^2+k)$. Portanto, n^2+n é par.

4. Mostre que $mdc(n, n+1) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   Resposta: Suponha, por absurdo, que $mdc(n, n+1) = d > 1$. Assim, $n = dp$ e $n+1 = dq$. Como $n+1 > n$, então $q > p$. Além disso, como $n+1$ é sucessor de n, temos que $n+1 = dp+1$.

   Com isso, temos que:

$$\begin{array}{lcl} dq & = & dp+1 \\ dq-dp & = & 1 \\ d(q-p) & = & 1 \\ q-p & = & \frac{1}{d} \end{array}$$

Como $q > p$, então $q - p > 0$. Além disso, como p e q são inteiros, então $\frac{1}{d}$ é inteiro. Contradição, pois $0 < \frac{1}{d} < 1$, dado que d é inteiro maior que 1. Logo, n e $n+1$ são primos entre si.

5. Mostre que há infinitos números primos.

   Resposta: Suponha, por absurdo, que haja uma quantidade finita de k números primos $p_1, p_2, \cdots, p_k$.

   Tome o inteiro n que é o produto de todos os primos, $n = p_1.p_2.\cdots.p_k$. Como todo p_i para $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$ é divisor de n, então não há primo que seja divisor de $n+1$, já que $mdc(n, n+1) = 1$ (provado na questão anterior).

   Temos assim, uma contradição pelo fato de todo inteiro diferente de 1 poder ser fatorado e decomposto em fatores primos.

6. Mostre, por contrapositiva, os seguintes enunciados:

   (a) Se p^2 é par, então p é par.

   Reposta: Por contrapositiva, queremos mostrar que se p é ímpar, então p^2 é ímpar. De fato, considerando p ímpar, temos que $p = 2k+1$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Tomando, portanto, p^2, temos que $p^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1 = 2k'+1$, para $k' = 2k^2+2k$. Assim, temos que p^2 é ímpar.

   (b) Se xy é ímpar, então x e y são ímpares.

   Reposta: Por contrapositiva, queremos mostrar que se x é par ou y é par, então xy é par. De fato, considerando, sem perda de generalidade x par, ou seja, $x = 2k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, temos que $xy = 2ky = 2k'$ para $k' = ky$. Assim, temos que xy é par.

   (c) Se $x+y$ é par, então x e y têm a mesma paridade.

   Reposta: Por contrapositiva, queremos mostrar que se x e y possuem paridades distintas, então $x+y$ é ímpar. De fato, considerando, sem perda de generalidade x par e y ímpar, ou seja, $x = 2k$ e $y = 2k'+1$ para $k, k' \in \mathbb{Z}$, temos que $x+y = 2k+2k'+1 = 2(k+k')+1 = 2k''+1$ para $k'' = k+k'$. Assim, temos que $x+y$ é ímpar.

   (d) Se $x+y$ é par e $y+z$ é par, então x e z têm a mesma paridade.

   Reposta: Por contrapositiva, queremos mostrar que se x e z possuem paridades distintas, então $x+y$ e $y+z$ possuem paridades distintas ou $x+y$ e $y+z$ são ímpares.

   Considerando, x par e z ímpar, ou seja, $x = 2k$ e $z = 2k'+1$ para $k, k' \in \mathbb{Z}$, temos que:

   i) se y for par, então $x+y$ é par, pois x e y são pares. Neste caso, $y+z$ é ímpar, pois y e z possuem paridades distintas, y é par e z é ímpar. Portanto $x+y$ e $y+z$ possuem paridades distintas;

   ii) se y é ímpar, então $x+y$ é ímpar, pois x e y possuem paridades distintas. Neste caso, $y+z$ é par, pois y e z são ímpares. Portanto $x+y$ e $y+z$ possuem paridades distintas.

   Considerando, x ímpar e z par, ou seja, $x = 2k+1$ e $z = 2k'$ para $k, k' \in \mathbb{Z}$, temos que:

   i) se y for par, então $x+y$ é ímpar, pois x e y possuem paridades distintas. Neste caso, $y+z$ é par, pois y e z são pares. Portanto $x+y$ e $y+z$ possuem paridades distintas;

   ii) se y é ímpar, então $x+y$ é par, pois x e y são ambos ímpares. Neste caso, $y+z$ é ímpar, pois y é ímpar e z par. Portanto $x+y$ e $y+z$ possuem paridades distintas.

7. Refaçam os exercícios de demonstração feitos nas Revisões e aulas correspondentes.

8. Mostre pelo Princípio da Indução Matemática que:

(a) $2.6.10.14.\cdots.(4n-2) = \frac{(2n)!}{n!}$.

(b) $\sum\limits_{i=3}^{n} \frac{i}{2^i} = 1 - \frac{n+2}{2^n},\ n \geq 3$.

(c) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3\times 2^n}$.

(d) $\sum\limits_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

(e) Seja F_n a sequência definida por: $F_1 = 1,\ F_2 = 5,\ F_n = F_{n-1} + 2F_{n-2},\ n \geq 3$. Mostre usando a indução que $F_n = 2^n + (-1)^n$, $\forall n \geq 1$.

(f) Seja F_n a sequência de Fibonacci. Mostre usando a indução: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Reposta: (a) Seja $P(n) : 2.6.10.14\cdots(4n-2) = \frac{(2n)!}{n!}$, $\forall\ n$ natural.

BASE: Vamos mostrar que $P(1)$ é verdadeira.

Como $4(1) - 2 = 2$ e $\frac{(2\times 1)!}{1!} = 2! = 2$, temos que $P(1)$ é verdadeira.

HI: Suponha que $P(k) : 2.6.10.14.\cdots.(4k-2) = \frac{(2k)!}{k!}$ seja verdadeira, $\forall k \geq 1$.

PASSO: Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1) : 2.6.10.14.\cdots.(4k-2).(4(k+1)-2) = \frac{(2[k+1])!}{(k+1)!}$ é verdadeira.

$$
\begin{aligned}
\underbrace{2.6.10.14.\cdots.(4k-2)}_{\text{H.I.}}.(4(k+1)-2) &= \frac{(2k)!}{k!}(4k+2) \\
&= \frac{(2k)!2(2k+1)}{k!} \times \frac{(k+1)}{(k+1)} \\
&= \\
&= \frac{(2k)!2(k+1)(2k+1)}{k!(k+1)} \\
&= \\
&= \frac{(2k+2)(2k+1)(2k)!}{(k+1)!} \\
&= \\
&= \frac{(2k+2)!}{(k+1)!} \\
&= \\
&= \frac{(2[k+1])!}{(k+1)!}
\end{aligned}
$$

Logo, pelo PIM, $P(n) : 2.6.10.14\cdots(4n-2) = \frac{(2n)!}{n!}$ é verdadeira $\forall n$ natural.

(b) Seja $P(n) : \sum_{i=3}^{n} \frac{i}{2^i} = 1 - \frac{n+2}{2^n}$, $n \geq 3$.

BASE: Vamos mostrar que $P(3)$ é verdadeira.

De fato, como $\frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}$ e $1 - \frac{3+2}{2^3} = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$, $P(3)$ é verdadeira.

HI: Suponha que $P(k) : \sum_{i=3}^{k} \frac{i}{2^i} = 1 - \frac{k+2}{2^k}$ seja verdadeira, $\forall k \geq 3$.

PASSO: Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1) : \sum_{i=3}^{k+1} \frac{i}{2^i} = 1 - \frac{(k+1)+2}{2^{k+1}}$ é verdadeira.

$$
\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=3}^{k+1} \frac{i}{2^i} &= \underbrace{\sum_{i=3}^{k} \frac{i}{2^i}}_{\text{H.I}} + \tfrac{k+1}{2^{k+1}} \\
&= \left(1 - \tfrac{k+2}{2^k}\right) + \tfrac{k+1}{2^{k+1}} \\
&= 1 - \left(\tfrac{2(k+2)-k-1}{2^{k+1}}\right) \\
&= 1 - \left(\tfrac{2k+4-k-1}{2^{k+1}}\right) \\
&= 1 - \left(\tfrac{k+3}{2^{k+1}}\right) \\
&= 1 - \left(\tfrac{(k+1)+2}{2^{k+1}}\right)
\end{aligned}
$$

Logo, pelo PIM, $P(n) : \sum_{i=3}^{n} \frac{i}{2^i} = 1 - \frac{n+2}{2^n}$, é verdadeira $\forall n \geq 3$.

(c) Seja $P(n) : 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3\times 2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Base: Como $\frac{2^2+(-1)^1}{3\times 2^1} = \frac{1}{2}$ e $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, temos que $P(1)$ é verdadeira.

HI: Suponha que $P(k) : 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{(-1)^k}{2^k} = \frac{2^{k+1}+(-1)^k}{3\times 2^k}$ seja verdadeira $\forall k \in \mathbb{Z}_+$.

Passo: Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeira então
$P(k+1) : 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+2}+(-1)^{k+1}}{3\times 2^{k+1}}$ é verdadeira.

$$
\underbrace{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{(-1)^k}{2^k}}_{\text{H.I}} + \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} =
$$

$$
\frac{2^{k+1}+(-1)^k}{3\times 2^k} + \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} =
$$

$$
\frac{2^{k+2}+(-1)^k\times 2 + 3\times(-1)^{k+1}}{3\times 2^{k+1}} =
$$

$$
\frac{2^{k+2}+(-1)^{k+1}[(-1)^{-1}\times 2+3]}{3\times 2^{k+1}} =
$$

$$
\frac{2^{k+2}+(-1)^{k+1}[-2+3]}{3\times 2^{k+1}} =
$$

$$
\frac{2^{k+2}+(-1)^{k+1}}{3\times 2^{k+1}}
$$

Logo, pelo PIM, temos que $P(n) : 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3\times 2^n}$, é verdadeira $\forall n \in \mathbb{Z}_+$.

(d) Seja $P(n) : 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

BASE: Quando $n = 1$ temos $1^3 = 1$. Como, $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$, temos que $P(1)$ é verdadeira.

HI: Suponha que $P(k) : 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$ seja verdadeira $\forall k \in \mathbb{N}$.

PASSO: Vamos mostrar que, se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1) : 1^3 + 2^3 + \ldots + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2((k+1)+1)^2}{4}$ é verdadeira.

$$\underbrace{1^3 + 2^3 + \ldots + k^3}_{\text{H.I.}} + (k+1)^3 =$$
$$\frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 =$$
$$\frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} =$$
$$\frac{(k+1)^2(k^2 + 4(k+1))}{4} =$$
$$\frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4} =$$
$$\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, temos que $P(n) : 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(e) *Resolução:* Considere a proposição:

$$P(n): \ F_n = 2^n + (-1)^n.$$

Devemos provar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Base: Para $n = 1$, a proposição

$$P(1): \quad F_1 = 2^1 + (-1)^1$$

é verdadeira, pois:

$$2^1 + (-1)^1 = 2 - 1 = F_1.$$

HI: Assumimos que $P(1), P(2), \cdots, P(k)$ são verdadeiras para $k \geq 1$:

$$(HI), \quad F_i = 2^i + (-1)^i, \quad \forall i = 1, 2, \cdots, k.$$

Passo: Suponto que (HI) é válida, devemos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, devemos mostrar que:

$$F_{k+1} = 2^{k+1} + (-1)^{k+1}.$$

De fato, usando a definição de F_{k+1} e aplicando a hipótese indutiva, temos que:

$$\begin{aligned}
F_{k+1} &= F_{(k+1)-1} + 2F_{(k+1)-2} \\
&= \underbrace{F_k}_{(HI)} + 2\underbrace{F_{k-1}}_{(HI)} \\
&= [2^k + (-1)^k] + 2[2^{k-1} + (-1)^{k-1}] \\
&= 2^k + (-1)^k + 2.2^{k-1} + 2(-1)^{k-1} \\
&= 2^k + 2^k + (-1)^{k-1}[(-1) + 2] \\
&= 2^{k+1} + (-1)^{k-1} \\
&= 2^{k+1} + (-1)^{k-1}(-1)^{+2} \\
&= 2^{k+1} + (-1)^{k+1},
\end{aligned}$$

ou seja, $P(k+1)$ é verdadeira. Logo, pelo princípio de indução forte temos que a igualdade

$$F_n = 2^n + (-1)^n.$$

se verifica para todo $n \in \mathbb{N}$.

(f) *Resolução:* Lembremos que a sequência de Fibonacci está definida por:

$$\begin{aligned} &F_1 = 1, \\ &F_2 = 1, \\ &F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 3. \end{aligned}$$

Seja

$$P(n): \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Base: A proposição

$$P(1): \quad F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1,$$

é verdade, pois:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\tfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\tfrac{1+\sqrt{5}-(1-\sqrt{5})}{2}\right) \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(2\tfrac{\sqrt{5}}{2}\right) = 1. \end{aligned}$$

HI: Assumimos que $P(1), P(2), \cdots, P(k)$ são verdadeiras para $k \geq 1$:

$$(HI), \quad F_i = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i \quad \forall i = 1, 2, \cdots, k.$$

Passo: Suponto que (HI) é válida, devemos provar que $P(k+1)$ é verdadeira.

Desenvolvendo:

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= \underbrace{F_k}_{(HI)} + \underbrace{F_{k-1}}_{(HI)} \\ &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right] + \left[\tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right] \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left[\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} + \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-2}\right] - \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left[\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} + \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-2}\right]. \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left[\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} + \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-2}\right] - \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left[\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} + \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-2}\right] \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left[\tfrac{2}{1+\sqrt{5}} + \tfrac{4}{(1+\sqrt{5})^2}\right] - \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left[\tfrac{2}{1-\sqrt{5}} + \tfrac{4}{(1-\sqrt{5})^2}\right] \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left[\tfrac{2(1+\sqrt{5})+4}{(1+\sqrt{5})^2}\right] - \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left[\tfrac{2(1-\sqrt{5})+4}{(1-\sqrt{5})^2}\right] \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left[\tfrac{6+2\sqrt{5}}{1+2\sqrt{5}+5}\right] - \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left[\tfrac{6-2\sqrt{5}}{1-2\sqrt{5}+5}\right] \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left[\tfrac{6+2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}\right] - \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left[\tfrac{6-2\sqrt{5}}{6-2\sqrt{5}}\right] \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}. \end{aligned}$$

Logo, $P(k+1)$ é verdadeira.

Então, pelo princípio de indução forte, concluímos que:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

9. Determine a fórmula fechada da relação de recorrência obtida na Questão 17.

Resposta:

$$\begin{array}{rcl} a_n & = & a_{n-1} + n \\ & = & a_{n-2} + (n-1) + n \\ & = & a_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n \\ & \vdots & a_{n-i} + [n-(i-1)] + [n-(i-2)] + \ldots + n \end{array}$$

Quando $n - i = 0$ temos $n = i$. Daí

$a_n = a_0 + \underbrace{1 + 2 + \ldots + n}_{\text{soma da P.A. com n termos e razão 1}}$

$a_n = 1 + \dfrac{n^2+n}{2}$.

10. Uma quantia depositada numa poupança no dai primeiro do mês i é corrigida mensalmente por uma taxa $t = 1.5\%$ e tem custo de manutenção por mês de $c = R\$5,00$. Supondo que o primeiro e único depósito de $R\$10.000,00$ é feito no primeiro dia de julho (mês 1) determine e resolva a relação de recorrência correspondente. Qual a quantia disponível em dezembro do mesmo ano?

Resposta: Seja M_i a quantia existente na poupança no i-ésimo mês, para $i > 1$. A cada mês a poupança é corrigida de $t = 1,5\%$ e subtraída do custo de manutenção $c = 5,00$. Portanto:

$M_1 = 10000$
$M_i = M_{i-1} + tM_{i-1} - c$, para $i > 1$.

Temos portanto a seguinte relação de recorrência para M_i, $i > 1$:

$$\begin{array}{rcll} M_i & = & \underbrace{1,015M_{i-1}} -5 & , i > 1 \quad = \\ & = & 10000 & , \text{i=1} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} M_i & = & (1+t)M_{i-1} - c & = \\ & = & (1+t)[(1+t)M_{i-2} - c] - c & = \\ & = & (1+t)^2 M_{i-2} - c(1+t) - c = (1+t)^2 M_{i-2} - c[(1+t)+1] & = \\ & = & (1+t)^2[(1+t)M_{i-3} - c] - c[(1+t)+1] & = \\ & = & (1+t)^3 M_{i-3} - c[(1+t)^2 + (1+t) + 1] & = \\ & = & (1+t)^3[(1+t)M_{i-4} - c] - c[(1+t)^2 + (1+t) + 1] & = \\ & = & (1+t)^4 M_{i-4} - c[(1+t)^3 + (1+t)^2 + (1+t) + 1] & = \end{array}$$

$$\vdots$$

$$\begin{array}{rll} = & (1+t)^k M_{i-k} - c[(1+t)^{k-1} + (1+t)^{k-2} + \ldots + (1+t) + 1] & = \\ = & (1+t)^k M_{i-k} - c\sum_{j=0}^{k-1}(1+t)^j & = \\ = & (1+t)^k M_{i-k} - c\frac{(1+t)^k - 1}{(1+t)-1} & = \\ = & (1+t)^k M_{i-k} - c\frac{(1+t)^k - 1}{t} & = \end{array}$$

Como conhecemos somente o valor de $M_1 = 10000$, então devemos tomar $i - k = 1$, isto é, $k = i - 1$. Desta maneira obtemos a fórmula fechada para M_i:

$$M_i \quad = \quad (1+t)^{i-1}M_1 - c\frac{(1+t)^{i-1}-1}{t}$$

Sabemos que $M_1 = 10000$, $t = 1,5\% = 0,015$ e $c = 5$, sendo Julho o mês 1. Então para calcularmos o valor da poupança em dezembro (mês 6) devemos obter o valor de M_6, isto é, $i = 6$. Substituindo estes dados na fórmula anterior temos que:

$$\begin{array}{rcll} M_6 & = & 10000(1,015)^{6-1} - 5\frac{(1,015)^{6-1}-1}{0,015} & = \\ & = & 10000(1,015)^{5} - 5\frac{(1,015)^{5}-1}{0,015} & = \\ & \approx & 10747,10 & \end{array}$$

11. Mostrar, por indução, que a soma dos n primeiros números naturais ímpares é igual a n^2.

    Resposta: Queremos mostrar a seguinte propriedade: $P(n) : 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

    BASE: Vamos mostrar que $P(1)$ seja verdadeiro. De fato, note que $2(1) - 1 = 1$, e $1^2 = 1$. E assim, temos a base verdadeira.

    HI: Suponha que seja verdadeira $P(i) : 1 + 3 + \cdots + (2i - 1) = i^2$, $\forall i \leq k$, onde $k \in \mathbb{N}$.

    PASSO: Vamos mostrar que seja verdadeiro $P(k+1) : 1+3+\cdots+(2k-1)+(2(k+1)-1) = (k+1)^2$. Pela HI, temos que $1 + 3 + \cdots + (2k - 1) = k^2$. Somando ambos os lados por $(2(k + 1) - 1)$, temos que: $1 + 3 + \cdots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = k^2 + (2(k + 1) - 1)$. Dessa forma, temos que $k^2 + (2(k + 1) - 1) = k^2 + 2k + 2 - 1 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$. Portanto, temos que $P(k + 1)$ é verdadeira.

12. Mostre que 8 divide $3^{2n} - 1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

    Resposta: Queremos mostrar a seguinte propriedade: $P(n) : 3^{2n} - 1 = 8q$, para $q \in \mathbb{Z}$ e $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

    BASE: vamos mostrar que $P(1)$ é verdadeiro. De fato, note que $3^{2.1} - 1 = 9 - 1 = 8$. Portanto, como 8 é divisível por 8, a base está provada.

    HI: Suponha que seja verdadeira $P(k) : 3^{2k} - 1 = 8q'$, para $q' \in \mathbb{Z}$.

    PASSO: Vamos mostrar que seja verdadeiro $P(k + 1) : 3^{2(k+1)} - 1 = 8q''$, para $q'' \in \mathbb{Z}$. Note que a expressão $3^{2(k+1)} - 1$ pode ser reescrita como $3^{2(k+1)} - 1 = 3^{2k+2} - 1 = 3^{2k}3^2 - 1 = 3^{2k}9 - 1$. Além disso, $3^{2k}(8 + 1) - 1 = 3^{2k}8 + 3^{2k} - 1$. Pela HI, temos que $3^{2k} - 1 = 8q'$. Assim, $3^{2k}8 + 3^{2k} - 1 = 3^{2k}8 + 8q' = 8(3^{2k} + q')$. Portanto, $3^{2(k+1)} - 1$ é divisível por 8, concluindo assim, que $P(k + 1)$ é verdadeiro.

13. Mostre que $n^2 + n$ é sempre um número par, das seguintes formas:

    (a) Indução matemática.

    (b) Técnica direta.

    Resposta: a) Seja $P(n) : n^2 + n = 2m$, para $m \in \mathbb{Z}$.

    Base: vamos mostrar que $P(1)$ é verdadeiro. De fato, note que $1^2 + 1 = 2$, resultado assim num número par.

HI: Suponha que seja verdadeiro $P(k) : k^2 + k = 2m'$, $m' \in \mathbb{Z}$.

PASSO: Vamos mostrar que seja verdadeiro $P(k+1) : (k+1)^2 + (k+1) = 2m''$, $m'' \in \mathbb{Z}$. Note que a expressão $(k+1)^2+(k+1)$ pode ser reescrita como $(k+1)^2+(k+1) = k^2+2k+1+k+1 = k^2+k+2k+2$. Pela HI, temos que $k^2+k = 2m'$, assim $k^2+k+2k+2 = 2m'+2k+2$. Assim: $2m'+2k+2 = 2(m'+k+1)$. Ou seja, $(k+1)^2 + (k+1)$ é par, concluindo assim que $P(k+1)$ é verdadeira.

b) Note que $n^2 + n$ pode ser reescrito como $n^2 + n = n(n+1)$. Dessa forma, $n(n+1)$ é o produto de dois inteiros consecutivos. Assim, ou n ou $n+1$ é par. Suponho, sem perda de generalidade, que n seja par, então $n(n+1) = 2k(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$. E assim, $n(n+1) = 2(2k^2 + k)$. Portanto, $n^2 + n$ é par.

14. Prove que $n^3 + 2n$ é divisível por 3, para todo $n \in \mathbb{N}$, usando o princípio da indução matemática.

Resposta: Queremos mostrar que $P(n) : n^3 + 2n = 3q,\ q \in \mathbb{Z},\ \forall n \in \mathbb{N}$.

BASE: Queremos mostrar que é verdadeiro $P(1) : 1^3 + 2(1) = 3q$. De fato, $1^3 + 2(1) = 3$.

HI: Suponha que seja verdadeiro $P(k) : k^3 + 2k = 3q',\ k \in \mathbb{N},\ q' \in \mathbb{Z}$.

PASSO: Queremos mostrar que é verdadeiro $P(k+1) : (k+1)^3 + 2(k+1) = 3q'',\ q'' \in \mathbb{Z}$. Note que podemos reescrever $(k+1)^3+2(k+1)$ como $(k+1)^3+2(k+1) = k^3+3k^2+3k+1+2k+2 = k^3+2k+3k^2+3$. Pela HI, $k^3 + 2k = 3q'$. Portanto, $k^3 + 2k + 3k^2 + 3 = 3q' + 3k^2 + 3 = 3(q' + k^2 + 1)$. Temos assim, que $P(k+1)$ é verdadeira.

15. Mostre pelo Princípio da Indução Matemática que:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 + \cdots + (-1)^{n-1}n^2 = \frac{(-1)^{n-1}n(n+1)}{2}$$

para todo número natural $n \geq 1$.

Resposta: Seja $P(n) : 1^2 - 2^2 + 3^2 + \cdots + (-1)^{n-1}n^2 = \frac{(-1)^{n-1}n(n+1)}{2}$ para todo número natural $n \geq 1$.

BASE: Quando $n = 1$ temos $1^2 = 1$ e $\frac{(-1)^0 1(2)}{2} = 1$. Desta forma, $P(1)$ é verdadeira.

HI: Suponha que $P(k) : 1^2 - 2^2 + 3^2 + \cdots + (-1)^{k-1}k^2 = \frac{(-1)^{k-1}k(k+1)}{2}$ seja verdadeira para todo $k \in \mathbb{N}$.

PASSO: Vamos mostrar que se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1) : 1^2 - 2^2 + 3^2 + \cdots + (-1)^k(k+1)^2 = \frac{(-1)^k(k+1)(k+2)}{2}$ é verdadeira.

$$\underbrace{1^2 - 2^2 + 3^2 + \cdots + (-1)^{k-1}k^2}_{\text{H.I.}} + (-1)^k(k+1)^2 =$$

$$\frac{(-1)^{k-1}k(k+1)}{2} + (-1)^k(k+1)^2 =$$

$$(-1)^k\left(\frac{(-1)^{-1}k(k+1)}{2} + (k+1)^2\right)$$

$$(-1)^k\left(\frac{(-1)^{-1}k(k+1) + 2(k+1)^2}{2}\right)$$

$$\frac{(-1)^k}{2}((k+1)[(-1)^{-1}k + 2(k+1)])$$

$$\frac{(-1)^k}{2}((k+1)[-k+2(k+1)])$$

$$\frac{(-1)^k}{2}((k+1)(k+2))$$

Logo, pelo PIM, $P(n) : 1^2 - 2^2 + 3^2 + \cdots + (-1)^{n-1}n^2 = \frac{(-1)^{n-1}n(n+1)}{2}$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

16. Uma pessoa deseja subir uma escada. Supondo que cada passo a ser dado possa cobrir ou um único degrau ou dois degraus de uma vez, ache uma relação de recorrência para a_n, onde a_n é o número de maneiras diferentes que essa pessoa pode subir uma escada com n degraus ($n \geq 1$) (com as restrições dadas).

    Resposta: Seja a_n o número de formas distintas de subir uma escada com n degraus de acordo com o problema proposto. Supondo que falte apenas um degrau para completar a subida, temos apenas uma maneira de cobrir o n-ésimo degrau. Assim, o número de maneiras distintas de subir a escada neste caso seria a_{n-1}. Entretanto, é possível completar a subida cobrindo os dois últimos degraus de uma única vez. O número de formas de fazer isto é a_{n-2}. Observe que temos uma única forma de cobrir um degrau. Logo, $a_1 = 1$. Já para subir dois degraus, temos duas formas: ou bem subimos um de cada vez, ou os dois de uma vez. Portanto, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ a_1 = 1; a_2 = 2$.

17. Determine a relação de recorrência que fornece o número de divisões que n retas provocam em um plano se:

    - não existem duas retas paralelas, e
    - três retas não se encontram em um mesmo ponto.

    Resposta: Dica: Desenhe os casos para $n = 1, 2, 3, 4$. Seja r_n o número de regiões em que n retas (satisfazendo os dois itens anteriores) dividem o plano. Observe que toda vez que adicionamos uma reta ao plano, como ela intercepta todas as outras retas, ela adiciona ao número de regiões anterior, uma nova região a cada reta interceptada (i.e. $(n-1)$ regiões) e ainda adiciona uma nova região referente a ela mesma (ao acrescentarmos uma reta, ela divide o plano em dois lados). Assim, $r_n = r_{n-1} + n, r_0 = 1$.

18. Determine a fórmula fechada da relação de recorrência obtida na Questão 17.

    Resposta:

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + n \\
&= a_{n-2} + (n-1) + n \\
&= a_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n \\
&\vdots\ \ a_{n-i} + [n-(i-1)] + [n-(i-2)] + \ldots + n
\end{aligned}$$

Quando $n - i = 0$ temos $n = i$. Daí

$a_n = a_0 + \underbrace{1 + 2 + \ldots + n}_{\text{soma da P.A. com n termos e razão 1}}$

$a_n = 1 + \dfrac{n^2+n}{2}.$

19. Determine a fórmula fechada da seguinte relação de recorrência: $a_n = 2a_{n-1} + n2^n$, $a_0 = 1$, para $n \geq 1$.

Resposta: Utilizando o Método das substituições regressivas, temos:

$$\begin{aligned}
a_n &= 2a_{n-1} + n2^n \\
&= 2(2a_{n-2} + (n-1)2^{n-1}) + n2^n \\
&= 2(2(2a_{n-3} + (n-2)2^{n-2}) + (n-1)2^{n-1}) + n2^n = 2^3a_{n-3} + (n-2)2^n + (n-1)2^n + n2^n \\
&\vdots \\
&= 2^k a_{n-k} + (n-(k-1))2^n + (n-(k-2))2^n + (n-(k-3))2^n \cdots + n2^n
\end{aligned}$$

Ou seja, $a_n = 2^k a_{n-k} + (n-(k-1))2^n + (n-(k-2))2^n + (n-(k-3))2^n \cdots + n2^n = 2^k a_{n-k} + (n - k + 1)2^n + (n-k+2)2^n + (n-k+3)2^n \cdots + n2^n$.

Para chegar a base, queremos que $a_{n-k} = a_0$. Assim, para que $n - k = 0$, temos que $k = n$. Com isso: $a_n = 2^n a_0 + (1)2^n + (2)2^n + (3)2^n \cdots + n2^n$.

Como $a_0 = 1$, temos: $a_n = 2^n(1) + (1)2^n + (2)2^n + (3)2^n \cdots + n2^n$.

Portanto: $a_n = 2^n + 2^n \sum\limits_{i=1}^{n} i = 2^n + 2^n \frac{(1+n)n}{2}$.

20. Determine a relação de recorrência que fornece o número de sequências quaternárias de n dígitos que contém um número par de zeros.

Resposta: Seja a_n o número de sequências quaternárias com n dígitos que contém um número par de zeros. Considere as sequências com $n-1$ dígitos com número par de zeros. Para o n-ésimo dígito temos 3 opções, a saber: $1, 2, 3$. Assim, temos $3a_{n-1}$ sequências com n dígitos e número par de zeros que não terminam em 0. Entretanto, a sequência pode terminar em 0. Neste caso, a sequência com $n-1$ dígitos deve conter um número ímpar de zeros. O número de sequências com $n-1$ dígitos e número ímpar de zeros pode ser calculado utilizando a noção de complemento: total de sequências quaternárias com $n-1$ dígitos subtraída a quantidade de sequências quaternárias com $n-1$ dígitos e número par de zeros, i.e., $4^{n-1} - a_{n-1}$. Como os dois casos são disjuntos, temos, pelo princípio aditivo que, $a_n = 3a_{n-1} + 4^{n-1} - a_{n-1} = 2a_{n-1} + 4^{n-1}$, $a_1 = 3$, pois ao considerarmos sequências com um dígito, temos 3 possíveis.

21. Seu Florêncio viu que estava ficando muito caro comprar flores, e decide ele mesmo a fazer suas plantações. Ele compra três rosas vermelhas. A cada ano ele nota a seguinte evolução: o número de rosas vermelhas que nascem no ano é o dobro do número de rosas que havia no ano anterior e um terço da quantidade das rosas vermelhas que havia no ano anterior, morrem, para nossa tristeza. Seja a_n o número de flores vivas no ano n:

(a) determine a expressão recursiva do número de flores vivas no ano n.

(b) determine a fórmula fechada do número de flores vivas no ano n.

(c) mostre, por indução, que fórmula fechada do item b, corresponde a relação de recorrência do item a.

Resposta: (a) Note que inicialmente, as flores que havia no ano $n-1$ continuam no ano n. Além disso, nascem o dobro da quantidade que havia no ano $n-1$ e morrem $1/3$ das que havia no ano $n-1$. Dado que inicialmente há 3 flores no ano a_1, temos: $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-1} - \frac{1}{3}a_{n-1} = \frac{8a_{n-1}}{3}$, $a_1 = 3$.

(b) Utilizando o método das substituições regressivas, temos $a_n = \frac{8}{3}a_{n-1} = \frac{8}{3}(\frac{8}{3}a_{n-2}) = \cdots = \frac{8^k}{3^k}a_{n-k}$. Como a base temos $a_1 = 3$, temos que: $n - k = 1$, ou seja: $k = n - 1$. Com isso:

$a_n = \frac{8^{n-1}}{3^{n-1}}a_1$. Portanto: $a_n = \frac{8^{n-1}}{3^{n-1}}3 = 8^{n-1}3^{1-(n-1)} = 8^{n-1}3^{2-n}$.

(c) Queremos mostrar $P(n) : a_n = 8^{n-1}3^{2-n}$.

Base: Vamos mostrar que $P(1)$ é verdadeiro, ou seja, da fórmula recursiva, $a_1 = 3$. E com isso, $8^{1-1}3^{2-1} = 3$.

HI: Supomos $P(k)$ verdadeiro. Ou seja, $a_k = 8^{k-1}3^{2-k}$.

Passo: Vamos mostrar que $P(k+1)$ é verdadeiro. Ou seja, queremos mostrar: $a_{k+1} = 8^k3^{1-k}$. Pela fórmula recursiva, $a_{k+1} = \frac{8}{3}a_k$. Pela HI, $a_k = 8^{k-1}3^{2-k}$.

Assim, $a_{k+1} = \frac{8}{3}a_k = \frac{8}{3}8^{k-1}3^{2-k} = 8^{1+k-1}3^{2-k-1} = 8^k3^{1-k}$.

22. Considere a seguinte variante do problema do crescimento de coelhos (sequência de Fibonacci): Suponha que apenas os casais com exatamente um mês de idade produzam um casal de recém-nascidos. Quantos casais conterá a ilha após n meses?

    Resposta: Chamando de q_n o número de casais após n meses, temos que $q_1 = 1$, visto que inicialmente é colocado na ilha um casal de recém-nascidos.

    Dessa forma, no início do segundo mês haverá o casal que já estava mais um novo casal de recém-nascido, ou seja, $q_2 = 2$.

    Note que, assim, no n-ésimo mês podemos particionar a solução na quantidade de casais que havia no mês anterior, ou seja, q_{n-1} casais, e os casais recém-nascidos, que são exatamente a mesma quantidade dos casais que nasceram no mês anterior, isso é dado por $q_{n-1} - q_{n-2}$ (pois esses são os novos casais surgidos no mês $n-1$).

    Portanto, temos que $q_1 = 1$, $q_2 = 2$, $q_n = q_{n-1} + (q_{n-1} - q_{n-2}) = 2q_{n-1} - q_{n-2}$, para $n \geq 3$.

23. Dispomos de uma quantidade ilimitada de blocos coloridos nas cores branca, amarela e verde. Os blocos amarelos são quadrados e medem 1cm de lado. Os blocos brancos e vermelhos são retangulares e medem 1cm x 2cm. De quantas maneiras podemos arrumá-los em uma fila que ocupe $n$cm, com todos os lados encostados uns nos outros?

    Resposta: Seja q_n a solução para o problema. Pensemos, inicialmente, nos casos básicos. Considerando $n = 1$, temos que $q_1 = 1$, isso pois só há um tipo de bloco medindo 1cm de lado. Considerando $n = 2$, temos que $q_2 = 3$, pois, além de podermos obter 2cm com dois blocos de 1cm cada, podemos utilizar outras duas formas, onde em cada uma delas usamos um único bloco que mede 2cm.

    Considerando um fila de blocos com $n$cm, podemos particionar a solução três tipos: i) os que começam com bloco amarelo, ii) os que começam com bloco branco e iii) os que começam com bloco vermelho.

    Para o caso i), este bloco inicial, amarelo, mede 1cm, portanto da posição 2cm até a posição $n$cm há q_{n-1} maneiras de formar a fila. Pois, note que essa fila mede $n - 1$cm.

    Para o caso ii), este bloco inicial, branco, mede 2cm, portanto da posição 3cm até a posição $n$cm há q_{n-2} maneiras de formar a fila. Pois, note que essa fila mede $n - 2$cm.

    O caso iii) funciona analogamente ao caso ii). Assim, começando pelo bloco vermelho, que mede 2cm, há q_{n-2} maneiras de formar a fila.

    Portanto, temos a seguinte recorrência: $q_1 = 1$, $q_2 = 3$, $q_n = q_{n-1} + 2q_{n-2}$, para $n \geq 3$.

24. Encontre a relação de recorrência para os números de Stirling do segundo tipo, que é o resultado do seguinte problema: Achar a relação de recorrência satisfeita por $S_{n,k}$, que é o número de maneiras de distribuir n objetos distintos dentre k caixas idênticas,

com nenhuma caixa vazia. O número $S_{n,k}$ é conhecido como um número de Stirling de segundo tipo.

Resposta: Neste problema note que temos duas variáveis, número de caixas e números de objetos (Obs.: note também a distinção do que vimos no problema de Combinação com repetição, pois lá tínhamos "caixas" distintas e "objetos" iguais).

Para obter a recorrência do problema de Stirling do segundo tipo, consideremos primeiramente, os casos onde $k = 1$ ou $k = n$. Em ambos os casos, vemos que há uma única forma de distribuir os n objetos nas k caixas. Isso pois para o primeiro caso ($k = 1$), todos os objetos estarão na mesma caixa, enquanto para o segundo caso ($k = n$), um objeto estará em cada caixa e todas as caixas são iguais. Assim, $S_{1,n} = 1$ e $S_{n,n} = 1$.

Note que o problema só faz sentido quando $k \leq n$. Pois caso houvesse mais caixas do que objetos (e assim, $k > n$), então não há como distribuir os objetos pelas caixas de modo que cada caixa esteja ocupada. Assim, nos resta determinar o número de Stirling para $S_{n,k}$, para os casos em que $1 < k < n$ e $n > 2$.

Portanto, para obter a solução de $S_{n,k}$ nos casos restantes, vamos particionar a solução em dois casos: Caso i) casos em que o objeto 1 está numa caixa sozinho; Caso ii) casos em que o objeto 1 está numa caixa com outros objetos. Ao fim, a solução será dada pela soma das soluções dos dois casos.

Para o Caso i), note que, como as caixas são idênticas, ao escolher uma caixa para pôr o objeto 1, restam $n - 1$ caixas (todas iguais) e nessa quantidade, restam $k - 1$ objetos para serem alocados. Assim, temos que há $S_{n-1,k-1}$ formas de distribuir os objetos que restam nas caixas restantes.

Para o Caso ii), note que, uma forma de obter esse resultado é remover o objeto 1 das alocações iniciais, alocar os $n - 1$ objetos nas k caixas satisfazendo a restrição que cada caixa não pode ficar vazia, depois disso, escolher uma das k caixas para pôr o objeto 1. Para alocar os $n - 1$ objetos nas k caixas, temos que há $S_{n-1,k}$ maneiras. Note que neste momento, os $n - 1$ objetos já foram alocados nas k caixas, o que configuram caixas distintas para escolher uma delas para alocar o objeto 1. Logo, há k formas de fazer tal seleção de caixa. Pelo PM, temos então, que há $kS_{n-1,k}$ maneiras de resolver o Caso ii).

Temos, portanto, a seguinte recorrência: $S_{1,n} = 1$, $S_{n,n} = 1$, $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$, para $1 < k < n$ e $n > 2$.