Aula 6 - O Teorema Mestre

Luís Felipe

UFF

14 de Setembro de 2023

Luís Felipe

Dividir para conquistar

Na Aula 4 vimos exemplos de resoluções de problemas pelo método da divisão e conquista:

- Busca binária, cuja complexidade é $O(\log n)$, provado na Aula 3.
- MergeSort, cuja formalização do algoritmo e complexidade veremos na Aula 7.

Luís Felipe

14/09/23

Dividir para conquistar - Outro exemplo

- Qual a complexidade do cálculo de uma multiplicação de dois números inteiros grandes?

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 2 & 5 & 7 \\
 & \times & 1 & 2 & 3 \\
\hline
 & & 7 & 7 & 1 \\
 & 5 & 1 & 4 & \\
2 & 5 & 7 & & \\
\hline
3 & 1 & 6 & 1 & 1
\end{array}
$$

- Considerando números com n dígitos, temos n^2 multiplicações e depois a ordem de $n + n - 1$ somas, ou seja: $O(n^2) + O(2n - 1) = O(n^2)$

Luís Felipe

14/09/23

Será que dá pra melhorar???

- Utilizando a técnica divisão e conquista e as noções básicas de aritmética, vamos dividir os números em duas partes.
- $257 = 25 \times 10 + 7$
- $123 = 12 \times 10 + 3$
- $98245 = 982 \times 10^2 + 45$
- $982456 = 982 \times 10^3 + 456$
- Em geral, qualquer número com n dígitos pode ser escrito como: x $\times 10^m$ + y, onde
  - x é a primeira metade do número
  - y é a segunda metade do número
  - $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

$$\begin{aligned} n_1 \times n_2 &= (x_1 \times 10^m + y_1) \times (x_2 \times 10^m + y_2) \\ &= (x_1 \times x_2 \times 10^{2m}) + (x_1 \times y_2 + y_1 \times x_2) \times 10^m + (y_1 \times y_2) \end{aligned}$$

Luís Felipe

14/09/23

E agora???

- Trocamos uma multiplicação por 4 bem menores (metade do tamanho)
- Mas qual seria a complexidade de pior caso?
  - ▶ Qual seria a relação de recorrência que expressa a quantidade de multiplicações de dígitos que fazemos?
    - ▶ $T(n)$ é o número de multiplicações de dígitos ao operarmos números com n dígitos
    - ▶ Adições tomam tempo linear
    - ▶ $T(n) = 4\,T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$

Luís Felipe

14/09/23

O teorema

- Vários problemas que podem ser resolvidos utilizando a técnica de divisão e conquista apresentam uma padronagem na escrita de suas equações de recorrência.

- Em geral, temos um problema de tamanho n e o dividimos em a subproblemas de tamanho $\frac{n}{b}$, $a, b > 0$.

- Daí, combinamos as soluções dos subproblemas em tempo $O(n^d)$, $d \geq 0$.

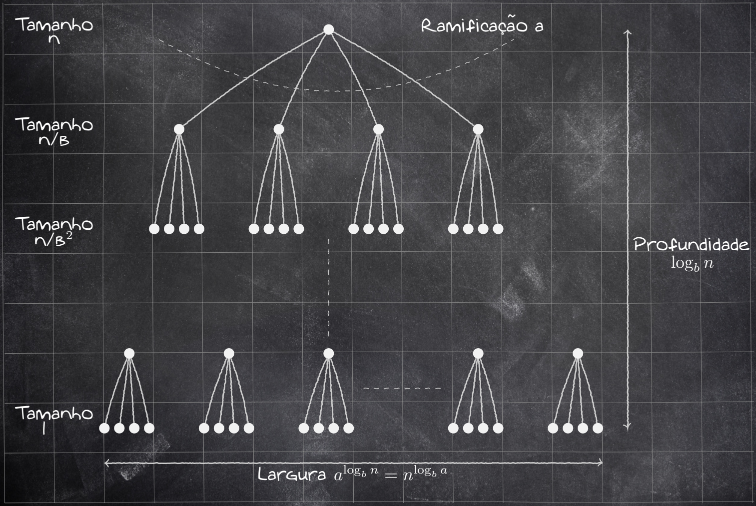
- O tempo de execução pode ser descrito por:

$$T(n) = a\,T\left(\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil\right) + O(n^d)$$

- O Teorema Mestre fornece a fórmula fechada, em notação O, para esse tipo de equação de recorrência.

Luís Felipe
14/09/23

Árvore da Recursão



Luís Felipe

14/09/23

Teorema Mestre

Se $T(n) = a\, T(\lceil \frac{n}{b} \rceil) + O(n^d)$ para constantes $a > 0$, $b > 1$ e $d \geq 0$, então

$$T(n) = \begin{cases} O(n^d), & d > \log_b a \\ O(n^d \log n), & d = \log_b a \\ O(n^{\log_b a}), & d < \log_b a \end{cases}$$

Luís Felipe
14/09/23

Árvore de Recursão

- Na <u>etapa K</u> há a^K subproblemas

- Na <u>etapa K</u> cada subproblema tem tamanho $\frac{n}{b^K}$

tamanho do problema	etapa = nível = profundidade
n	0
$\frac{n}{b}$	1
$\frac{n}{b^2}$	2
$\vdots$	
$\frac{n}{b^k}$	K

No nível K, devemos fazer $a^K O\left(\frac{n}{b^K}\right)^d$ operações,

pois $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + O(n^d)$

Luís Felipe
14/09/23

$$a^k \cdot O\left(\frac{n}{b^k}\right)^d = O(n^d) \cdot \frac{a^k}{b^{kd}} = O(n^d) \cdot \left(\frac{a}{b^d}\right)^k$$

Como $K = 0, 1, \dots, h$, vamos calcular h:

$$\frac{n}{b^h} = 1 \rightsquigarrow n = b^h \rightsquigarrow \log_b n = \log_b b^h$$

$$\log_b n = h \log_b b$$

$$h = O(\log_b n)$$

Como a árvore de recursão representa o número passos

$$\text{Complexidade} \rightsquigarrow \sum_{K=0}^{\log_b n} O(n^d) \cdot \left(\frac{a}{b^d}\right)^K$$

Luís Felipe
14/09/23

$$\sum_{K=0}^{\log_b n} O(n^d)\cdot\left(\frac{a}{b^d}\right)^K = \underbrace{O(n^d) + O(n^d)\frac{a}{b^d} + O(n^d)\left(\frac{a}{b^d}\right)^2 + \dots + O(n^d)\left(\frac{a}{b^d}\right)^{\log_b n}}_{}$$

Soma de PG, cuja razão $\frac{a}{b^d}$

Vamos analisar a soma dependendo da razão:

i) $\frac{a}{b^d} < 1$ ii) $\frac{a}{b^d} > 1$ iii) $\frac{a}{b^d} = 1$

$$S_n = \frac{a_1\left(q^{\#\text{termos}} - 1\right)}{q - 1}$$

Luís Felipe
14/09/23

i) $\frac{a}{b^d} < 1 \rightsquigarrow a < b^d \rightsquigarrow \log_b a < d$

PG decrescente $0 < \frac{a}{b^d} < 1$. Podemos concluir

$S_m = O(m^d)$

$$S_m = \frac{m^d\left(\left(\frac{a}{b^d}\right)^{\log_b m} - 1\right)}{\left(\frac{a}{b^d}\right) - 1} = \frac{-m^d\left(1 - \overbrace{\left(\underbrace{\frac{a}{b^d}}_{<1}\right)^{\log_b m}}^{<1}\right)}{-\left(1 - \left(\frac{a}{b^d}\right)\right)}$$

$S_m = O(m^d)$

Luís Felipe

14/09/23

ii) $\frac{a}{b^d} > 1 \rightsquigarrow a > b^d \rightsquigarrow \log_b a > d$

PG crescente, devemos concluir

$$S_n = O(n^{\log_b a})$$

$$S_n = n^d \frac{\left(\left(\frac{a}{b^d}\right)^{\log_b n} \cancel{- 1}\right)}{\left(\frac{a}{b^d}\right) \cancel{- 1}} \approx n^d \left(\frac{a}{b^d}\right)^{\log_b n}$$

$$= n^d \left(\frac{a^{\log_b n}}{b^{d \log_b n}}\right) = n^d \left(\frac{a^{\log_b n}}{b^{\log_b n^d}}\right) = \frac{n^d \cdot a^{\log_b n}}{n^d}$$

$$S_n = a^{\log_b n}$$

Luís Felipe
14/09/23

Vamos concluir que $a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$

$$a^{\log_b n} = b^{\log_b (a^{\log_b n})} = b^{\log_b n \cdot \log_b a}$$

$$= b^{\log_b a \cdot \log_b n} = b^{\log_b n^{\log_b a}}$$

$$= n^{\log_b a}$$

iii) $\frac{a}{b^d} = 1 \rightsquigarrow a = b^d \rightsquigarrow \log_b a = d$

PG cuja razão igual a 1, temos $O(\log_b n)$ termos, cada um com valor $O(n^d)$.

Logo a soma é: $O(n^d) \cdot O(\log_b n) =$

$$= O(n^d \log_b n)$$

Luís Felipe
14/09/23

A estratégia de Gauss

- Para efetuar uma multiplicação utilizando a recorrência $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + O(n)$, pelo Teorema Mestre, $T(n) = O(n^2)$.
- Gauss percebeu que ao invés de 4 multiplicações de $\frac{n}{2}$ dígitos, poderíamos fazer com apenas 3.
- $n_1 \times n_2 = (x_1 \times x_2 \times 10^{2m}) + (x_1 \times y_2 + y_1 \times x_2) \times 10^m + (y_1 \times y_2)$
- Mas $(x_1 \times y_2 + y_1 \times x_2) = (x_1 + y_1)(x_2 + y_2) - x_1x_2 - y_1y_2$
- Pensando no comportamento assintótico da função, esse decréscimo não muda muita coisa, mas quando o assunto é recursividade, esse decréscimo é relevante.
- Assim, temos $T(n) = 3\,T(\frac{n}{2}) + O(n)$
- Pelo Teorema Mestre, $T(n) = O(n^{1.59})$