Aula 12 - Tratabilidade

Luís Felipe

UFF

10 de Outubro de 2023

Luís Felipe
10/10/23

Eficiência

- Um algoritmo eficiente é aquele cuja complexidade é um polinômio no tamanho da sua entrada. (Edwards, 1964)
- Um problema eficiente é aquele que admite algoritmo eficiente.
- Problemas eficientes são denominados tratáveis e os não eficientes são intratáveis.
- Notação para problemas: $\Pi(D, Q)$
  - ▶ $D =$ Conjunto de dados de Π
  - ▶ $Q =$ Questão que Π deve resolver

OBS.: A existência de um algoritmo não eficiente para um problema não implica na intratabilidade do problema em questão.

Luís Felipe
10/10/23

Tipos de Problemas

Um Problema de Otimização é um problema cuja questão Q consiste em otimizar (minimizar ou maximizar) a solução, entre todas as possíveis, levando em consideração o conjunto D.

Exemplos:

Conjunto independente (otimização)

Dados: Grafo G.
Questão: Determinar o conjunto independente máximo de G.

Cobertura por vértices (otimização)

Dados: Grafo G.
Questão: Determinar a cobertura mínima das arestas de G por vértices.

OBS.: Esses e outros problemas em grafos são vistos em disciplinas como Teoria dos Grafos.

Luís Felipe
10/10/23

Problemas de Decisão

- Em um Problema de Decisão a questão Q consiste em uma pergunta cuja resposta em Sim ou Não.
- Dado um problema de otimização, podemos formular um problema de decisão associado.
- O problema de decisão associado ao de otimização possui o mesmo conjunto D de dados do problema de otimização, além de um valor k.
- A questão consiste em saber se a solução é $\leq k$ ou $\geq k$, para um problema de minimização ou maximização, respectivamente.

Luís Felipe
10/10/23

Exemplos:

Conjunto Independente (decisão)

Dados: Grafo G, inteiro $k \leq n$.
Questão: G possui conjunto independente de tamanho $\geq k$?

Cobertura por vértices (decisão)

Dados: Grafo G, inteiro $k \leq n$.
Questão: G possui cobertura de arestas por vértices de tamanho $\leq k$?

Luís Felipe
10/10/23

Classe $\mathcal{P}$ de problemas

A classe $\mathcal{P}$ de problemas (de decisão) corresponde exatamente aos problemas tratáveis.

OBS.: Em Teoria da Computação também estudamos a classe $\mathcal{P}$: Problemas que podem ser resolvidos em tempo polinomial por uma Máquina de Turing Determinística.

Exemplo:

Caminho Mínimo (decisão)

Dados: Grafo G, inteiro k, vértices $v_1, v_2 \in V(G)$.
Questão: G possui caminho de v_1 a v_2 com tamanho $\leq k$?

OBS.: Caminho Mínimo é um problema em $\mathcal{P}$, pois são conhecidos algoritmos eficientes para solucioná-lo. Algoritmos de Dijkstra, Bellman-Ford, dentre outros. Assuntos de disciplinas como Algoritmos em Grafos.

Luís Felipe

10/10/23

Certificados

- Um certificado para um problema de decisão é algo que, quando validado, atesta a solução do problema.
- Assim sendo, o certificado pode ser para a resposta Sim ou Não.
- Para validar um certificado, aplica-se um algoritmo de validação.

Luís Felipe
10/10/23

Exemplos:

1. Conjunto independente
   - Certificado: um subconjunto dos vértices do grafo

2. Grafos Eulerianos
   - Certificado 1: uma lista ordenada dos vértices
   - Certificado 2: sequência dos graus dos vértices do grafo

Luís Felipe

Classe $\mathcal{NP}$ de problemas

A classe $\mathcal{NP}$ de problemas de decisão corresponde aos problemas Π que admitem certificados para a resposta Sim, que possam ser validados através de um algoritmo eficiente em função da entrada de Π.

OBS.: Em Teoria da Computação também estudamos a classe $\mathcal{NP}$: Problemas que podem ser resolvidos em tempo polinomial por uma Máquina de Turing Não-Determinística.

Exemplos:

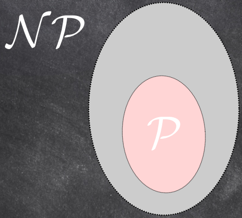
1. Conjunto independente
   - Certificado: um subconjunto de vértices do grafo
   - Algoritmo de validação: Verifica se o conjunto é independente e se a cardinalidade é $\geq k$

Luís Felipe
10/10/23

2. Grafos Eulerianos
   - Certificado 1: uma lista ordenada dos vértices do grafo
   - Algoritmo de validação: Verifica se é uma Trilha Euleriana
   - Certificado 2: sequência dos graus dos vértices
   - Algoritmo de validação: Verifica se todos os graus são pares
3. Cobertura por vértices
   - Certificado: um subconjunto V_1 de vértices do grafo
   - Algoritmo de validação: Verifica se $G[V \setminus V_1]$ é um conjunto independente e se $|V_1| \leq k$
4. Caminho mínimo Exercício!

Luís Felipe
10/10/23

OBS.: $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$



Problema do Milênio: $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$????

- Certificar é tão difícil quanto resolver???
- https://www.claymath.org/millennium-problems/p-vs-np-problem
- Ciência Hoje - Material Complementar no classroom

Luís Felipe
10/10/23

Nem todo problema pertence a $\mathcal{NP}$...

... mesmo considerando problemas decidíveis.

- Um grafo é bem coberto se todo conjunto independente maximal é máximo.
    - Certificado para o Sim: TODOS os conjuntos independentes maximais
    - Este problema está em $\mathcal{NP}$?
        - Este certificado não é suficiente para afirmarmos que o problema está ou não está em $\mathcal{NP}$. Pois a quantidade de conjuntos independentes maximais pode ser exponencial.
    - Certificado para o Não: dois subconjuntos de vértices
    - Algoritmo de validação: Verificar se os conjuntos são conjuntos independentes maximais e têm cardinalidades distintas.

Luís Felipe
10/10/23

A classe Co-$\mathcal{NP}$ de problemas

A classe Co-$\mathcal{NP}$ de problemas de decisão corresponde aos problemas Π que admitem certificados para a resposta Não, que possam ser validados através de um algoritmo eficiente em função da entrada de Π.

Exemplo: Decidir se um grafo é bem coberto é um problema em Co-$\mathcal{NP}$.

Luís Felipe
10/10/23

Complemento de problemas

- O complemento de um problema $\Pi(D, Q)$ é um problema $\overline{\Pi}(D, \overline{Q})$ tal que Π possui resposta Sim sse $\overline{\Pi}$ possui resposta Não.

OBS.: Negações de enunciados são vistos em disciplinas como Fundamentos Matemáticos para Computação, Matemática Discreta, dentre outros.

Exemplo:

Conjunto Independente
Dados: Grafo G, inteiro $k \leq n$. Questão: Todo conjunto independente de G possui tamanho $< k$?

Note que Conjunto Independente está em $\mathcal{NP}$ enquanto que $\overline{\text{Conjunto Independente}}$ está em Co-$\mathcal{NP}$.

Luís Felipe
10/10/23

Exemplo:

Grafo Bem Coberto

Dados: Grafo G.
Questão: Existe conjunto independente maximal de G que não seja máximo?

Note que Grafo Bem Coberto está em Co-$\mathcal{NP}$ enquanto que Grafo Bem Coberto está em $\mathcal{NP}$.

Existem problemas que estão em ambas, $\mathcal{NP}$ e Co-$\mathcal{NP}$???

SIM!!

Todos os problemas em $\mathcal{P}$ são exemplos.

Luís Felipe
10/10/23

Exemplo:

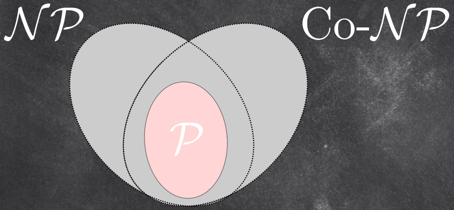
Fatoração de inteiros

Dados: Inteiros positivos m e k.
Questão: Existe um fator primo p de m tal que $1 < p \leq k$?

- Este problema está em $\mathcal{NP}$?
  - Certificado para o SIM: inteiro p
  - Algoritmo de validação: Verificar se $1 < p \leq k$, se p é primo e se $p|m$.
- Este problema está em Co-$\mathcal{NP}$?
  - Certificado para o Não: lista de inteiros
  - Algoritmo de validação: Verificar se dividem m, se são maiores que k, se são primos e se são todos os fatores primos de m. Ou seja, devo verificar se essa lista é uma fatoração prima de m sem fatores menores ou igual que k. Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, tal fatoração é única.

Luís Felipe
10/10/23

$\mathcal{P} \times \mathcal{NP} \times$ Co- $\mathcal{NP}$



$\mathcal{NP}$ = Co-$\mathcal{NP}$?
Não sabemos...
Mas se $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$, então $\mathcal{NP}$ = Co-$\mathcal{NP}$

Por quê?