Aula 4 - Relação de Recorrência

Luís Felipe

UFF

05 de Setembro de 2023

Luís Felipe
05/09/23

Começando do começo...

Em computação existe uma técnica muito utilizada para construirmos algoritmos.

Esta técnica é denominada divisão e conquista (divide and conquer) e consiste em: determinar a solução de problema buscando sua solução através da solução de problemas menores.

Curiosidade: Termo clássico em estratégias de guerras. Gere uma divisão de seus inimigos para aí sim, conquistá-los. Estratégia utilizado por Júlio César e termo conhecido desde a Antiguidade.

Em computação: Às vezes conseguimos soluções mais eficientes quando pensamos dessa forma.

Luís Felipe
05/09/23

Exemplo: Problema de busca numa lista ordenada:

- Entrada: 2 5 8 10 15 20 25
- Saída: Posição do 16.

Possível algoritmo: Percorra do início até o fim da lista, indo para a posição seguinte se elemento for menor ao buscado.

Resposta: 6 passos para concluir que 16 não se encontra.

Algoritmo de Busca Binária: Veja quem está no meio da lista. Se o elemento que buscamos for menor, então descarte a segunda metade e faça a mesma análise para a primeira metade. Analogamente, se elemento que buscamos for maior que o meio, descarte a primeira metade e faça a mesma análise para a segunda metade.

Resposta: 3 passos para concluir que 16 não se encontra.

Exemplo: Problema de ordenação de uma lista:

- Entrada: 25 5 10 2 20 8 15
- Saída: transformação em 2 5 8 10 15 20 25

Algoritmo MergeSort: divida ao meio; ordene cada metade (recursivamente); compõe soluções das metades.

Luís Felipe

05/09/23

Definição

- Para uma sequência de números $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$, uma equação que relaciona o termo geral a_n a um ou mais de seus predecessores na sequência, para qualquer n, é dita uma relação de recorrência ou equação de diferenças.
- O fato de a_n ser escrito em função de predecessores faz com que o conhecimento de um ou mais termos iniciais da sequência seja necessário para seu cálculo. Tais elementos são denominados condições iniciais ou condições de fronteira.

Luís Felipe
05/09/23

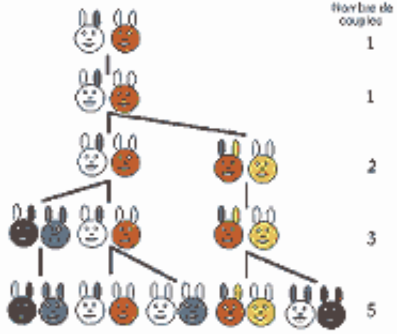
Sequência de Fibonacci

- Famoso problema proposto por Leonardo de Pisa em 1202.
- Objetiva-se determinar o número de pares de coelhos ao final de 12 meses sob as seguintes condições:
  - Inicialmente tem-se um único par de coelhos (um macho e uma fêmea) recém nascidos.
  - Todo mês, cada par de coelhos com mais de 1 mês produz um novo par de coelhos de sexos opostos.
  - Nenhum coelho morre durante esse processo.

Luís Felipe

05/09/23

Exemplo



Luís Felipe
05/09/23

Um pouco mais de detalhes

Mês	Qtd	Obs
1	1	início do mês
2	1	casal do mês 1 não procriou
3	$1+1=2$	1 do mês 2 + 1 novo pra cada do mês 1
4	$2+1=3$	2 do mês 3 + 1 novo pra cada do mês 2
5	$3+2=5$	3 do mês 4 + 1 novo pra cada do mês 3
6	$5+3=8$	5 do mês 5 + 1 novo pra cada do mês 4

Luís Felipe
05/09/23

Definição recursiva

Seja $\{F_n\}$ definida recursivamente da seguinte forma:

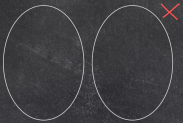
$$\begin{cases} F_0 & = & 1 \\ F_1 & = & 1 \\ F_n & = & F_{n-1} + F_{n-2}, \; n \geq 2 \end{cases}$$

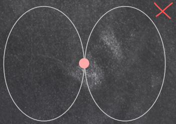
Luís Felipe
05/09/23

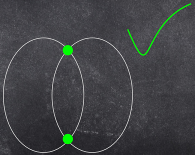
Problema das Ovais

- n ovais desenhadas no plano
- quaisquer duas ovais se interceptam em exatamente 2 pontos
- três ovais não se interceptam em um único ponto

Determine o número de regiões nas quais essas n ovais dividem o plano.



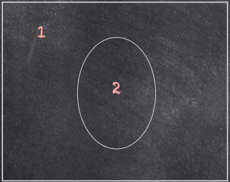


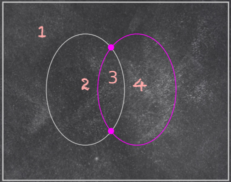


Luís Felipe
05/09/23

Problema das Ovais - Solução

$a_1 = 2$

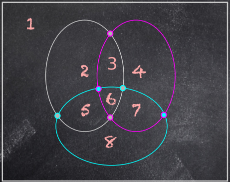


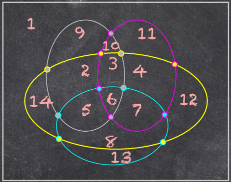


$a_2 = 4$

$a_n = ?$

$a_3 = 8$





$a_4 = 14$

$$a_n = a_{n-1} + 2(n-1);\ a_1 = 2$$

Luís Felipe
05/09/23

Exemplo

Voltando ao exemplo da Torre de Hanoi... Aula 1

Com a estratégia de solução determinada, podemos facilmente escrever a relação de recorrência que soluciona o problema:

$$\begin{cases} T_n = 2T_{n-1} + 1, \; n \geq 2 \\ T_1 = 1 \end{cases}$$

Esse problema foi criado em 1883 pelo matemático francês Edouard Lucas. Originalmente o número de discos era 64.

É muito demorado calcular T_{64} utilizando a relação de recorrência que obtivemos.

Não existiria uma maneira direta para obtermos tal resultado??

Luís Felipe

05/09/23

Aplicação da Indução Matemática

Seja T_n a solução do problema das torres de Hanoi para n discos. Mostre que $T_n = 2^n - 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

BASE: Pela relação de recorrência: $T_1 = 1$. Além disso, $2^1 - 1 = 1$.

HI: Suponha $T_i = 2^i - 1, \forall i \leq k$.

PASSO: Queremos mostrar que $T_{k+1} = 2^{k+1} - 1$.

Pela Relação de Recorrência, temos que: $T_{k+1} = 2T_k + 1$.
Assim, pela HI, temos que:
$T_{k+1} = 2T_k + 1 = 2(2^k - 1) + 1 = 2^{1+k} - 2 + 1 = 2^{k+1} - 1$.

Luís Felipe
05/09/23

Fórmula fechada

Note que para a relação a relação de recorrência $T_n = 2T_{n-1} + 1$, $T_1 = 1$, temos a fórmula fechada: $T_n = 2^n - 1$.

Dada uma fórmula de recorrência qualquer, como obter sua fórmula fechada?

- Substituições regressivas;
- Dedução e verificação;
- Raízes características;
- Funções geradoras.

Substituições regressivas: útil para resolver problemas do tipo $T_n = cT_{n-1} + f(n)$, onde c é constante, $n \geq 1$ e T_1 é dado.

- Torres de Hanoi pode ser resolvido dessa forma. Sequência de Fibonacci não;
- Aplicamos recursivamente a expressão até obter a base. Dessa forma, temos séries aritméticas e geométricas associadas a expressão T_n.

Luís Felipe
05/09/23

Retornando às Torres de Hanoi

Vamos obter a fórmula fechada da relação de recorrência do problema das Torres de Hanoi pelo método das substituições regressivas:

Sabemos que: $T_n = 2T_{n-1} + 1$, $n \geq 2$ e $T_1 = 1$.

$$\begin{aligned} T_n &= 2T_{n-1} + 1 \\ &= 2(2T_{n-2} + 1) + 1 \\ &= 2(2(2T_{n-3} + 1) + 1) + 1 \\ &\vdots \\ &= 2^k T_{n-k} + 2^{k-1} + 2^{k-2} + 2^{k-3} + \cdots + 2^1 + 2^0 \end{aligned}$$

Queremos chegar a base T_1. Queremos saber o valor de k para que $T_{n-k} = T_1$. Ou seja, $n - k = 1$, e assim: $k = n - 1$.

$$T_n = 2^{n-1} T_1 + 2^{(n-1)-1} + 2^{(n-1)-2} + \cdots + 2^1 + 2^0$$

Como $T_1 = 1$, então: $T_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^0 = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i$

$T_n = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = \frac{1(2^n - 1)}{2-1}$ (soma de PG finita). $T_n = 2^n - 1$.

Luís Felipe
05/09/23

$$T_n = T_1 + 2\left[(n-(n-1)) + (n-(n-1-1)) + \dots + (n-1)\right]$$

$$= T_1 + 2\left[1 + 2 + \dots + (n-1)\right] \quad , \quad T_1 = 2$$

$$= 2 + 2\left[\underbrace{1 + 2 + \dots + (n-1)}\right]$$

$$2 + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} = 2 - n(n-1)$$

Exercício: Determine a fórmula fechada do problema das Ovais.

$$T_n = T_{n-1} + 2(n-1) = T_{n-2} + 2(n-2) + 2(n-1) =$$

$$= T_{n-3} + 2(n-3) + 2(n-2) + 2(n-1)$$

$$\vdots$$

$$= T_{n-k} + 2(n-k) + 2(n-(k-1)) + \dots + 2(n-1)$$

$$= T_{n-k} + 2\left[(n-k) + (n-(k-1)) + \dots + (n-1)\right]$$

$$n-k = 1 \rightarrow \boxed{k = n-1}$$