Universidade Federal Fluminense
Curso: Ciência da Computação
Disciplina: Análise e Síntese de Algoritmos
Professor: Luís Felipe

Lista de exercícios 4 – Complexidade Computacional

1. Considere os problemas TSP e TSP-OPT:

   TSP:
   Entrada: uma matriz de distâncias, um valor b
   Saída: Uma ciclo que passa por todos os vértices e possui tamanho no máximo b, se tal ciclo existir.

   TSP-OPT:
   Entrada: uma matriz de distâncias
   Saída: Uma ciclo de menor tamanho que passa por todos os vértices.

   Mostre que se TSP puder ser solucionado em tempo polinomial, então TSP-OPT também pode.

   Resposta: Se existir um algoritmo de complexidade polinomial para resolver TSP, temos que b é um limite superior para TSP-OPT. Dessa forma, como uma busca binária, resolvemos o problema TSP para $b/2$. Caso exista solução, faça o mesmo para $b/4$, e assim por diante. Caso seja não exista solução, faça o mesmo para $3b/4$, e assim por diante.

2. Considere o seguinte problema: ISOMORFISMO-SUBGRAFOS:
   Entrada: Grafos G e H
   Questão: G contém subgrafo isomorfo a H?

   Mostre que ISOMORFISMO-SUBGRAFOS é NP-completo.

   Resposta: O problema CLIQUE é um caso especial deste problema. CLIQUE é NP-completo, conforme mostrado em aula.

3. Considere o seguinte problema: k-CLIQUE:
   Entrada: Grafo G.
   Questão: G possui uma clique de tamanho k?

   Determine a complexidade computacional de k-CLIQUE. Justifique formalmente.

   Resposta: k-CLIQUE pode ser resolvido em tempo polinomial. Basta verificar se algum conjunto de vértices de tamanho k é uma clique, isso pode ser feito em $O(k^2n^k)$.

4. Considere o seguinte problema: CLIQUE:
   Entrada: Grafo G e um inteiro k.
   Questão: G possui uma clique de tamanho pelo menos k?

   Determine a complexidade computacional de CLIQUE. Justifique formalmente.

   Resposta: CLIQUE é NP-completo, conforme mostrado em aula, por redução de 3-SAT.

5. Se as complexidades computacionais dos itens 3 e 4 forem diferentes, justifique o motivo de não podermos utilizar um algoritmo polinomial de um problema para solucionar o outro.

   Resposta: No item 3, k é fixo, então a complexidade do algoritmo é em função deste valor fixo, diferentemente do item 4, cujo valor k é arbitrário, ou seja, a complexidade do algoritmo possui na potência uma variável.

6. Desenvolva um algoritmo polinomial para obter a clique máxima de um grafo planar. Qual a complexidade deste algoritmo? Justifique o motivo dessa estratégia não induzir um algoritmo polinomial para determinar a clique máxima de um grafo qualquer.

   Resposta: Basta verificar todos os conjuntos de tamanho 4, se obteve um K_4 então pare, senão, verifique todos os conjuntos de tamanho 3, se obteve um K_3 então pare, senão, o tamanho da maior clique é 2 (se tiver aresta no grafo) A complexidade é $O(4^2n^4) + O(3^2n^3)$ Essa estratégia não induz um algoritmo polinomial para obter uma clique máxima de um grafo qualquer, pois a complexidade é $O(n^2n^n) + O((n-1)^2n^{n-1}) + ... + O(3^2n^3) = \Omega(2^n)$.

7. Considere o seguinte problema: CAMINHO MAIS LONGO:
   Entrada: Grafo G e um inteiro k.
   Questão: G possui um caminho de tamanho pelo menos k?

   Mostre que o problema CAMINHO MAIS LONGO é NP-completo.

   Resposta: Caminho hamiltoniano é um problema particular, saber se existe um caminho de tamanho n-1. Caminho hamiltoniano é NP-completo, reduzido de ciclo hamiltoniano.

8. Considere o problema CLIQUE para grafos que possuem $\Delta \leq 3$. Este problema é o CLIQUE-3.

   (a) Mostre que CLIQUE-3 está em NP.

   Resposta: Basta verificar se um conjunto de vértices dado S é uma clique no grafo. Para cada par de vértices de S é vizinho, isso pode ser feito em $O(|S|^2)$.

   (b) O que tem de errado na seguinte tentativa de prova de NP-completude para CLIQUE-3?

   tentativa: Sabemos que o problema CLIQUE em grafos arbitrários é NP-completo, então façamos a seguinte transformação: Dado um grafo G arbitrário com vértices de grau no máximo 3, e um parâmetro c, considere $G' = G$ uma instância para CLIQUE. Claramente, G possui uma clique de tamanho c se, e somente se, G' possui uma clique de tamanho c.

   Resposta: Nessa tentativa a ordem está invertida, teríamos que pegar um problema NP-completo e reduzir ao nosso, aqui é feito o contrário.

9. Considere o seguinte problema: k-ÁRVORE GERADORA:
   Entrada: Grafo G.
   Questão: G possui uma árvore geradora tal que cada vértice da árvore possui grau no máximo k?

   Mostre que o problema k-ÁRVORE GERADORA é NP-completo.

   Resposta: Caminho hamiltoniano é um problema particular, queremos saber se existe um caminho gerador, ou seja, uma árvore geradora tal que cada vértice possui grau no máximo 2. Caminho hamiltoniano é NP-completo. Assim, 2-ÁRVORE GERADORA é NP-completo.

10. Considere a seguinte definição: uma *tesselação* de um grafo G é uma partição dos vértices de modo que cada parte é uma clique.

    Considere o seguinte problema: k-TESSELAÇÃO EM GRAFOS:
    Entrada: Grafo G.
    Questão: G possui no máximo k tesselações, de modo que a união das k tesselações cubra todas as arestas?

    (a) Mostre que restrito a grafos bipartidos este problema é equivalente ao problema de coloração de arestas.

    Resposta: Como em grafos bipartidos, não há clique de tamanho maior do que 2. Temos que cada classe de cor é necessariamente uma partição dos vértices, e portanto o índice cromático associa a união das classes de cores como a união das partições de modo a cobrir todos os vértices.

(b) Qual a complexidade computacional de k-TESSELAÇÃO EM GRAFOS BIPARTIDOS?

Resposta: Como o índice cromático de todo grafo bipartido é Δ, então k-TESSELAÇÃO EM GRAFOS BIPARTIDOS é solucionável em tempo polinomial.

(c) Sabendo que coloração de arestas para grafos sem triângulos é NP-completo, mostre que k-tesselação é NP-completo.

Resposta: Assim como em grafos bipartidos as cliques são K2, o mesmo acontece para grafos sem triângulo. Dessa forma, podemos associar também cada classe de cor a uma partição de vértices em cliques, e vice e versa. Note porém, que grafos sem triângulo é uma superclasse de bipartido (nesses grafos podemos ter ciclos ímpares maiores do que 3). Como a determinação do índice cromático em grafos sem triângulo é NP-completo, então o mesmo acontece para a determinação da k-tesselação em grafos.

11. Defina, formalmente, as classes de problemas P, NPe co-NP, exemplificando e justificando os exemplos adequadamente.

12. Suponha que 3-SAT seja solucionável em tempo polinomial. Mostre, através de uma redução polinomial, que 4-SAT também é um problema em P.

13. Mostre que 3-SAT é NP-completo a partir de SAT.

14. Em grafos, um PROBLEMA SANDUÍCHE PARA Π é definido da seguinte forma: dados dois grafos $G^1 = (V, E_1)$ e $G^2 = (V, E_2)$, queremos decidir se existe um grafo $G = (V, E)$ tal que $E_1 \subseteq E \subseteq E_2$ e que satisfaça a propriedade Π. Se este grafo existir, ele é dito **grafo sanduíche** para (G^1, G^2). Para muitas classes de grafos, este problema é NP-completo.

    Uma **restrição** do PROBLEMA SANDUÍCHE PARA Π é o PROBLEMA PROBE PARTICIONADO PARA Π, definido da seguinte maneira: dados um grafo $G^1 = (V, E_1)$ e uma partição (P, N) de V, onde N é um **conjunto independente**, deseja-se saber se é possível obter um grafo $G = (V, E_2)$ de modo que $E_1 \subseteq E_2$ e satisfazendo Π, APENAS pela adição de arestas entre vértices de N.

    Explique por que o PROBLEMA PROBE PARTICIONADO PARA Π é uma restrição do PROBLEMA SANDUÍCHE PARA Π.

15. Considere os dois problemas a seguir:

    PROBLEMA DA MOCHILA 0-1:

    DADOS: Um conjunto de n itens $a_1, \ldots, a_n$ cada um com um valor $valor_i$ e um peso $peso_i$ ($1 \leq i \leq n$) dados por números inteiros, um valor inteiro W referente ao peso máximo que a mochila aguenta e um valor k.

    QUESTÃO: O maior valor que podemos guardarxt na mochila é k?

    PROBLEMA DA PARTIÇÃO:

DADOS: Um conjunto de n itens $a_1, \ldots, a_n$ cada um com um peso $a_i.peso$ $(1 \leq i \leq n)$ dados por números inteiros.

QUESTÃO: É possível dividir os elementos em dois conjuntos com o mesmo peso?

Obtenha uma transformação polinomial do problema da partição no problema da mochila.