# Aula 19 - Algoritmos de Las Vegas

Luís Felipe

UFF

30 de Novembro de 2023

Luís Felipe
30/11/23

# Las Vegas

- Sempre dão a resposta certa
- O tempo computacional de um algoritmo de Las Vegas é uma variável aleatória
  - como tal, está completamente definido por seu conjunto de momentos
  - o tempo computacional de um algoritmo de Las Vegas é avaliado em termos de seu valor esperado, e talvez variância, desvio padrão, etc.

Luís Felipe
30/11/23

# Exemplo:

1. Busca de elemento em lista com repetições
   - Desejamos localizar um algarismo qualquer (digamos, o 9) numa lista de tamanho $n$
   - A lista contém todos os algarismos de 0 a 9 distribuídos em iguais quantidades
     - isto é, 1/10 de suas posições apresentam o algarismo 0, 1/10 de suas posições apresentam o algarismo 1 e assim por diante.
   - Nada se sabe sobre a localização dos elementos.

Luís Felipe
30/11/23

# Soluções: Estratégias determinísticas

1. Examine uma a uma todas as posições da lista, a partir da primeira, até encontrar o primeiro 9;
2. Examine uma a uma todas as posições da lista, a partir da última e caminhando de trás para diante, até encontrar o primeiro 9;
3. Examine primeiro todas as posições ímpares da lista, isto é, a primeira, depois a terceira, quinta etc. Depois (se nenhum 9 tiver ainda sido encontrado, evidentemente) venha voltando pelas posições pares de trás para diante;
4. Divida a lista em $k$ sublistas de tamanho $n/k$ cada: os primeiros $n/k$ elementos irão para a primeira sublista, os $n/k$ elementos seguintes irão para a segunda sublista e assim por diante. Examine agora o primeiro elemento de cada sublista, em seguida o segundo elemento de cada sublista, em seguida o terceiro etc. até encontrar um 9.

Luís Felipe
30/11/23

# Conseguimos entradas desfavoráveis?

- Qualquer que seja a estratégia adotada, sempre há entradas que exigirão do algoritmo um tempo "ruim" (linear no tamanho da entrada, neste exemplo).
  - O algoritmo determinístico pode ser constantemente levado a ter um desempenho lento;
  - Depende da aplicação e da distribuição das instâncias de entrada, por força de algum agente externo, malicioso ou não, ou ainda que intermitentemente.

Luís Felipe
30/11/23

# Solução: Estratégia randomizada

1. Escolha, aleatória e uniformemente, uma posição qualquer, das $n$ possíveis. Verifique-a. Repita até encontrar um 9.

OBS.: Esta estratégia irá encontrar o 9. Porém, como saber o número de verificações até encontrar o primeiro 9?

Luís Felipe
30/11/23

# Recordar é viver... Variável Aleatória

- Uma variável aleatória $X$ é uma função que leva um espaço amostral $\Omega$ no conjunto dos números reais.
- $P(X = x)$ denota a probabilidade de que o resultado $r$ do experimento aleatório seja tal que $X(r) = x$.

  Exemplo: Seja $Y$ : número de coroas obtidas após lançar uma moeda 6 vezes. Suponha $K$ cara e $C$ coroa. Assim, para $P(Y \leq 1)$ temos os casos "$KKKKKK$", "$CKKKKK$", "$KCKKKK$", "$KKCKKK$", "$KKKCKK$","$KKKKCK$","$KKKKKC$"
  Daí, $P(Y \leq 1) = \dfrac{7}{64}$
- Se temos variáveis ale.atórias independentes:
  $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$ ou
  $P(X = x|Y = y) = P(X = x)$
- $P(X = x) = p_X(x)$ é dita a a função densidade de probabilidade da variável aleatória $X$.

Luís Felipe
30/11/23

# Recordar é viver... Esperança

- A esperança de uma variável aleatória $X$, $E(X)$, é, intuitivamente a média dos possíveis valores de $X$ ponderado pela frequência com que $X$ os assume.
- $E(X) = \sum_x p_X(x)x$

Obs.: Esperança é o mesmo que média ou valor esperado.

Exemplo: Considere a seguinte distribuição de notas numa sala: 3 alunos tiraram 80, 4 alunos tiraram 70 e 7 alunos tiraram 60. Qual o valor esperado das notas?

$E(X) = \frac{3}{14}80 + \frac{4}{14}70 + \frac{7}{14}60 = 67,14$

Luís Felipe
30/11/23

# Recordar é viver... Linearidade da Esperança

$E(h(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = h(E(X_1), E(X_2), \ldots, E(X_n))$, para toda função linear $h$.

Exemplo: Qual o valor esperado para $Y$ no exemplo das moedas?
$Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_6$, onde $Y_i$ representa o número de coroas obtidas no $i$-ésimo lançamento.
$E(Y) = E(\sum_{i=1}^{6} Y_i) = \sum_{i=1}^{6} E(Y_i) = 6 \times \frac{1}{2} = 3$

Luís Felipe
30/11/23

# Recordar é viver... V.a. de Bernoulli

- A v.a. de Bernoulli é comumente usada como indicador de sucesso ou fracasso
- Sendo $p$ a probabilidade de sucesso, temos a seguinte densidade de probabilidade:

$$p_X(x) = \begin{cases} 1-p, & x=0 \\ p, & x=1 \\ 0, \text{c.c} & \end{cases}$$

- A esperança de uma v.a. de Bernoulli é $p$, pois:

$$E(X) = \sum_x p_X(x)x = 0(1-p) + 1p = p$$

Luís Felipe
30/11/23

# Recordar é viver... V.a. Binomial

- A v.a. binomial aparece quando deseja-se indicar o total de sucessos após $n$ experimentos randômicos idênticos
- Pode ser entendida como a soma de $n$ indicadores de Bernoulli independentes e todos com a mesma probabilidade de sucesso $p$.
- $B(n, p)$ é a v.a. binomial onde $n$ é o número de repetições do experimento e $p$ a probabilidade de sucesso.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \cdots, n$$

Por conta da linearidade da esperança, temos:
$E(X) = E(X = 1) + E(X = 2) + \cdots + E(X = n) = p + p + \cdots + p = np.$

Exemplo: O número total de coroas após o lançamento de uma moeda por 8 vezes é uma variável binomial.
Seja $X$ sair coroa e $X = 0, 1, 2, \cdots, 8$:

$$P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = 8) =$$
$$\binom{8}{0}[\tfrac{1}{2}]^0[\tfrac{1}{2}]^8 + \binom{8}{1}[\tfrac{1}{2}]^1[\tfrac{1}{2}]^7 + \binom{8}{2}[\tfrac{1}{2}]^2[\tfrac{1}{2}]^6 + \cdots + \binom{8}{8}[\tfrac{1}{2}]^8[\tfrac{1}{2}]^0.$$

Luís Felipe
30/11/23

## Recordar é viver... V.a. geométrica

- A v.a. de geométrica indica o número de repetições até o primeiro sucesso.

  Exemplo: Quantos lançamentos para ter uma coroa?
- A densidade de uma v.a geométrica com probabilidade de sucesso $p$ é dada por:

$$p_X(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1}, & x = 1, 2, 3 \dots \\ 0, \text{c.c} \end{cases}$$

- A esperança do número de tentativas até o primeiro sucesso, incluindo o primeiro sucesso, é $E(X) = \frac{1}{p}$.
  - Na primeira jogada $x = 1$ e acertamos com probabilidade $p$, ou erramos com probabilidade $(1-p)$ e a número médio é o mesmo do original até o sucesso.
    $E(X) = p1 + (1-p)(1 + E(X)) = \frac{1}{p}$.
- A esperança do número de tentativas número médio de falhas antes do primeiro sucesso é $E(Y) = \frac{1-p}{p}$.
  - Esperança do acerto menos 1 jogada, pois queremos a esperança antes do sucesso. $E(Y) = E(X) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}$.

Luís Felipe
30/11/23

# Voltando ao exemplo da busca do elemento 9

- Em nosso exemplo de busca, o número de verificações até que o primeiro 9 seja encontrado é uma v.a. geométrica, cuja esperança é dada por $\frac{1}{p}$, onde $p$ é a probabilidade de sucesso.

- Como a probabilidade de se encontrar um algarismo é $\frac{1}{10}$, temos que o valor esperado para o número de verificações do algoritmo é 10, independentemente do tamanho da entrada.

- Observe que se a intenção fosse obter o número médio de tentativas de falhas antes do primeiro sucesso, então o valor seria $\frac{1-0{,}1}{0{,}1} = 9$, independentemente do tamanho da entrada.

Luís Felipe
30/11/23

# Quicksort Randomizado

<u>Entrada</u>: S: Conjunto de elementos comparáveis

<u>Saída</u>: Os elementos de S em ordem crescente

quickSort(S):

Se |S| < 2, retorna S

Tome x, o primeiro elemento de S, como pivô

Cria duas listas $S_1$ e $S_2$ inicialmente vazios

Para cada elemento y de S:

Se y < x, coloque y em $S_1$

Se y > x, coloque y em $S_2$

retorna quickSort($S_1$), x, quickSort($S_2$)

Luís Felipe
30/11/23

# Quicksort Randomizado

- Ao invés de escolher o pivô deterministicamente, o pivô é escolhido aleatoriamente.
- O Quicksort tem complexidade de pior caso $O(n^2)$
- Qual a complexidade do Quicksort Randomizado?
  - Vamos determinar o valor esperado para a quantidade de comparações de elementos $y_j, y_k$
  - Que tipo de variável aleatória temos nesse caso?
  - $X_{j,k} \begin{cases} 1, & \text{se} y_j, y_k \text{são comparados} \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$
  - V.a. Bernoulli
  - $X = X_{1,2} + X_{1,3} + \ldots + X_{n-1,n}$
  - $E(X) = E(X_{1,2} + X_{1,3} + \ldots + X_{n-1,n}) = \underbrace{E(X_{1,2}) + E(X_{1,3}) + \ldots + E(X_{n-1,n})}_{\text{linearidade da esperança}}$

Luís Felipe
30/11/23

# E agora?

Seja $S' = y_1, y_2, \cdots, y_n$ a saída ordenada.

- $E(X_{j,k}) = \underbrace{P\{\text{sucesso}\}}_{\text{v.a.Bernoulli}} = P(X_{j,k} = 1) = ?$
  - Quando dois elementos são comparados?
  - Isso ocorre no máximo uma vez, quando um deles é pivô
  - Isso acontece quando $y_j$ ou $y_k$, $j < k$, seja o elemento mais à esquerda em $S$, dentre os elementos do conjunto $\{y_j, y_{j+1}, \cdots, y_k\}$
- Assim, $P(X_{j,k} = 1) = \dfrac{2}{k - j + 1}$
- $E(X) = \sum_{1 \leq j < k \leq n} E(X_{j,k}) = \sum_{1 \leq j < k \leq n} \dfrac{2}{k - j + 1} = ?$

Luís Felipe

30/11/23

# (E agora?)$^2$

$$
\begin{aligned}
\sum_{1 \le j < k \le n} \frac{2}{k-j+1} \quad = \quad & \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \ldots + \frac{2}{n-2} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} \\
& + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \ldots + \frac{2}{n-2} + \frac{2}{n-1} \\
& + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \ldots + \frac{2}{n-2} \\
& + \quad \vdots \\
& + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} \\
& + \frac{2}{2}
\end{aligned}
$$

Luís Felipe
30/11/23

# (E agora?)$^3$

$$\begin{aligned} E(X) &= \textstyle\sum_{k=2}^{n}(n-k+1)\dfrac{2}{k} \\ &= (n+1)\textstyle\sum_{k=2}^{n}\frac{2}{k} - 2(n-1) \\ &= O(n\log n) \end{aligned}$$

Portanto, Quicksort randomizado executa $O(n \log n)$ comparações.

OBS.: Complexidade de Caso Médio do Quicksort : $O(n \log n)$

Luís Felipe
30/11/23

# Dá pra transformar:

- Las Vegas em Monte Carlo?
  - ▶ Sim. Basta fixar um tempo limite de execução. Após este limite, responda NÃO ou SIM.

- Monte Carlo em Las Vegas?
  - ▶ Garantidamente, se existirem 2 Monte-Carlo
  - ▶ 1 baseado-no-SIM e 1 baseado-no-NÃO.

# Outros caminhos:

- Métodos probabilísticos: técnica para garantir a existência de uma certa propriedade.

- Em alguns casos, podemos obter algoritmos determinísticos pela de-randomização de algoritmos. Corretude pelo método probabilístico.