Aula 14 - Reduções polinomiais

Luís Felipe

UFF

26 de Outubro de 2023

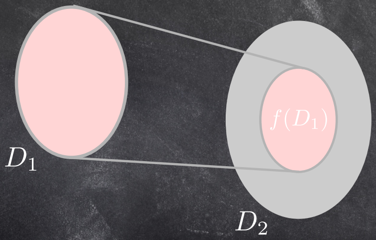
Luís Felipe

26/10/23

Transformações entre problemas

- Um problema $\Pi_1(D_1, Q_1)$ se transforma em outro problema $\Pi_2(D_2, Q_2)$ quando existe uma função $f : D_1 \to D_2$ que satisfaça:

  Para cada instância $I_1 \in D_1$, I_1 possui resposta SIM (NÃO) em $\Pi_1 \leftrightarrow f(I_1)$ possui resposta SIM (NÃO) em Π_2.
- Em outras palavras, se sabe-se resolver Π_2 então resolve-se Π_1.



Luís Felipe

26/10/23

Transformações polinomiais

- Se a função f for computável em tempo polinomial no tamanho de D_1, então a transformação é dita polinomial.

$I_1 \in D_1$ → $f(I_1) \in D_2$ → Solução de Π_2 → Solução de Π_1

- Se for conhecido um algoritmo para Π_2, então a transformação polinomial conduz a um algoritmo polinomial para resolver Π_1.

- Se Π_1 for polinomialmente transformável em Π_2, usamos a notação $\Pi_1 \propto \Pi_2$.

- Em outras palavras, se $\Pi_1 \propto \Pi_2$, então uma entrada arbitrária do problema Π_1 pode ser resolvida usando um número polinomial de passos na transformação mais um número polinomial de chamadas ao algoritmo que resolva o problema Π_2.

Luís Felipe
26/10/23

Problemas $\mathcal{NP}$-completos

Um problema Π é $\mathcal{NP}$-completo quando:

1. $\Pi \in \mathcal{NP}$, e
2. $\Pi' \propto \Pi, \forall\ \Pi' \in \mathcal{NP}$

- Se um problema Π satisfaz 2., então Π é $\mathcal{NP}$-difícil.

OBS.: Problemas Co-$\mathcal{NP}$-completos definem-se de maneira similar (Cook 1971).

Luís Felipe
26/10/23

Reduções de $\mathcal{NP}$-completude

Como mostrar que um problema é $\mathcal{NP}$-completo?

Lema. Sejam Π_1, Π_2 problemas tais que $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{NP}$. Então, se Π_1 é $\mathcal{NP}$-completo e $\Pi_1 \propto \Pi_2$, então Π_2 é $\mathcal{NP}$-completo.

Prova: Π_1 é $\mathcal{NP}$-completo, então $\Pi' \propto \Pi_1, \forall\ \Pi' \in \mathcal{NP}$. Como $\Pi_1 \propto \Pi_2$, por transitividade, $\Pi' \propto \Pi_2$. Logo, Π_2 é $\mathcal{NP}$-completo. $\square$

Luís Felipe
26/10/23

Como elaborar uma $\mathcal{NP}$-completude??

Para provar que um problema Π é $\mathcal{NP}$-completo, fazemos:

1. Mostramos que $\Pi \in \mathcal{NP}$
2. Escolhemos um problema Π' que seja $\mathcal{NP}$-completo e mostramos que $\Pi' \propto \Pi$

Luís Felipe
26/10/23

Conjunto independente $\times$ Cobertura por vértices

- Vocês já viram que, dado um grafo G, S é um conjunto independente sse $V \setminus S$ é uma cobertura por vértices.
- Vamos mostrar que Conjunto independente (IS) $\propto$ Cobertura por vértices (VC). Como?

Luís Felipe
26/10/23

IS $\times$ VC

Teorema. IS $\propto$ VC

Prova: Seja G, k uma entrada genérica de IS. Vamos construir uma instância particular G', k' para VC da seguinte forma:

- $G' = G$
- $k' = |V| \setminus k$.

Resta mostrar que:

$$\boxed{G \text{ tem IS} \geq k \leftrightarrow \ G' \text{ tem VC} \leq k'.}$$

Observe que a prova desta proposição segue do teorema que visto anteriormente. $\square$

Luís Felipe

26/10/23

VC $\times$ IS

Teorema. VC $\propto$ IS

Luís Felipe
26/10/23

Cobertura de Conjuntos

COBERTURA DE CONJUNTOS (SC)

Dados: Conjunto $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ e coleção de subconjuntos de U $S_1, S_2, \ldots, S_n$, inteiro k.
Questão: Existe uma coleção de no máximo k subconjuntos cuja união seja U?

Luís Felipe

26/10/23

Cobertura por vértices $\propto$ Cobertura de Conjuntos

Teorema. VC $\propto$ SC

Prova: Seja G, k uma instância genérica de VC. Vamos construir uma instância particular U', C', k' para SC, onde C' é uma coleção de subconjuntos S_i de U' da seguinte forma:

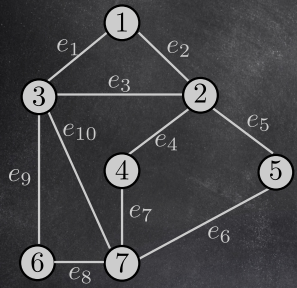
- $U' = E(G)$
- $S_i = \{e \in E \mid e$ é incidente ao vértice $i\} \subseteq C'$
- $k' = k$

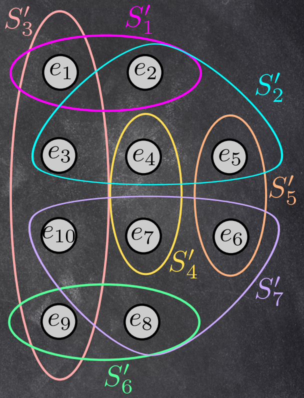
$$\boxed{G \text{ admite VC} \leq k \leftrightarrow U' \text{ admite SC em } C' \leq k'.}$$

Luís Felipe

26/10/23

Exemplo:





Luís Felipe
26/10/23

Empacotamento de Conjuntos

EMPACOTAMENTO DE CONJUNTOS (SP)

Dados: Conjunto $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ e coleção de subconjuntos de U $S_1, S_2, \ldots, S_n$, inteiro k.
Questão: Existe uma coleção de no mínimo k subconjuntos dois a dois disjuntos?

Luís Felipe
26/10/23

IS $\propto$ SP

Teorema. IS $\propto$ SP

Luís Felipe
26/10/23

3SAT $\propto$ IS

Ideia da prova: A partir de (X, C) tal que $|C| = m$, uma entrada genérica para 3SAT, vamos construir uma entrada particular (G', k') para IS da seguinte forma:

- para cada cláusula c_j três vértices v_{j1}, v_{j2}, v_{j3} mutuamente adjacentes
- para cada par de vértices correspondentes a um literal positivo e um literal negativo de uma mesma variável, uma aresta.
- $k' = m$

Exemplo: (X, C) $(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_4)$

Luís Felipe

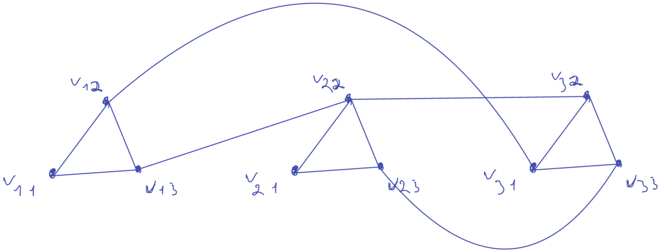
26/10/23

1 2 3

$$c_1 = (x_1 \lor \overline{x_2} \lor x_3)$$

$$c_2 = (x_1 \lor \overline{x_3} \lor \overline{x_4})$$

$$c_3 = (x_2 \lor x_3 \lor x_4)$$



Luís Felipe
26/10/23

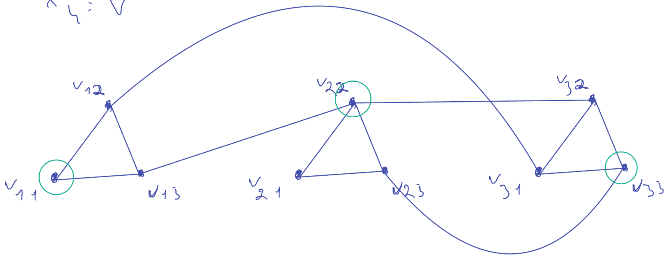
$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)\ (x_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)\ (x_2 \vee x_3 \vee x_4)$

x_1 : V

x_2 : F

x_3 : F

x_4 : V



Luís Felipe
26/10/23

3SAT $\propto$ IS - continuação

Ideia da prova: Resta mostrar que:

$\boxed{(X, C) \text{ é satisfatível} \leftrightarrow G' \text{ tem IS} \geq k'}$

$(\rightarrow)$ Se (X, C) é satisfazível, vamos construir S da seguinte maneira: De cada triângulo, vamos selecionar para S um vértice correspondente a um literal V. Note que $|S| \geq m$ e S é conjunto independente (ARGUMENTE!)

$(\leftarrow)$ Suponha que G' admita um conjunto independente S tal que $|S| \geq k' = m$. Note que S contém exatamente um vértice de cada triângulo e, além disso, S não contém dois vértices correspondentes a literais positivo e negativo de uma mesma variável. Vamos definir uma atribuição às variáveis de X da seguinte forma: Atribua valor V aos literais cujos vértices correspondentes estão em S e valor F às outras variáveis. Observe que a atribuição é bem definida e que satisfaz cada cláusula. (ARGUMENTE!) $\square$

Luís Felipe
26/10/23

OBS.: $3SAT \propto IS \propto VC \propto SC$

Exercícios:

1. $3SAT \propto VC$
2. $3SAT \propto CLIQUE$