Universidade Federal Fluminense
Disciplina: Análise e Projeto de Algoritmos
Professor: Luís Felipe

Revisão AP 3

1. Prove que o problema da PARTIÇÃO é NP-completo. Para isso:

    a) Mostre que o problema pertence à classe NP.

    b) Mostre que o problema é NP-difícil por meio de uma redução polinomial a partir do problema SUBSET SUM (sabidamente NP-completo), definido a seguir:

SUBSET SUM: Dado um conjunto $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de inteiros positivos e um inteiro t, existe um subconjunto $A \subseteq S$ tal que

$$\sum_{x \in A} x = t \, ?$$

Resolução:

a) O problema PARTIÇÃO está em NP.

Dado um conjunto de inteiros positivos $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, queremos decidir se existe uma partição de S em dois subconjuntos A e B tais que:

$$A \cup B = S, \quad A \cap B = \emptyset, \quad \text{e} \quad \sum_{x \in A} x = \sum_{x \in B} x$$

Se alguém nos fornece uma partição (A, B) como certificado, podemos verificar em tempo polinomial:

- que $A \cup B = S$ e $A \cap B = \emptyset$,
- que $\sum_{x \in A} x = \sum_{x \in B} x$.

Logo, PARTIÇÃO pertence à classe NP.

b) PARTIÇÃO é NP-difícil via redução de SUBSET SUM.

Sabemos que o problema SUBSET SUM é NP-completo.

Dada uma instância de SUBSET SUM, construiremos uma instância equivalente de PARTIÇÃO.

Construção da redução:

- Seja $T = \sum_{i=1}^{n} x_i$ (a soma total dos elementos do conjunto S).
- Definimos o novo conjunto $S' = S \cup \{2t - T\}$.

Note que $2t - T$ é um número inteiro construído a partir da instância original. A soma total dos elementos de S' é:

$$T + (2t - T) = 2t$$

Portanto, se conseguirmos encontrar um subconjunto de S' com soma t, então o complemento também terá soma t, formando uma partição válida.

Equivalência:

- Se a instância de SUBSET SUM tem solução (existe $A \subseteq S$ com soma t), então podemos construir uma partição de S' com soma t em ambos os lados, pois o complemento de A em S soma $T - t$, e ao adicionar o elemento $2t - T$, temos:
$$T - t + (2t - T) = t$$
- Se existe uma partição de S' com duas partes de soma t, então o novo elemento $2t - T$ deve estar em uma das partes, e o restante da soma corresponde a um subconjunto de S com soma t. Isso resolve a instância original de SUBSET SUM.

2. (2,0) Considere o seguinte problema: PARTIÇÃO EM CLIQUES:
Entrada: Grafo G e um inteiro k.
Questão: G contém uma partição dos vértices em no máximo k cliques?

Mostre que PARTIÇÃO EM CLIQUES é NP-completo.

Resolução:

1. O problema pertence à classe NP.

Dado um certificado com k subconjuntos disjuntos $V_1, V_2, \ldots, V_k$ tal que $\bigcup_{i=1}^{k} V_i = V$, podemos verificar em tempo polinomial:

- Que os subconjuntos são disjuntos e cobrem todos os vértices;
- Que cada subgrafo $G[V_i]$ induzido por V_i é um clique, ou seja, todos os pares de vértices em V_i estão conectados.

Portanto, PARTIÇÃO EM CLIQUES pertence a NP.

2. O problema é NP-difícil via redução de COLORAÇÃO DE VÉRTICES.

Sabemos que o problema de COLORAÇÃO DE VÉRTICES (Coloração de vértices) é NP-completo para $k \geq 3$.

Definição de COLORAÇÃO DE VÉRTICES: Dado um grafo $G = (V, E)$ e um inteiro k, é possível atribuir cores aos vértices com no máximo k cores, de forma que vértices adjacentes tenham cores diferentes?

Ideia da redução:

Seja (G, k) uma instância de COLORAÇÃO DE VÉRTICES. Construímos a instância $(\overline{G}, k)$ de PARTIÇÃO EM CLIQUES, onde $\overline{G}$ é o complemento de G. Isto é:

$$(u, v) \in E(\overline{G}) \iff (u, v) \notin E(G), \quad \text{para } u \neq v$$

Equivalência:

- Se G admite uma coloração com k cores, então seus vértices podem ser particionados em k classes de cor, onde nenhum par de vértices na mesma classe está conectado por uma aresta.
- No grafo $\overline{G}$, essas classes de cor se tornam cliques, pois as arestas ausentes em G agora estão presentes em $\overline{G}$.
- Assim, uma coloração de G com k cores corresponde a uma partição de $\overline{G}$ em k cliques.

Portanto, temos:

$$G \text{ é } k\text{-colorível} \iff \overline{G} \text{ pode ser particionado em } k \text{ cliques}$$

3. Prove que o problema Ciclo Hamiltoniano é NP-completo. Para isso:

   a) Mostre que o problema pertence à classe NP.

   b) Mostre que o problema é NP-difícil por meio de uma **redução polinomial a partir do problema Caminho Hamiltoniano**, definido abaixo.

   Definições:

   - Caminho Hamiltoniano (HP): Dado um grafo $G = (V, E)$, existe um caminho que visita todos os vértices exatamente uma vez?
   - Ciclo Hamiltoniano (HC): Dado um grafo $G = (V, E)$, existe um ciclo que visita todos os vértices exatamente uma vez (voltando ao vértice inicial)?

   Resolução:

   a) Ciclo Hamiltoniano está em NP.

   Dado um ciclo como certificado, podemos verificar em tempo polinomial:

   - Se todos os vértices do grafo aparecem exatamente uma vez no ciclo;
   - Se cada vértice está conectado ao próximo no ciclo por uma aresta;
   - Se o último vértice se conecta de volta ao primeiro.

   Logo, o problema pertence à classe NP.

   b) Redução de Caminho Hamiltoniano para Ciclo Hamiltoniano.

   Seja $G = (V, E)$ uma instância do problema Caminho Hamiltoniano. Nosso objetivo é construir um grafo $G' = (V', E')$ tal que:

   $$G \text{ tem caminho hamiltoniano} \iff G' \text{ tem ciclo hamiltoniano}$$

   Construção:

   - Escolha dois vértices arbitrários $s, t \in V$ (candidatos a extremos do caminho).
   - Adicione um novo vértice v_{novo} ao grafo.
   - Conecte v_{novo} a s e a t:
   $$V' = V \cup \{v_{\text{novo}}\}, \quad E' = E \cup \{(v_{\text{novo}}, s), (v_{\text{novo}}, t)\}$$

   Correção da Redução:

   $\Rightarrow$ Se G tem um caminho hamiltoniano de s até t, então em G' temos um ciclo hamiltoniano:

   $$v_{\text{novo}} \to s \to \cdots \to t \to v_{\text{novo}}$$

   $\Leftarrow$ Se G' tem um ciclo hamiltoniano, então o vértice v_{novo} deve estar nele. Como v_{novo} tem grau 2, ele deve ser conectado a dois vértices (digamos, s e t) que formam as extremidades de um caminho hamiltoniano em G:

   $$v_{\text{novo}} \to s \to \cdots \to t \to v_{\text{novo}} \Rightarrow s \to \cdots \to t \text{ é caminho hamiltoniano em } G$$

4. Considere o seguinte problema:

   Conjunto Dominante Mínimo (Minimum Dominating Set)

   Entrada: Um grafo $G = (V, E)$ e um inteiro k.

Pergunta: Existe um subconjunto $D \subseteq V$ com $|D| \leq k$ tal que todo vértice $v \in V$ está em D ou possui um vizinho em D?

Prove que o problema Conjunto Dominante Mínimo é NP-completo.

Resolução:

1. O problema está em NP

Dado um conjunto $D \subseteq V$, com $|D| \leq k$, podemos verificar em tempo polinomial se cada vértice $v \in V$ está em D ou é vizinho de algum vértice de D.
Portanto, Minimum Dominating Set pertence à classe NP.

2. Redução de Vertex Cover para Minimum Dominating Set

Vamos reduzir o problema Vertex Cover, que é NP-completo.

> Vertex Cover]
>
> *Entrada:* Um grafo $G = (V, E)$ e um inteiro k.
>
> *Pergunta:* Existe um subconjunto $C \subseteq V$ com $|C| \leq k$ tal que toda aresta $(u, v) \in E$ possui pelo menos uma extremidade em C?

Construção:

Dada uma instância (G, k) de Vertex Cover, construímos uma instância (G', k) de Minimum Dominating Set da seguinte forma:

- Para cada aresta $(u, v) \in E(G)$, adicionamos um novo vértice w_{uv} em G'.
- Conectamos w_{uv} a u e v: adicionamos as arestas (w_{uv}, u) e (w_{uv}, v).
- O novo grafo G' possui $|V| + |E|$ vértices.
- Mantemos o mesmo valor de k.

Corretude da redução

($\Rightarrow$) Se (G, k) é uma instância Sim de Vertex Cover, então (G', k) é uma instância Sim de Dominating Set.

Se $C \subseteq V$ é um conjunto de cobertura de vértices com $|C| \leq k$, então:

- Cada vértice w_{uv} tem uma aresta para u e para v.
- Como (u, v) está em $E(G)$, pelo menos um de u ou v pertence a C.
- Portanto, todo w_{uv} é vizinho de algum vértice de C.
- Como $C \subseteq V$ e cobre todas as arestas, todos os vértices w_{uv} e V são dominados por C.

Logo, C é um conjunto dominante de tamanho $\leq k$ em G'.

($\Leftarrow$) Se (G', k) é uma instância Sim de Dominating Set, então (G, k) é uma instância Sim de Vertex Cover.

Seja $D \subseteq V(G')$ um conjunto dominante com $|D| \leq k$.

- Para que D domine cada vértice w_{uv}, ele deve conter u ou v (ou ambos).
- Isso implica que para cada aresta $(u, v) \in E(G)$, pelo menos um de u ou v está em D.
- Assim, $D \cap V(G)$ é um conjunto de cobertura de vértices para G.
- Como $|D| \leq k$, também $|D \cap V(G)| \leq k$.

Logo, G possui um conjunto de cobertura de vértices de tamanho $\leq k$.