# Aula 13 - Tratabilidade (Parte II)

Luís Felipe

UFF

24 de Outubro de 2023

Luís Felipe
24/10/23

# Mais problemas de decisão

SATISFATIBILIDADE (Satisfiability)

- Sejam $x_1, \ldots, x_k$ variáveis booleanas (0 ou 1).
- Uma conjunção de variáveis booleanas é uma expressão da forma $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_k$.
- Uma disjunção é uma expressão na forma $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_k$.
- Uma expressão booleana na forma normal conjuntiva (FNC) é uma conjunção de disjunções.

Exemplo: $B = \underbrace{(x_1 \vee x_2 \vee x_3)}_{\text{cláusula}} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee x_2)}_{\text{cláusula}} \wedge \underbrace{(\overline{x_3} \vee \overline{x_2})}_{\text{cláusula}}$

- Cada disjunção de uma expressão é denominada cláusula
- Numa FNC, $x_i$ e $\overline{x_i}$ são denominados literais (positivo e negativo, respectivamente) da variável $x_i$

Luís Felipe

24/10/23

# Satisfatibilidade

Uma expressão B é satisfazível se existir uma atribuição (V ou F) às variáveis que torne a expressão B verdadeira.

Exercício: Determine uma atribuição para as variáveis de B de modo que B seja satisfazível.

Exemplo: $x_1 = V, x_2 = V, x_3 = F$ torna B satisfazível.

Luís Felipe
24/10/23

SATISFATIBILIDADE (SAT)

Dados: Expressão booleana B na FNC
Questão: B é satisfazível?

- SAT $\in \mathcal{NP}$?
  - Certificado para o SIM: atribuição para as variáveis de B
  - Algoritmo de Validação: Verifica se B é satisfazível com tal atribuição.

Luís Felipe
24/10/23

# Outros problemas em $\mathcal{NP}$

- Exemplos que vimos na aula passada: Conjunto Independente, Cobertura por Vértices, Grafos Eulerianos, Caminho Mínimo.

CLIQUE

Dados: Grafo $G$, inteiro $k$
Questão: Existe clique em $G$ de tamanho $\geq k$?

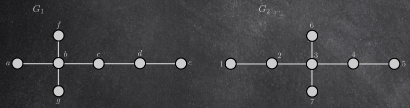
- CLIQUE $\in \mathcal{NP}$?
  - Certificado para o SIM: subconjunto de vértices
  - Algoritmo de Validação: Verifica se o subconjunto induz uma clique e se tem tamanho $\geq k$.

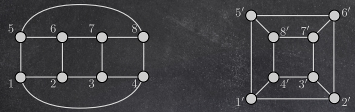
Luís Felipe
24/10/23

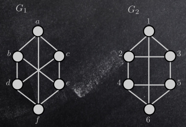
# Isomorfismo

Dois grafos $G_1$ e $G_2$ são isomorfos quando existir uma função bijetiva $f : V(G_1) \to V(G_2)$ tal que $\forall v, v' \in V(G_1)$, $vv' \in E(G_1)$ sse $f(v)f(v') \in E(G_2)$.

Exemplo: Determine se os grafos a seguir são isomorfos

1. 


2. 


3. 

Luís Felipe
24/10/23

# Outros Problemas em $\mathcal{NP}$

**ISOMORFISMO DE SUBGRAFOS**

**Dados:** Grafos $G$ e $H$

**Questão:** $G$ contém subgrafo isomorfo a $H$?

- ISOMORFISMO $\in \mathcal{NP}$?
  - Certificado para o SIM: função $f$
  - Algoritmo de Validação: Verifica se $f$ é bijetiva de $V(G_1)$ em $V(G_2)$ e se preserva as adjacências.
- ISOMORFISMO DE SUBGRAFOS $\in \mathcal{NP}$?
  - Certificado para o SIM: subconjunto $V_1$ de vértices de $G$ e $f$
  - Algoritmo de Validação: Verifica se $G[V_1]$ é isomorfo a $H$ utilizando a função $f$.

Luís Felipe
24/10/23

# Outros Problemas em $\mathcal{NP}$

CICLO HAMILTONIANO

Dados: Grafos $G$
Questão: $G$ é hamiltoniano?

- CICLO HAMILTONIANO $\in \mathcal{NP}$?
  - Certificado para o SIM: sequência ordenada de vértices
  - Algoritmo de Validação: Verifica se a sequência é um ciclo hamiltoniano

Luís Felipe
24/10/23

# Outros Problemas em $\mathcal{NP}$

COLORAÇÃO DE VÉRTICES

Dados: Grafo $G$, inteiro $k$

Questão: $G$ possui uma coloração própria com no máximo $k$ cores?

- COLORAÇÃO DE VÉRTICES $\in \mathcal{NP}$?
  - Certificado para o SIM: a função que associa vértices e cores
  - Algoritmo de Validação: Verifica se a coloração é própria e se usa no máximo $k$ cores

Luís Felipe
24/10/23

# Variantes de SAT

<u>2SAT</u>

Dados: Expressão booleana $B$ onde cada cláusula tem exatamente 2 literais na FNC.
Questão: B é satisfazível?

2SAT está em $\mathcal{NP}$? SIM!!

2SAT está em $\mathcal{P}$? SIM!!

- Como poderíamos resolver 2SAT?
- Considere uma instância $(C, U)$ para 2SAT, onde $C$ é o conjunto de cláusulas e $U$ o conjunto de variáveis.

Luís Felipe
24/10/23

# ( Duas equivalências lógicas )

- Como podemos escrever $a \vee b$ de maneira equivalente?
  - $\neg a \to b$
- Como escrever equivalentemente $\neg a \to b$?
  - $\neg b \to a$
- Como no problema SAT a fórmula está na FNC, podemos reescrever disjunções $(a \vee b)$ como $(\neg a \to b) \wedge (\neg b \to a)$.
- Observe que, desta forma, forçamos que cada cláusula tenha pelo menos um literal verdadeiro.
- A expressão reescrita desta forma está na forma normal implicativa.

Luís Felipe
24/10/23

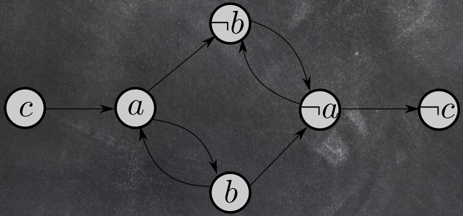
# Voltando à solução do 2SAT

- Uma vez que a expressão esteja na forma normal implicativa, vamos construir um grafo direcionado associado.
- As implicações determinam as arestas direcionadas do grafo.
- Para cada variável $u \in U$ aparecem os vértices $u$ e $\neg u$.

Luís Felipe
24/10/23

**Exemplo:** $(a \lor \neg b) \land (\neg a \lor b) \land (\neg a \lor \neg b) \land (a \lor \neg c)$

- $(a \lor \neg b) : (\neg a \to \neg b) \land (b \to a)$
- $(\neg a \lor b) : (a \to b) \land (\neg b \to \neg a)$
- $(\neg a \lor \neg b) : (a \to \neg b) \land (b \to \neg a)$
- $(a \lor \neg c) : (\neg a \to \neg c) \land (c \to a)$




**OBS.:** Note que, se existe a aresta $a \to b$, então existe uma aresta $\neg b \to \neg a$.

Luís Felipe

24/10/23

# 2SAT : ideia chave

- Note que, se $u$ é alcançável a partir de $\neg u$ e vice-versa, não existe atribuição que satisfaça tal instância.
  - Qualquer que seja o valor atribuído a $u$, $\neg u$ deve receber o mesmo valor neste caso. Absurdo.
- Esta condição é também suficiente.
  - Ou seja, uma instância $(C, U)$ do 2SAT é satisfazível sse $u$ não é alcançável a partir de $\neg u$ ou $\neg u$ não é alcançável a partir de $u$ no grafo de implicações.

Luís Felipe

24/10/23

Assume que há caminho de $\neg a$ para $a$:

$$\neg a \longrightarrow \neg b \longrightarrow c \longrightarrow a$$

$(b \vee c)$ $\quad$ $(\neg c \vee a)$

$$\neg a \longrightarrow \neg b \longrightarrow c \longrightarrow a$$

: 2-SAT $(a \vee \neg b) \wedge (b \vee c) \wedge (\neg c \vee a)$

$(a \vee \neg b)$

Pela transitividade: Como $(\neg a \to \neg b) \wedge (\neg b \to c)$, então $(\neg a \to c)$

$$\boxed{((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)}$$

Assim, como $(\neg a \to c) \wedge (c \to a)$, então $(\neg a \to a) \approx (a \vee \neg a)$

Luís Felipe
24/10/23

Agora, assuma que também há caminho de $a$ para $\neg a$:

$$\begin{tikzcd} \neg a \arrow[r] & \neg b \arrow[r] & c \arrow[r] & a \arrow[dl] \\ & & d \arrow[ull] & \end{tikzcd}$$

$a \to d \approx (\neg a \vee d)$

$d \to \neg a \approx (\neg d \vee \neg a)$

2-SAT $(a \vee \neg b) \wedge (b \vee c) \wedge (\neg c \vee a) \wedge (\neg a \vee d) \wedge (\neg d \vee \neg a)$

Analogamente, pela transitividade, como $(a \to d) \wedge (d \to \neg a)$,

então $(a \to \neg a) \approx (\neg a \vee \neg a)$

Portanto na fórmula 2-SAT temos $(\neg a \to a) \wedge (a \to \neg a)$

Ou seja, temos uma biimplicação de $a \leftrightarrow \neg a$

Biimplicação:

$$\boxed{(p \to q) \wedge (q \to p) \approx p \leftrightarrow q}$$

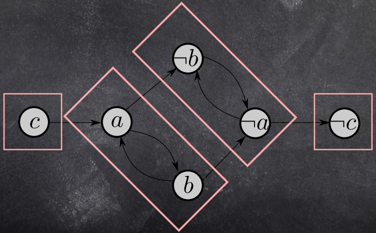
$a \leftrightarrow \neg a$ é uma Contradição!

Pois $a$ e $\neg a$ nunca concordam valor, logo 2-SAT é falso.

Luís Felipe
24/10/23

# Componente fortemente conexa

- Uma componente é fortemente conexa se entre todo par de vértices $a, b$ existe caminho de $a$ para $b$ e de $b$ para $a$.
- Assim, uma instância $(C, U)$ do 2SAT é satisfazível sse, para toda variável $u \in U$, os vértices do grafo de implicações $u$ e $\neg u$ estão em componentes fortemente conexas distintas.
- 2SAT pode ser resolvido em $O(m + n)$, onde $n = |U|$ e $m = |C|$.



Luís Felipe
24/10/23

# Variantes de SAT

**3SAT**

Dados: Expressão booleana $B$ onde cada cláusula tem exatamente 3 literais na FNC.
Questão: B é satisfazível?

3SAT está em $\mathcal{NP}$? SIM!!

Não se conhece algoritmo eficiente para solucionar 3SAT.