Aula 17 - Reduções polinomiais

Luís Felipe

UFF

25 de Outubro de 2023

Luís Felipe
25/10/23

O problema do Caixeiro Viajante

CAIXEIRO VIAJANTE

Dados: Conjunto de cidades $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, inteiro k e custo $c(c_i, c_j)$ para cada par c_i, c_j de C.
Questão: C admite um percurso que passe por cada uma das cidades sem repetição, exceto a cidade inicial pois devemos concluir onde começamos, de custo $\leq k$?

O custo total do percurso caixeiro viajante é dado por:
$\sum_{i=1}^{n-1} c(c_{p_i}, c_{p_{i+1}}) + c(c_{p_n}, c_{p_1})$, onde $c_{p_1}, c_{p_2}, \dots, c_{p_n}$ é um percurso caixeiro viajante, isto é, uma permutação das cidades de C.

Vamos mostrar que CAIXEIRO VIAJANTE é $\mathcal{NP}$-completo a partir do problema $\mathcal{NP}$-completo CICLO HAMILTONIANO (HC).

Luís Felipe

25/10/23

Teorema. CAIXEIRO VIAJANTE é $\mathcal{NP}$-completo.

Prova: CAIXEIRO VIAJANTE está em $\mathcal{NP}$. Seja G uma entrada genérica do HC. Vamos construir uma instância particular do CAIXEIRO VIAJANTE da seguinte forma:

- Cidades: Cada vértice de G é uma cidade.
- Custos: Se $v_i v_j \in E(G)$, então $c(c_i, c_j) = 0$.
  Caso contrário, $c(c_i, c_j) = 1$
- k: 0

Resta mostrar que G tem ciclo hamiltoniano sse existe percurso caixeiro viajante em C com custo 0.

Luís Felipe
25/10/23

($\rightarrow$) Se G tem ciclo hamitoniano, então existe um percurso caixeiro viajante que, por construção, tem custo total 0.

($\leftarrow$) Se existe um percurso caixeiro viajante com custo total 0, então temos uma permutação das cidades de C de modo que, neste permutação, cidades consecutivas são vértices adjacentes de G, por construção. Além disso, também existe aresta entre os vértices correspondentes a c_{p_n} e c_{p_1}. Logo, existe um ciclo hamiltoniano em G. $\square$

Luís Felipe

25/10/23

Reduções para problemas polinomiais

- Até o momento vimos algumas reduções polinomiais e utilizamos deste recurso para provar a $\mathcal{NP}$-completude de alguns problemas.
  - $Y \propto X$ onde Y é $\mathcal{NP}$-completo e X será mostrado $\mathcal{NP}$-completo
- Podemos, entretanto, utilizar reduções polinomiais para mostrar que um problema é solucionável em tempo polinomial.
  - $X \propto Y$ onde X é o problema que queremos mostrar ser polinomial e Y é o problema solucionável em tempo polinomial.

Luís Felipe
25/10/23

2-coloração versus 2-SAT

- 2-coloração é um problema solucionável em tempo polinomial.
  - Um grafo é 2-colorível sse é bipartido.

- Contudo, vamos mostrar que 2-col é polinomial fazendo uma redução de 2-col para 2-SAT.

Luís Felipe

25/10/23

2-coloração $\propto$ 2-SAT

Teorema. 2-col é solucionável em tempo polinomial.

Prova: Seja G uma instância genérica do 2-col. Vamos construir uma instância particular do 2-SAT da seguinte forma:

- Variáveis: Cada vértice v gera uma variável x_v
- Cláusulas: Se $vw \in E$, então temos a conjunção de duas cláusulas: $(x_v \vee x_w), (\overline{x_v} \vee \overline{x_w})$. Isto faz com que $x_v = \overline{x_w}$.

Resta mostrar que G é 2-col sse (X, C) é satisfazível.

Luís Felipe
25/10/23

($\rightarrow$) Vamos exibir uma atribuição para as variáveis de X baseada na 2-coloração de G. Se o vértice recebeu cor 1 então a variável recebe verdadeiro, caso contrário, recebe falso. Neste caso, por construção, cada cláusula tem um literal verdadeiro e um falso, sendo, portanto, satisfeita.

($\leftarrow$) Vamos 2-colorir G a partir da atribuição que satisfaz (X, C). Se a variável $x_v : V$, então v recebe cor 1. Caso contrário, recebe cor 2. Note que todos os vértices de G foram coloridos e, como vértices adjacentes estão associados a variáveis que têm valor lógico opostos, quando (X, C) é satisfazível, então vértices adjacentes recebem cores distintas. Logo, G é 2-colorível. $\square$

Luís Felipe

25/10/23

MAXSAT

- *MAXSAT*: Variante de SAT
- Quer-se determinar se existe uma atribuição às variáveis que satisfaça pelo menos k cláusulas de C.
- Especificamente, vamos mostrar que MAX 2-SAT é $\mathcal{NP}$-completo através de uma redução polinomial a partir do problema CLIQUE.

Luís Felipe
25/10/23

MAX 2-SAT

MAX 2-SAT

Dados: (X, C), onde: $|X| = p$ e cada cláusula tem exatamente 2 literais, e um inteiro k, $1 \leq k < p$.
Questão: Existe uma atribuição às variáveis de X que satisfaça pelo menos k cláusulas de C simultaneamente?

OBS.: 2 SAT é poli. Observe que se $k = p$ o problema seria solucionável em tempo polinomial.

Luís Felipe
25/10/23

MAX 2-SAT

Teorema. MAX 2-SAT é $\mathcal{NP}$-completo.

Prova: MAX 2 -SAT está em $\mathcal{NP}$. Considerando uma instância genérica do problema CLIQUE, vamos construir uma instância particular para o problema MAX 2-SAT da seguinte forma:

- Variáveis:
  - uma variável auxiliar z
  - para cada vértice v_i, uma variável x_i
- Cláusulas:
  - $(x_i \vee z), (x_i \vee \overline{z})$
  - para cada não aresta $v_i v_j$, a cláusula $(\overline{x_i} \vee \overline{x_j})$
- $k' : |V| + |K| + |\overline{E}|$, onde K é a clique de tamanho pelo menos k do problema CLIQUE, e $\overline{E}$ é o conjunto de não arestas de G

Existe clique de tamanho pelo menos k sse existe uma atribuição que satisfaça pelo menos k' cláusulas de (X, C).

$(\rightarrow)$ A partir da clique K, vamos determinar uma atribuição para as variáveis de X:

Se a variável corresponde a um vértice em K, então ela recebe verdadeiro. Caso contrário, falso.

Faça a variável z verdadeira.

Vamos mostrar que pelo menos $|V| + |K| + |\overline{E}|$ cláusulas são satisfeitas.

De fato, com esta atribuição, satisfazemos $|V|$ cláusulas pois as cláusulas $(x_i \vee z)$ são satisfeitas (z recebeu verdadeiro); satisfazemos $|K|$ cláusulas, pois as cláusulas $(x_i \vee \overline{z})$ são satisfeitas (x_i recebeu verdadeiro); e $|\overline{E}|$ cláusulas, pois as cláusulas $(\overline{x_i} \vee \overline{x_j})$ são satisfeitas em casos de não arestas. Pois, não arestas $x_i x_j$ são dos seguintes tipos:

i) vértice na clique (v_i) com vértice fora da clique (v_j). Neste caso, $x_i = V$ e $x_j = F$ e assim $(\overline{x_i} \vee \overline{x_j}) = V$;
ii) vértice fora da clique (v_i) com vértice fora da clique (v_j). Neste caso, $x_i = F$ e $x_j = F$ e assim $(\overline{x_i} \vee \overline{x_j}) = V$.

Luís Felipe 25/10/23

($\leftarrow$) Exibamos clique de tamanho $\geq k$ com base na atribuição que satisfaz pelo menos $k' = |V| + k + |\overline{E}|$ cláusulas de (X, C).

Façamos K como o conjunto dos vértices v_i cujas variáveis associadas x_i receberam V.

Se K for uma clique, então alcançamos o objetivo e $|K| \geq k$. Se K não for clique, existe um par $v_i v_j$ de não arestas em K cujos valores de x_i e x_j foram V.

Faça $x_i : F$, neste caso. Note que continuamos satisfazendo uma cláusula dentre $(x_i \vee z), (x_i \vee \overline{z})$, mas perdemos uma cláusula.

Entretanto, observe que passamos a satisfazer a cláusula $(\overline{x_i} \vee \overline{x_j})$. Logo, empatamos no total de cláusulas satisfeitas.

Outras cláusulas envolvendo $\overline{x_i}$ (v_i participando de não-aresta), também passam a ser satisfeitas, e, pelo mesmo argumento, o número de cláusulas que satisfazemos é pelo menos igual ao anterior.

Esse processo se repete até que não tenhamos não arestas em K. Logo, K é clique. Note que $|K| \geq k$ pelo conjunto K tomado inicial de tamanho $\geq k$ e as substituições não diminuírem o número de cláusulas satisfeitas. $\square$