

Aula 8 - Obtenção de componentes fortemente conexas

Luís Felipe

UFF

07 de Abril de 2026

Componente fortemente conexa

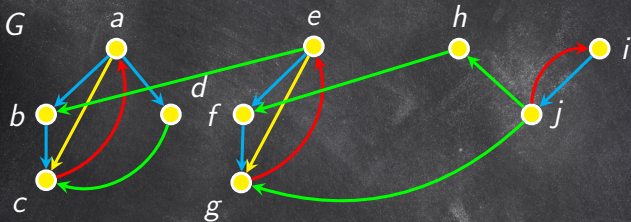
Uma **componente fortemente conexa** (cfc) de um grafo direcionado G é um subdigrafo H de G que é maximal com relação à seguinte propriedade:

Componente fortemente conexa

Uma **componente fortemente conexa** (cfc) de um grafo direcionado G é um subdigrafo H de G que é maximal com relação à seguinte propriedade:

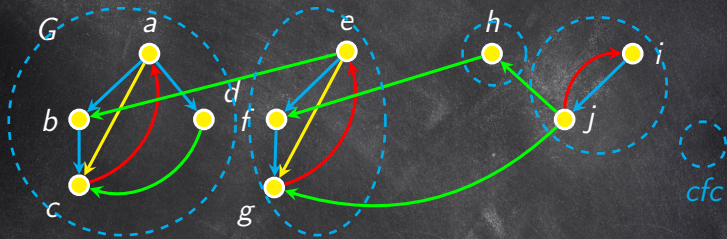
Para qualquer par de vértices v e w de H , existe em H um caminho direcionado de v para w e um caminho direcionado de w para v .

Exemplo



v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
PE(v)	1	2	3	6	9	10	11	15	17	18
PS(v)	8	5	4	7	14	13	12	16	20	19

Exemplo



v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
PE(v)	1	2	3	6	9	10	11	15	17	18
PS(v)	8	5	4	7	14	13	12	16	20	19

Função $old(v)$ em dígrafos

- Seja T uma floresta de profundidade do dígrafo G .

Função $old(v)$ em dígrafos

- Seja T uma floresta de profundidade do dígrafo G .
- Para cada vértice v , definimos $old(v)$:

Função $old(v)$ em dígrafos

- Seja T uma floresta de profundidade do dígrafo G .
- Para cada vértice v , definimos $old(v)$:

$old(v)$:

- Seja v um vértice de G .
 $old(v)$ É o valor de $PE(w)$ do vértice mais antigo na busca tal que:
 - ▶ w está na mesma componente fortemente conexa de v ;

Função $old(v)$ em dígrafos

- Seja T uma floresta de profundidade do dígrafo G .
- Para cada vértice v , definimos $old(v)$:

$old(v)$:

- Seja v um vértice de G .
 $old(v)$ É o valor de $PE(w)$ do vértice mais antigo na busca tal que:
 - ▶ w está na mesma componente fortemente conexa de v ;
 - ▶ w pode ser alcançado a partir de v usando:
 - ▶ 0 ou mais arestas azuis de T seguindo para baixo na árvore;

Função $old(v)$ em dígrafos

- Seja T uma floresta de profundidade do dígrafo G .
- Para cada vértice v , definimos $old(v)$:

$old(v)$:

- Seja v um vértice de G .
 $old(v)$ É o valor de $PE(w)$ do vértice mais antigo na busca tal que:
 - ▶ w está na mesma componente fortemente conexa de v ;
 - ▶ w pode ser alcançado a partir de v usando:
 - ▶ 0 ou mais arestas azuis de T seguindo para baixo na árvore;
 - ▶ e, em seguida, no máximo uma aresta de retorno ou de cruzamento.

Função $old(v)$ em dígrafos

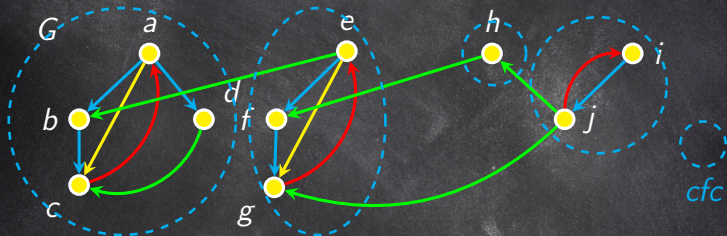
- Seja T uma floresta de profundidade do dígrafo G .
- Para cada vértice v , definimos $old(v)$:

$old(v)$:

- Seja v um vértice de G .
 $old(v)$ É o valor de $PE(w)$ do vértice mais antigo na busca tal que:
 - ▶ w está na mesma componente fortemente conexa de v ;
 - ▶ w pode ser alcançado a partir de v usando:
 - ▶ 0 ou mais arestas azuis de T seguindo para baixo na árvore;
 - ▶ e, em seguida, no máximo uma aresta de retorno ou de cruzamento.

Obs.: $old(v)$ indica quão antigo na busca é o vértice da mesma cfc que pode ser alcançado a partir do subgrafo de v .

Exemplo



v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
PE(v)	1	2	3	6	9	10	11	15	17	18
PS(v)	8	5	4	7	14	13	12	16	20	19
old(v)	1	1	1	3	9	9	9	15	17	17

Como calcular $old(v)$

Recorrência para $old(v)$

$$old(v) = \min \begin{cases} PE(v), \\ \min\{ old(w) \mid w \text{ é filho de } v \text{ em } T \}, \\ \min\{ PE(w) \mid vw \text{ é aresta de retorno} \}, \\ \min\{ PE(w) \mid vw \text{ é aresta de cruzamento, } v, w \text{ estão na mesma cfc} \} \end{cases}$$

Obs.: $old(v)$ é o menor tempo de entrada de um vértice na mesma componente fortemente conexa de v que pode ser alcançado a partir do subgrafo enraizado em v , usando arestas da árvore DFS e no máximo uma aresta de retorno ou de cruzamento.

DFS com cálculo de $old(v)$ e obtenção das CFCs

```

1  def dfs_cfc(v, adj, pe, ps, old, pai, t, Q, emQ, cfc):
2      t[0] += 1
3      pe[v] = t[0]
4      old[v] = pe[v]                                # inicialização de old(v)
5      Q.append(v)                                   # empilha v
6      emQ[v] = True
7
8      for w in adj[v]:
9          if pe[w] == 0:                             # w ainda não foi visitado
10             pai[w] = v                             # vw se torna aresta da floresta DFS
11             dfs_cfc(w, adj, pe, ps, old, pai, t, Q, emQ, cfc)
12             old[v] = min(old[v], old[w])
13         elif ps[w] == 0:                             # w foi descoberto, mas ainda não terminou
14             old[v] = min(old[v], pe[w])             # aresta de retorno
15         else:                                         # w ja terminou
16             if pe[v] < pe[w]:
17                 pass                                 # vw eh aresta de avanco
18             else:                                     # vw eh aresta de cruzamento
19                 if emQ[w]:                             # w ainda esta na pilha Q
20                     old[v] = min(old[v], pe[w])
21
22     t[0] += 1
23     ps[v] = t[0]
24     if old[v] == pe[v]:                             # v eh raiz de uma CFC (não existe caminho que volte para um ancestral de v)
25         comp = []
26         while True:
27             u = Q.pop()
28             emQ[u] = False
29             comp.append(u)
30             if u == v:
31                 break
32         cfc.append(comp)

```

Vértices fortes

- Um vértice v é dito **forte** se

$$old(v) = PE(v)$$

no momento em que v **sai da busca** (última linha do procedimento de DFS).

Vértices fortes

- Um vértice v é dito **forte** se

$$old(v) = PE(v)$$

no momento em que v **sai da busca** (última linha do procedimento de DFS).

- Quando encontramos um vértice forte v :
 - ▶ Desempilhamos imediatamente os vértices da pilha Q ;

Vértices fortes

- Um vértice v é dito **forte** se

$$old(v) = PE(v)$$

no momento em que v **sai da busca** (última linha do procedimento de DFS).

- Quando encontramos um vértice forte v :
 - ▶ Desempilhamos imediatamente os vértices da pilha Q ;
 - ▶ O desempilhamento continua até remover v (inclusive).

Vértices fortes

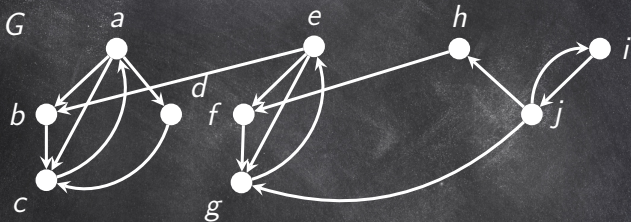
- Um vértice v é dito **forte** se

$$old(v) = PE(v)$$

no momento em que v **sai da busca** (última linha do procedimento de DFS).

- Quando encontramos um vértice forte v :
 - ▶ Desempilhamos imediatamente os vértices da pilha Q ;
 - ▶ O desempilhamento continua até remover v (inclusive).
- Os vértices desempilhados formam uma nova **componente fortemente conexa (CFC)**.

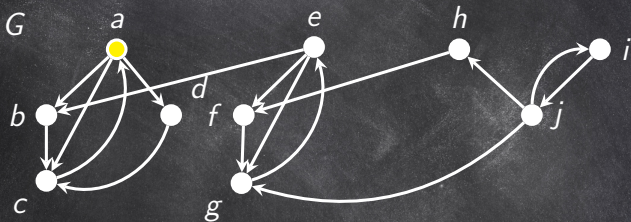
DFS em grafos direcionados



v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
PE(v)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
PS(v)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
old(v)										

$$Q = \emptyset$$

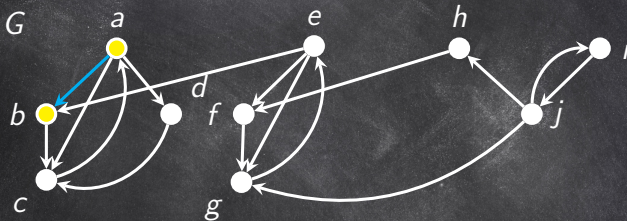
DFS em grafos direcionados



v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
PE(v)	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
PS(v)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
old(v)										

$$Q = \{a\}$$

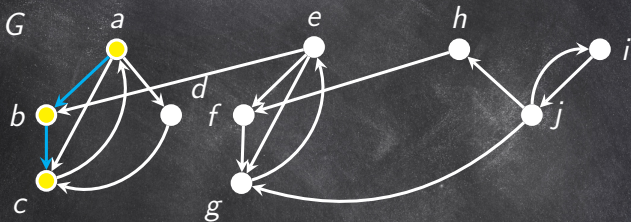
DFS em grafos direcionados



v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
PE(v)	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0
PS(v)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
old(v)										

$$Q = \{a, b\}$$

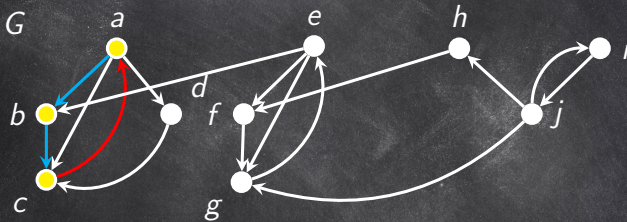
DFS em grafos direcionados



v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
PE(v)	1	2	3	0	0	0	0	0	0	0
PS(v)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
old(v)										

$$Q = \{a, b, c\}$$

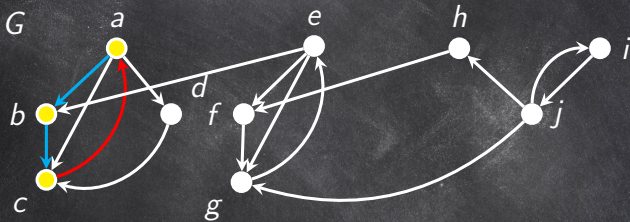
DFS em grafos direcionados



v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
PE(v)	1	2	3	0	0	0	0	0	0	0
PS(v)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
old(v)										

$$Q = \{a, b, c\}$$

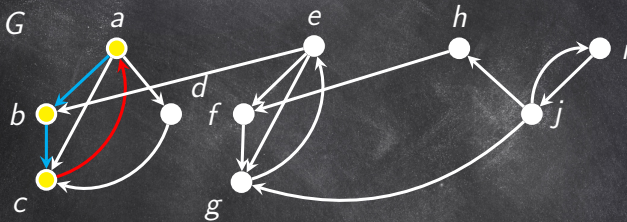
DFS em grafos direcionados



v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
PE(v)	1	2	3	0	0	0	0	0	0	0
PS(v)	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0
old(v)			1							

$$Q = \{a, b, c\}$$

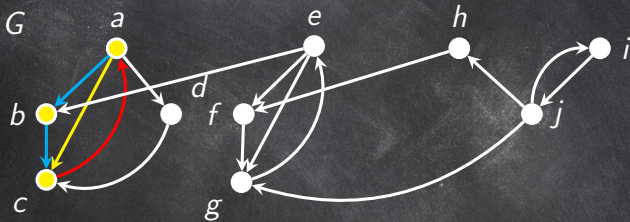
DFS em grafos direcionados



v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
PE(v)	1	2	3	0	0	0	0	0	0	0
PS(v)	0	5	4	0	0	0	0	0	0	0
old(v)		1	1							

$$Q = \{a, b, c\}$$

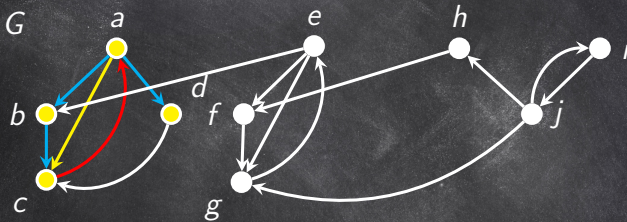
DFS em grafos direcionados



v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
PE(v)	1	2	3	0	0	0	0	0	0	0
PS(v)	0	5	4	0	0	0	0	0	0	0
old(v)		1	1							

$$Q = \{a, b, c\}$$

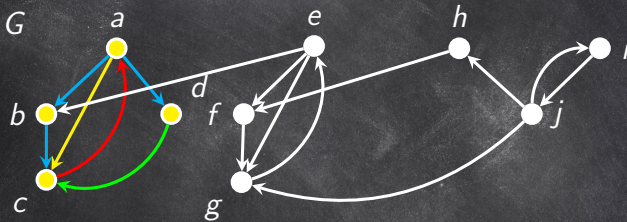
DFS em grafos direcionados



v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
PE(v)	1	2	3	6	0	0	0	0	0	0
PS(v)	0	5	4	0	0	0	0	0	0	0
old(v)		1	1							

$$Q = \{a, b, c, d\}$$

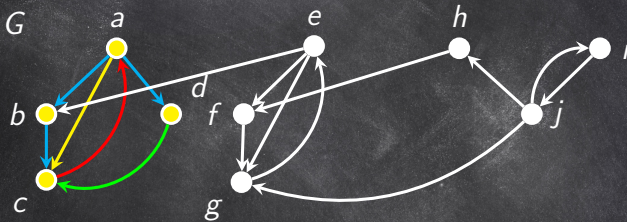
DFS em grafos direcionados



v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
PE(v)	1	2	3	6	0	0	0	0	0	0
PS(v)	0	5	4	0	0	0	0	0	0	0
old(v)		1	1							

$$Q = \{a, b, c, d\}$$

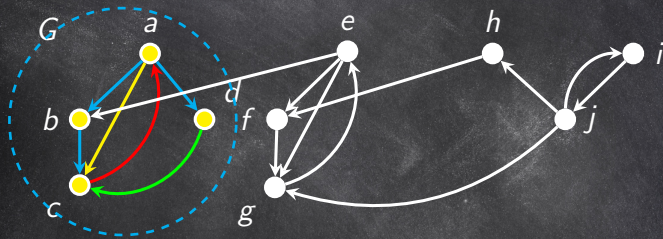
DFS em grafos direcionados



v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
PE(v)	1	2	3	6	0	0	0	0	0	0
PS(v)	0	5	4	7	0	0	0	0	0	0
old(v)		1	1	3						

$$Q = \{a, b, c, d\}$$

DFS em grafos direcionados

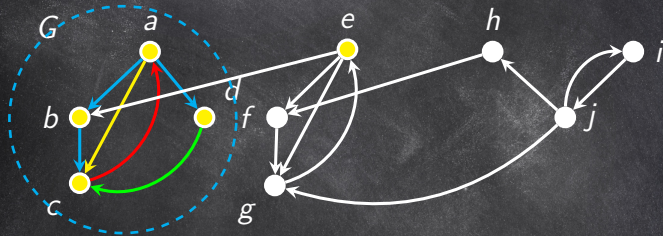


v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
PE(v)	1	2	3	6	0	0	0	0	0	0
PS(v)	8	5	4	7	0	0	0	0	0	0
old(v)	1	1	1	3						

$$Q = \{a, b, c, d\}$$

a é vértice forte

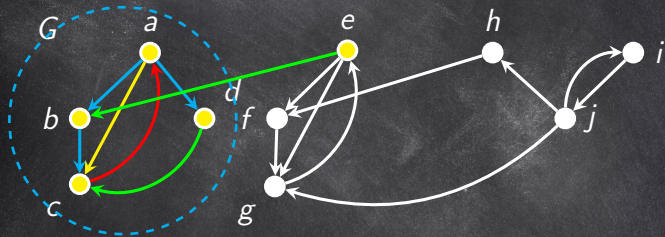
DFS em grafos direcionados



v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
PE(v)	1	2	3	6	9	0	0	0	0	0
PS(v)	8	5	4	7	0	0	0	0	0	0
old(v)	1	1	1	3						

$$Q = \{e\}$$

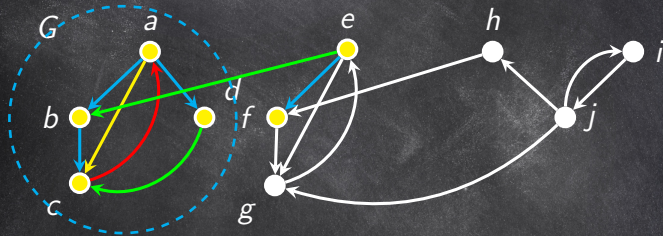
DFS em grafos direcionados



v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
PE(v)	1	2	3	6	9	0	0	0	0	0
PS(v)	8	5	4	7	0	0	0	0	0	0
old(v)	1	1	1	3						

$$Q = \{e\}$$

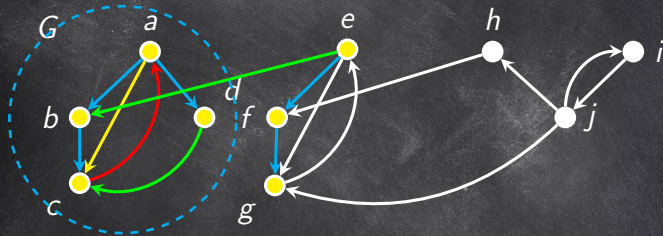
DFS em grafos direcionados



v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
PE(v)	1	2	3	6	9	10	0	0	0	0
PS(v)	8	5	4	7	0	0	0	0	0	0
old(v)	1	1	1	3						

$$Q = \{e, f\}$$

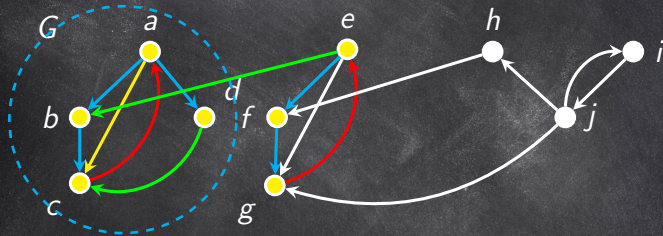
DFS em grafos direcionados



v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
PE(v)	1	2	3	6	9	10	11	0	0	0
PS(v)	8	5	4	7	0	0	0	0	0	0
old(v)	1	1	1	3						

$$Q = \{e, f, g\}$$

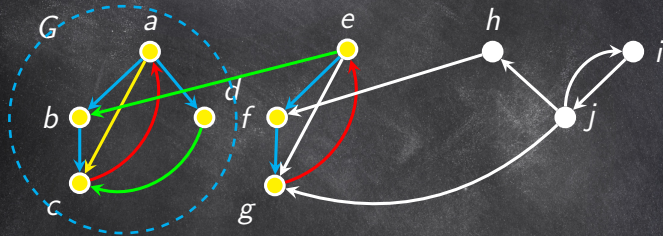
DFS em grafos direcionados



v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
PE(v)	1	2	3	6	9	10	11	0	0	0
PS(v)	8	5	4	7	0	0	0	0	0	0
old(v)	1	1	1	3						

$$Q = \{e, f, g\}$$

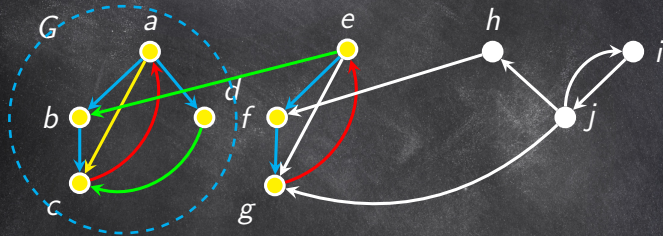
DFS em grafos direcionados



v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
PE(v)	1	2	3	6	9	10	11	0	0	0
PS(v)	8	5	4	7	0	0	12	0	0	0
old(v)	1	1	1	3			9			

$$Q = \{e, f, g\}$$

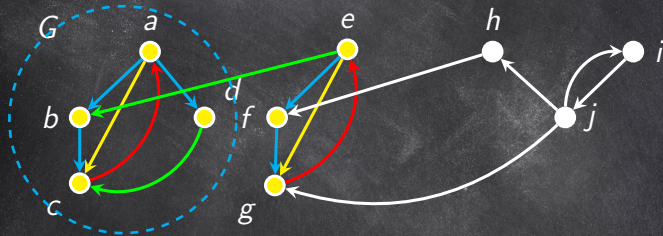
DFS em grafos direcionados



v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
PE(v)	1	2	3	6	9	10	11	0	0	0
PS(v)	8	5	4	7	0	13	12	0	0	0
old(v)	1	1	1	3		9	9			

$$Q = \{e, f, g\}$$

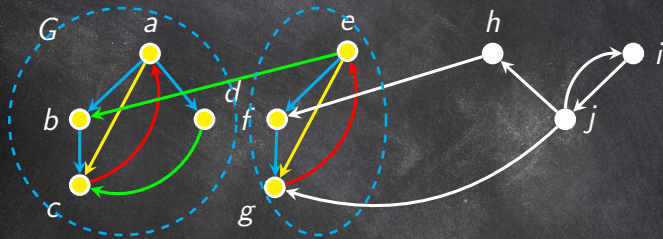
DFS em grafos direcionados



v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
PE(v)	1	2	3	6	9	10	11	0	0	0
PS(v)	8	5	4	7	0	13	12	0	0	0
old(v)	1	1	1	3		9	9			

$$Q = \{e, f, g\}$$

DFS em grafos direcionados

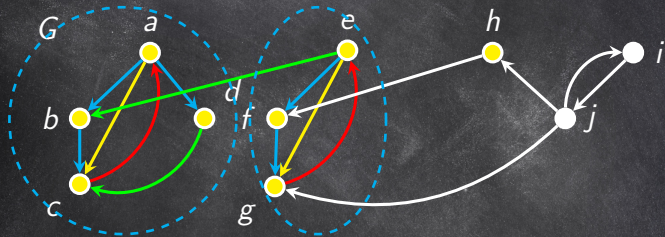


v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
PE(v)	1	2	3	6	9	10	11	0	0	0
PS(v)	8	5	4	7	14	13	12	0	0	0
old(v)	1	1	1	3	9	9	9			

$$Q = \{e, f, g\}$$

e é vértice forte

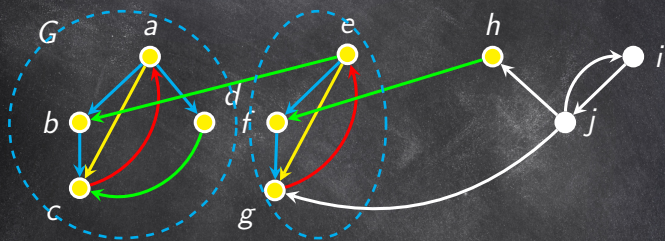
DFS em grafos direcionados



v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
PE(v)	1	2	3	6	9	10	11	15	0	0
PS(v)	8	5	4	7	14	13	12	0	0	0
old(v)	1	1	1	3	9	9	9			

$$Q = \{h\}$$

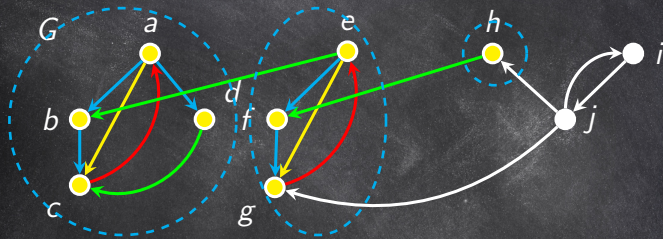
DFS em grafos direcionados



v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
PE(v)	1	2	3	6	9	10	11	15	0	0
PS(v)	8	5	4	7	14	13	12	0	0	0
old(v)	1	1	1	3	9	9	9			

$$Q = \{h\}$$

DFS em grafos direcionados

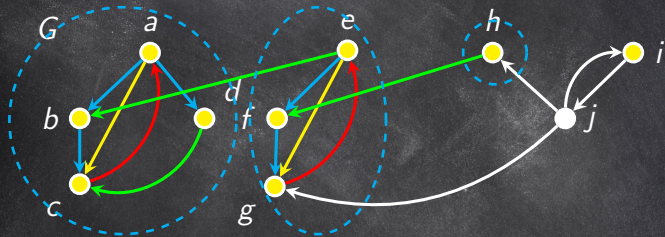


v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
PE(v)	1	2	3	6	9	10	11	15	0	0
PS(v)	8	5	4	7	14	13	12	16	0	0
old(v)	1	1	1	3	9	9	9	15		

$$Q = \{h\}$$

h é vértice forte

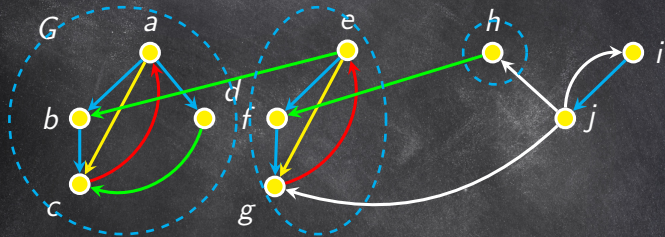
DFS em grafos direcionados



v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
PE(v)	1	2	3	6	9	10	11	15	17	0
PS(v)	8	5	4	7	14	13	12	16	0	0
old(v)	1	1	1	3	9	9	9	15		

$$Q = \{i\}$$

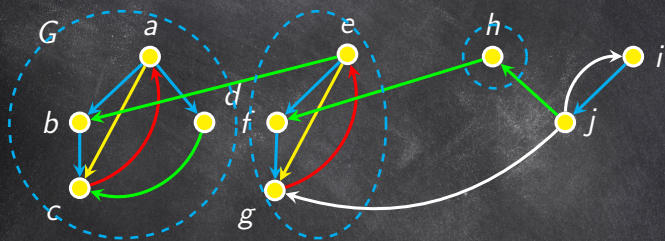
DFS em grafos direcionados



v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
PE(v)	1	2	3	6	9	10	11	15	17	18
PS(v)	8	5	4	7	14	13	12	16	0	0
old(v)	1	1	1	3	9	9	9	15		

$$Q = \{i, j\}$$

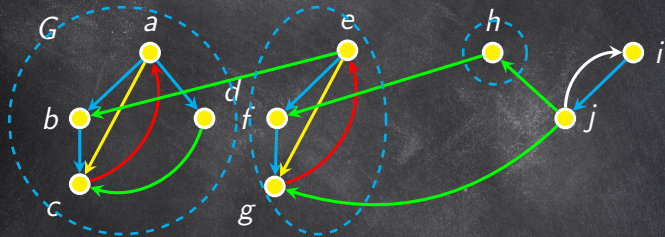
DFS em grafos direcionados



v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
PE(v)	1	2	3	6	9	10	11	15	17	18
PS(v)	8	5	4	7	14	13	12	16	0	0
old(v)	1	1	1	3	9	9	9	15		

$$Q = \{i, j\}$$

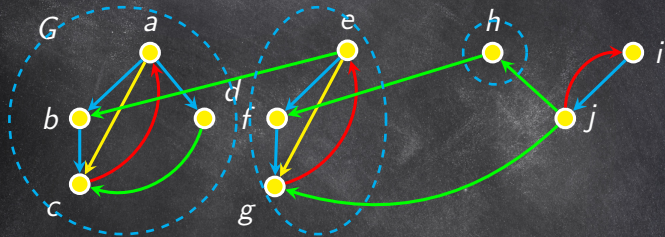
DFS em grafos direcionados



v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
PE(v)	1	2	3	6	9	10	11	15	17	18
PS(v)	8	5	4	7	14	13	12	16	0	0
old(v)	1	1	1	3	9	9	9	15		

$$Q = \{i, j\}$$

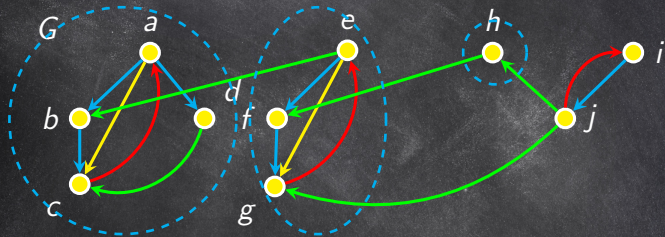
DFS em grafos direcionados



v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
PE(v)	1	2	3	6	9	10	11	15	17	18
PS(v)	8	5	4	7	14	13	12	16	0	0
old(v)	1	1	1	3	9	9	9	15		

$$Q = \{i, j\}$$

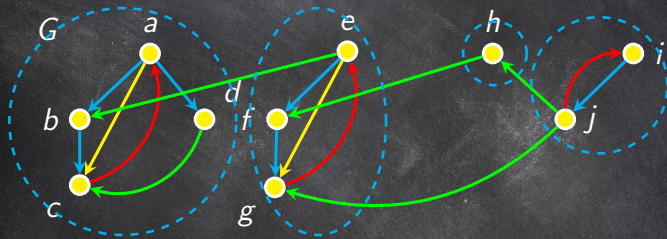
DFS em grafos direcionados



v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
PE(v)	1	2	3	6	9	10	11	15	17	18
PS(v)	8	5	4	7	14	13	12	16	0	19
old(v)	1	1	1	3	9	9	9	15		17

$$Q = \{i, j\}$$

DFS em grafos direcionados

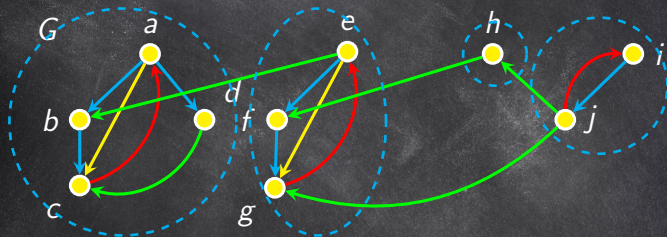


v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
PE(v)	1	2	3	6	9	10	11	15	17	18
PS(v)	8	5	4	7	14	13	12	16	20	19
old(v)	1	1	1	3	9	9	9	15	17	17

$$Q = \{i, j\}$$

i é vértice forte

DFS em grafos direcionados



v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
PE(v)	1	2	3	6	9	10	11	15	17	18
PS(v)	8	5	4	7	14	13	12	16	20	19
old(v)	1	1	1	3	9	9	9	15	17	17

$Q = \emptyset \Rightarrow FIM$

Observações finais

- A determinação das **componentes fortemente conexas (CFCs)** produz sempre o **mesmo resultado**, independentemente da ordem de visita dos vértices ou das arestas escolhida na busca.

Observações finais

- A determinação das **componentes fortemente conexas (CFCs)** produz sempre o **mesmo resultado**, independentemente da ordem de visita dos vértices ou das arestas escolhida na busca.
- No entanto, o **papel de uma aresta** pode variar de acordo com a ordem da busca.

Observações finais

- A determinação das **componentes fortemente conexas (CFCs)** produz sempre o **mesmo resultado**, independentemente da ordem de visita dos vértices ou das arestas escolhida na busca.
- No entanto, o **papel de uma aresta** pode variar de acordo com a ordem da busca.
 - Uma aresta vw pode ser classificada de maneiras diferentes em execuções distintas da DFS.

Observações finais

- A determinação das **componentes fortemente conexas (CFCs)** produz sempre o **mesmo resultado**, independentemente da ordem de visita dos vértices ou das arestas escolhida na busca.
- No entanto, o **papel de uma aresta** pode variar de acordo com a ordem da busca.
 - ▶ Uma aresta vw pode ser classificada de maneiras diferentes em execuções distintas da DFS.
 - ▶ Por exemplo, vw pode ser:
 - ▶ **aresta de cruzamento** em uma busca;
 - ▶ **aresta de avanço** em outra busca.

Observações finais

- A determinação das **componentes fortemente conexas (CFCs)** produz sempre o **mesmo resultado**, independentemente da ordem de visita dos vértices ou das arestas escolhida na busca.
- No entanto, o **papel de uma aresta** pode variar de acordo com a ordem da busca.
 - ▶ Uma aresta vw pode ser classificada de maneiras diferentes em execuções distintas da DFS.
 - ▶ Por exemplo, vw pode ser:
 - ▶ **aresta de cruzamento** em uma busca;
 - ▶ **aresta de avanço** em outra busca.
- Ou seja, a **classificação das arestas** depende da execução da DFS, mas as **CFCs do grafo permanecem as mesmas**.