

Aula 9 (extra) - Matróides

Luís Felipe

UFF

28 de Abril de 2026

Algoritmos Gulosos

- Algoritmos gulosos fazem escolhas locais ótimas
- Nem sempre produzem soluções globais ótimas
- Exemplos:
 - ▶ Funcionam: Kruskal, Prim
 - ▶ Falham: mochila 0/1, problema do troco (em geral)
- Pergunta fundamental:
 - ▶ Quando o guloso funciona?
- A resposta envolve a estrutura de **matroide**

Definição de Matroide

Um matroide é um par $(E, \mathcal{I})$, onde:

- E é um conjunto finito
- $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ é a família de conjuntos independentes

Satisfazendo:

- (1) **Não vazio:** $\emptyset \in \mathcal{I}$
- (2) **Hereditariedade:** Se $A \in \mathcal{I}$ e $B \subseteq A$, então $B \in \mathcal{I}$
- (3) **Troca:** Se $A, B \in \mathcal{I}$ e $|A| < |B|$, então existe $e \in B \setminus A$ tal que $A \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

Intuição

- Matroides generalizam o conceito de independência
- Exemplos:
 - ▶ Vetores linearmente independentes
 - ▶ Arestas sem ciclo em grafos
- Ideia:
 - ▶ Construir soluções adicionando elementos sem violar independência

Bases de um Matroide

- Uma **base** é um conjunto independente maximal
- Ou seja, não pode ser estendido mantendo independência
- Propriedade importante:
 - Todas as bases possuem o mesmo tamanho

Teorema: Todas as bases de um matroide têm o mesmo cardinal.

Prova:

Sejam B_1 e B_2 bases.

Suponha $|B_1| < |B_2|$.

Pela propriedade de troca, existe $e \in B_2 \setminus B_1$ tal que $B_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.

Contradição, pois B_1 é maximal.

Logo, $|B_1| = |B_2|$.



Matroide com Peso

- Um **matroide com peso** é uma tripla $(E, \mathcal{I}, w)$
- $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ associa um peso a cada elemento
- Objetivo:
 - Encontrar $A \in \mathcal{I}$ que maximize:

$$w(A) = \sum_{e \in A} w(e)$$

Teorema Guloso para Matroides

Seja $(E, \mathcal{I})$ um matroide e seja $w : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ uma função de peso.

O **algoritmo guloso** ordena os elementos de E como:

$$w(e_1) \geq w(e_2) \geq \dots \geq w(e_n)$$

e constrói G da seguinte forma:

$$G_0 = \emptyset.$$

Para $i = 1, \dots, n$:

$$G_i = \begin{cases} G_{i-1} \cup \{e_i\}, & \text{se } G_{i-1} \cup \{e_i\} \in \mathcal{I}, \\ G_{i-1}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Teorema: O conjunto $G = G_n$ é um conjunto independente de peso máximo.

Prova do Teorema Guloso

Seja $G = \{g_1, \dots, g_k\}$ a solução gulosa, na ordem em que os elementos foram escolhidos.

Considere uma solução ótima O que maximiza $|O \cap G|$.

Suponha, por contradição, que $G \neq O$. Seja g_i o primeiro elemento de G que não pertence a O .

Como O é ótimo e G é independente, pela propriedade de troca aplicada adequadamente, existe $e \in O \setminus G$ tal que:

$$O' = O - \{e\} \cup \{g_i\} \in \mathcal{I}.$$

Como o algoritmo escolheu g_i antes de e , temos: $w(g_i) \geq w(e)$.

Logo: $w(O') = w(O) - w(e) + w(g_i) \geq w(O)$.

Assim, O' também é ótima, mas contém uma escolha gulosa a mais que O , contradizendo a escolha de O .

Portanto, $G = O$ e o guloso é ótimo.



Matroide Gráfico

- E = arestas do grafo
- $\mathcal{I}$ = conjuntos sem ciclo
- Independência = não formar ciclos
- Algoritmos:
 - ▶ Kruskal
 - ▶ Prim

Por que Kruskal funciona?

- Hereditariedade:
 - ▶ Remover arestas não cria ciclos
- Troca:
 - ▶ Sempre é possível conectar componentes sem criar ciclo

O problema do troco é um matroide?

Considere moedas com valores 1, 3, 3, 4 e alvo 6.

Uma tentativa natural seria definir:

$$E = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$$

com valores:

$$v(m_1) = 1, \quad v(m_2) = 3, \quad v(m_3) = 3, \quad v(m_4) = 4.$$

Defina:

$$\mathcal{I} = \{A \subseteq E : \sum_{m \in A} v(m) \leq 6\}.$$

Ou seja, um conjunto é independente se ainda não ultrapassa o valor do troco.

Hereditariedade

Propriedade: Se $A \in \mathcal{I}$ e $B \subseteq A$, então $B \in \mathcal{I}$.

Neste modelo, a propriedade vale.

De fato, se:

$$\sum_{m \in A} v(m) \leq 6$$

e $B \subseteq A$, então:

$$\sum_{m \in B} v(m) \leq \sum_{m \in A} v(m) \leq 6.$$

Logo, $B \in \mathcal{I}$.

Remover moedas nunca faz ultrapassar o valor do troco.

A propriedade de troca falha

Considere os conjuntos:

$$A = \{m_4\} \quad \text{e} \quad B = \{m_2, m_3\}.$$

Temos:

$$\sum_{m \in A} v(m) = 4 \leq 6$$

e

$$\sum_{m \in B} v(m) = 3 + 3 = 6 \leq 6.$$

Logo, $A, B \in \mathcal{I}$.

Além disso:

$$|A| = 1 < 2 = |B|.$$

Pela propriedade de troca, deveria existir $e \in B \setminus A$ tal que:

A propriedade de troca falha

Mas:

$$B \setminus A = \{m_2, m_3\}.$$

Se escolhermos m_2 :

$$v(A \cup \{m_2\}) = 4 + 3 = 7 > 6.$$

Se escolhermos m_3 :

$$v(A \cup \{m_3\}) = 4 + 3 = 7 > 6.$$

Logo, não existe $e \in B \setminus A$ tal que:

$$A \cup \{e\} \in \mathcal{I}.$$

Portanto, $(E, \mathcal{I})$ não é um matroide.

Consequência

- O problema do troco não possui, em geral, a estrutura de troca de um matroide.
- Por isso, escolhas locais podem impedir uma solução global ótima.
- Exemplo com moedas 1, 3, 4 e troco 6:
 - ▶ Guloso: $4 + 1 + 1$ (3 moedas)
 - ▶ Ótimo: $3 + 3$ (2 moedas)
- O erro do guloso ocorre porque a escolha da moeda 4 bloqueia a combinação ótima.