Aula 5 - Resolução de Relação de Recorrência

Luís Felipe

UFF

12 de Setembro de 2023

Luís Felipe
12/09/23

Resolução de Relações de Recorrência

- Método das Substituições Regressivas
  - Válido para relações do tipo $a_n = ca_{n-1} + f(n), n \geq 1, a_0$ dado e c constante
- Método da Suposição e Verificação
  - Necessário fazer um palpite da solução
  - Necessário fazer uma prova por indução para validar a solução
- Método das Raízes Características É o que veremos!!!
- Funções Geradoras

Luís Felipe

12/09/23

Método das Raízes Características

- Uma relação de recorrência é dita linear se ela é da forma:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_d a_{n-d} + f(n)$$

onde c_i é constante, $1 \leq i \leq d$

- A ordem da relação de recorrência é dada por d.
- Se $f(n) = 0$, a relação de recorrência é dita homogênea. Caso contrário, não homogênea.

Luís Felipe
12/09/23

Exemplos:

1. Torres de Hanoi $\begin{cases} T_n = 2T_{n-1} + 1 \\ T_1 = 1 \end{cases}$ linear
não homogênea
ordem 1

2. Sequência de Fibonacci $\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_0 = 1 \\ F_1 = 1 \end{cases}$ linear
homogênea
ordem 2

Luís Felipe

12/09/23

Equação Característica

Dada uma relação de recorrência linear homogênea ($f(n) = 0$)

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_d a_{n-d}$$

onde c_i é constante, $1 \leq i \leq d$, a equação característica associada à recorrência é dada por

$$\alpha^n = c_1 \alpha^{n-1} + c_2 \alpha^{n-2} + \ldots + c_d \alpha^{n-d}$$

ou ainda $\alpha^n - c_1 \alpha^{n-1} - c_2 \alpha^{n-2} - \ldots - c_d \alpha^{n-d} = 0$

Luís Felipe
12/09/23

Teorema fundamental da Álgebra

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, um polinômio de grau d tem exatamente d raízes não necessariamente distintas.

A solução da relação de recorrência depende das raízes serem distintas ou não.

Luís Felipe
12/09/23

Exemplo: Vamos considerar a relação de recorrência da Sequência de Fibonacci.

$$\begin{cases} F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \end{cases}$$

Eq. característica: $\alpha^n - \alpha^{n-1} - \alpha^{n-2} = 0 \quad (1)$

Dividindo a eq. (1) por $\alpha^{n-2} \neq 0$, temos:

$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$

$\alpha_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\alpha_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

Luís Felipe

12/09/23

Exemplo - Continuação

Observe que ${\alpha_1}^n$ e ${\alpha_2}^n$ satisfazem $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Para tal, basta notar que $\alpha^n = \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}$, e assim:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}$$

e

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}$$

Luís Felipe
12/09/23

Parada teórica

Teorema: Se $a_n = {\alpha_1}^n$ e $a_n = {\alpha_2}^n$ são soluções para uma relação de recorrência linear, então $a_n = k_1{\alpha_1}^n + k_2{\alpha_2}^n$ é também uma solução da relação de recorrência.

OBS.: Qualquer combinação linear de soluções é também solução.

OBS.: Essa é uma versão simplificada do princípio da superposição.

OBS.: Esse teorema pode ser generalizado para quando o grau da relação de recorrência for maior do que 2.

Luís Felipe
12/09/23

Voltando ao Exemplo

Logo, $F_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ e $F_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ são soluções e, portanto,

$$F_n = k_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + k_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

é solução.

Luís Felipe
12/09/23

Exemplo - Continuação

Utilizando as condições iniciais $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, vamos determinar os valores das constantes k_1 e k_2.

$$F_0 = 0 = k_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + k_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = k_1 + k_2$$

$$F_1 = 1 = k_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + k_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1$$

Resolvendo o sistema, temos:

$k_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ e $k_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Logo,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Luís Felipe
12/09/23

Método das raízes características

Método geral para recorrências lineares homogêneas

1. Escrever a eq. característica associada
   - Se a eq. característica tem d raízes distintas $(r_1, r_2, \cdots, r_d)$, então a solução da recorrência é da forma:

     $$a_n = k_1 {r_1}^n + k_2 {r_2}^n + \ldots + k_d {r_d}^n$$

   - Senão, se r é uma raiz de multiplicidade m da eq. característica, então $r^n, nr^n, n^2 r^n, \ldots, n^{m-1} r^n$ são soluções da eq. de recorrência.
     - Na solução da recorrência, a parte referente a esta raiz de multiplicidade m é da forma:

       $$k_1 r^n + k_2 n r^n + k_3 n^2 r^n + \ldots + k_m n^{m-1} r^n$$

2. Utilizar as condições iniciais para determinar os valores das constantes k_i.

Luís Felipe

12/09/23

Exemplo I:
$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 3 \end{cases}$$

Ex 1)

$$\begin{cases} a_m = a_{m-1} + 2a_{m-2} \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 3 \end{cases}$$

$$\alpha^m = \alpha^{m-1} + 2\alpha^{m-2} \quad / \alpha^{m-2}$$

$$\frac{\alpha^m}{\alpha^{m-2}} = \frac{\alpha^{m-1}}{\alpha^{m-2}} + 2\frac{\alpha^{m-2}}{\alpha^{m-2}}$$

$$\alpha^2 = \alpha + 2$$

$$\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$$

$\hookrightarrow \alpha_1 = -1$

$\hookrightarrow \alpha_2 = 2$

$$a_m = K_1(-1)^m + K_2(2)^m$$

$$a_1 = 1 = -K_1 + 2K_2$$

$$a_2 = 3 = K_1 + 4K_2$$

$$4 = 6K_2$$

$$K_2 = \frac{2}{3}, \quad K_1 = \frac{1}{3}$$

$$a_m = \frac{(-1)^m}{3} + \frac{2}{3}\cdot 2^m$$

$$a_m = \frac{(-1)^m}{3} + \frac{2^{m+1}}{3}$$

Luís Felipe
12/09/23

Exemplo 2: Considere a relação de recorrência cuja equação característica é da forma:

$$(\alpha - r_1)^2(\alpha - r_2)(\alpha - r_3)^3 = 0$$

e escreva a solução a_n para esta relação de recorrência.

- Solução: $a_n = k_1 {r_1}^n + k_2 n {r_1}^n + k_3 {r_2}^n + k_4 {r_3}^n + k_5 n {r_3}^n + k_6 n^2 {r_3}^n$

Luís Felipe 12/09/23

Exemplo 3: Resolva a relação de recorrência:

$$\begin{cases} a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} & = & 0 \\ a_0 & = & 5/2 \\ a_1 & = & 8 \end{cases}$$

Ex 3)

$$a_m - 4a_{m-1} + 4a_{m-2} = 0$$
$$a_0 = \frac{5}{2}$$
$$a_1 = 8$$

$$\alpha^m - 4\alpha^{m-1} + 4\alpha^{m-2} = 0$$

$$\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0$$

$$(\alpha - 2)^2 = 0$$

$\hookrightarrow \alpha_1 = 2$

$\hookrightarrow \alpha_2 = 2$

$$a_m = K_1 2^m + K_2 m 2^m$$

$$a_0 = \frac{5}{2} = K_1 . 2^0 + K_2 . 0 . 2^0$$

$\hookrightarrow K_1 = \frac{5}{2}$

$$a_1 = 8 = \frac{5}{2} 2^1 + K . 1 . 2^1$$

$\hookrightarrow K_2 = \frac{3}{2}$

$$a_m = \frac{5}{2} 2^m + \frac{3}{2} m . 2^m$$

Luís Felipe

12/09/23

Caso não homogêneo

Seja $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_d a_{n-d} + f(n)$ uma relação de recorrência linear não homogênea, c_i constante, $1 \leq i \leq d$.

Resolução (3 passos)

1. Substitua $f(n)$ por 0 (zero) e resolva a relação de recorrência linear homogênea obtida (ignorando as condições iniciais)
   - A solução encontrada é dita solução homogênea
2. Volte a considerar o $f(n)$ e dê um palpite de uma solução para a equação de recorrência associada a $f(n)$ (ignorando as condições iniciais).
   - Esta solução é dita solução particular
3. Some a solução homogênea e a solução particular para obter a solução geral.
   - Use as condições iniciais para determinar as constantes envolvidas.

Luís Felipe
12/09/23

Exemplo 1: $\begin{cases} a_n &= 4a_{n-1} + 3^n \\ a_1 &= 1 \end{cases}$

OBS.: Para determinar a solução particular, "chutamos" uma solução de mesma natureza que $f(n)$.

- Exemplo:
  - $f(n)$ é um polinômio de grau s, então chutamos $S_p =$ polinômio de grau s.
    - $f(n) = n^2 \to S_p = An^2 + Bn + C$
  - $f(n)$ é uma função exponencial, então chutamos que S_p seja também uma função exponencial.
    - $f(n) = 2^n \to S_p = C2^n$

OBS.: Se com o palpite não conseguir obter valores as constantes da solução particular, então tente solução com grau superior.

Ex 1)

$$a_n = 4a_{n-1} + 3^n$$

$$a_1 = 1$$

$$S_H = a_n = 4a_{n-1}$$

$$\alpha^n = 4\alpha^{n-1}$$

$$\alpha^n - 4\alpha^{n-1} = 0$$

$$\alpha - 4 = 0$$

$$\hookrightarrow \alpha = 4$$

$$S_H = a_n = K_1 \cdot 4^n$$

$$S_p = a_n = C \cdot 3^n$$

$$a_n = 4a_{n-1} + 3^n$$

$$C3^n = 4(C3^{n-1}) + 3^n$$

Dividindo por 3^{n-1}

$$C3 = 4C + 3$$

$$C = -3$$

$$a_n = S_H + S_P = K_1 4^n + (-3) \cdot 3^n$$

$$a_n = K_1 4^n + (-1) \cdot 3 \cdot 3^n = K_1 4^n - 3^{n+1}$$

$$a_1 = 1 = 4K_1 - 3^2 \rightarrow K_1 = 5/2$$

$$a_n = \frac{5}{2} \cdot 4^n - 3^{n+1}$$

Luís Felipe
12/09/23

Exemplo 2:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n \\ a_0 = 4 \\ a_1 = 7 \end{cases}$$

Luís Felipe
12/09/23

Ex 2)

$$\begin{cases} a_m = 4a_{m-1} - 4a_{m-2} + m \\ a_0 = 4 \\ a_1 = 7 \end{cases}$$

$$S_H = \alpha^m - 4\alpha^{m-1} + 4\alpha^{m-2} = 0$$

$$\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0$$

$$(\alpha - 2)^2 = 0$$

$$S_H = K_1 2^m + K_2 m 2^m$$

$$f(m) = m$$

$$S_p = a_m = Am + B \quad , \quad a_m = 4a_{m-1} - 4a_{m-2} + m \quad \therefore$$

$$Am + B = 4(A(m-1) + B) - 4(A(m-2) + B) + m$$

$$Am + B = 4Am - 4A + 4B - 4Am + 8A - 4B + m$$

$$Am + B = m + 4A \rightarrow B = 4A \rightarrow B = 4$$

$$\hookrightarrow A = 1$$

Luís Felipe

12/09/23

Exemplo 3: Problema das Ovais

$$\begin{cases} a_n &= a_{n-1} + 2(n-1) \\ a_1 &= 2 \end{cases}$$

Luís Felipe

12/09/23

(Ex 3) $\begin{cases} a_m = a_{m-1} + 2(m-1) \\ a_1 = 2 \end{cases}$

$S_H = a_m = \alpha^m - \alpha^{m-1} = 0$

$\alpha - 1 = 0$

$\alpha = 1$

$S_H = K_1 1^m$

$= a_m = K_1$

$SP = Am + B$, $a_m = a_{m-1} + 2(m-1)$

$Am + B = A(m-1) + B + 2m - 2$

$Am + B = Am - A + B + 2m - 2$

$A = 2m - 2$

$0m + A = 2m - 2 \rightarrow A = -2$

$\cancel{0 = 2}$

$SP = Am^2 + Bm + C$