

# Aula 3 - Grafos Bipartidos e Árvores

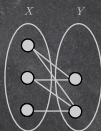
Luís Felipe

UFF

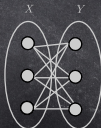
17 de Março de 2026

# Grafos Bipartidos

- Um grafo  $G = (V, E)$  é **bipartido** se  $V$  admite **partição** em dois subconjuntos  $X$  e  $Y$  tais que toda aresta em  $E$  possui um extremo em  $X$  e o outro extremo em  $Y$ . Essa partição de  $V(G)$  é chamada de **bipartição de  $V$** .



- Um grafo é **bipartido completo**, denotado por  $K_{p,q}$ , é um grafo bipartido  $(X, Y, E)$  com  $|X| = p$ ,  $|Y| = q$  e  $|E| = p \times q$ . Ou seja,  $K_{p,q}$  tem todas as arestas possíveis com um extremo em  $X$  e o outro em  $Y$ .



## Grafos Bipartidos

Teorema 2: Um grafo bipartido  $k$ -regular, com  $k > 0$  e com bipartição de  $V$  em  $X$  e  $Y$ , satisfaz  $|X| = |Y|$ .

- **Prova:** Num grafo bipartido,

$$m = \sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y} d(v).$$

Como  $G$  é  $k$ -regular,

$$\sum_{v \in X} d(v) = k|X|$$

e

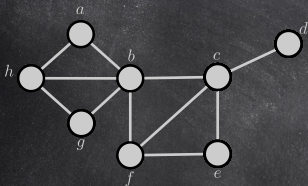
$$\sum_{v \in Y} d(v) = k|Y|.$$

Logo,  $k|X| = k|Y|$  e, como  $k > 0$ ,  $|X| = |Y|$ .

# Passeio, trilha e caminho

- **Passeio:** uma sequência  $v_1, v_2, \dots, v_k$  de vértices de  $V$  com  $v_i v_{i+1} \in E$ , onde  $i = 1, 2, \dots, k-1$ .
  - ▶ **Comprimento do passeio** = número de arestas.
- **Trilha:** um passeio onde as **arestas são distintas**.
- **Caminho:** um passeio onde os **vértices são distintos**.
- **Ciclo:** é um passeio **fechado**  $v_1, v_2, \dots, v_k = v_1$ , onde  $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$  é um **caminho**.
  - ▶ **Comprimento do ciclo** = número de arestas = número de vértices
  - ▶ Se o ciclo tem comprimento par, é dito **ciclo par**.
  - ▶ Caso contrário, é dito **ciclo ímpar**.
  - ▶ A **cintura** é o comprimento do menor ciclo de  $G$ .

### Exemplo 7:



$a, b, c, d, c, e$  é um passeio

$a, b, c, d, c, e$  não é uma trilha

$a, b, c, d, c, e$  não é um caminho

$a, b, c, f, b, g$  é uma trilha

$a, b, c, f, b, g$  não é um caminho

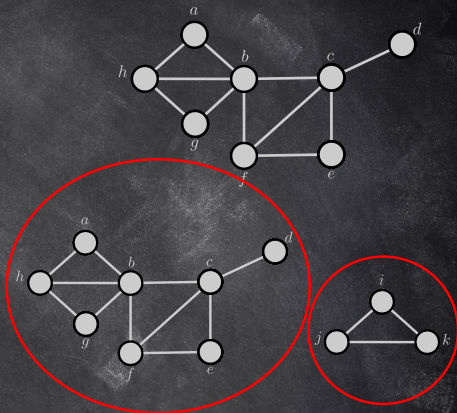
$h, b, c, d$  é um caminho

$a, b, h, a$  é um ciclo ímpar

$a, b, g, h, a$  é um ciclo par

## Conexidade

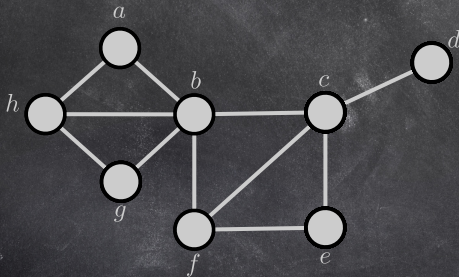
- Um grafo  $G$  é **conexo** se existe caminho entre qualquer par de vértices de  $G$ .
- Um grafo  $G$  é **desconexo** quando não é conexo.
- Uma **componente conexa** de um grafo  $G$  é um **subgrafo conexo maximal**.
  - Denotamos por  $w(G)$  o **número de componentes conexas** de  $G$ .



## Distância, Excentricidade, Diâmetro e Centro

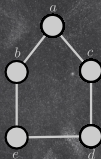
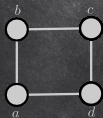
- A **distância** entre dois vértices  $u, v \in V$ , denotada por  $d(u, v)$ , é o **tamanho do menor caminho** entre  $u$  e  $v$  em  $G$ .
  - Quando não há caminho entre os vértices  $u, v$ ,  $d(u, v) = \infty$
- A **excentricidade** de um vértice  $v \in V$ , denotada por  $e(v)$ , é o valor da **maior distância** entre  $v$  e os demais vértices de  $V$ .
- O **diâmetro** de um grafo  $G$ , denotado por  $\text{diam}(G)$  é o valor da **maior excentricidade** dos vértices de  $G$ .
- O **centro** de um grafo  $G$ , denotado por  $C(G)$ , é o **conjunto** dos **vértices de menor excentricidade** do grafo.

**Exercício:** Determine as distâncias entre todos os pares de vértices, a excentricidade de cada vértice, o diâmetro e o centro do grafo abaixo.



## (Outros) Tipos importantes de grafos

- Um grafo é um **grafo ciclo** de tamanho  $n$ , denotado por  $C_n$ ,  $n \geq 3$ , se  $G$  consiste de um único ciclo.

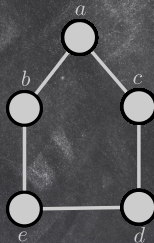
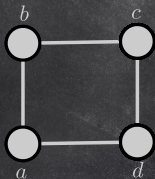


- Um grafo é um **grafo caminho** de tamanho  $n - 1$ , denotado por  $P_n$ ,  $n \geq 2$ , se  $G$  consiste de um único caminho com  $n$  vértices.



## Caracterização de Grafos Bipartidos

**Exercício:** Determine se os seguintes grafos são bipartidos.



- Note que não existe bipartição para o  $C_5$ .

## Caracterização de Grafos Bipartidos

**Teorema 3.** Um grafo  $G = (V, E)$  é bipartido se, e somente se,  $G$  não possui ciclo ímpar.

## Demonstração (ida)

### Prova:

$\Rightarrow$  Seja  $G$  bipartido com bipartição em  $X$  e  $Y$  e seja  $C = v_0, v_1, \dots, v_k, v_0$  um ciclo arbitrário de  $G$ . Suponha, **sem perda de generalidade**, que  $v_0 \in X$ . Assim, como  $v_0 v_1$  é uma aresta de  $G$  e  $G$  é bipartido, temos que  $v_1 \in Y$ . Da mesma forma,  $v_2 \in X$ . De modo geral,  $v_{2i} \in X$  e  $v_{2i+1} \in Y$ . Note que colocamos  $v_0$  em  $X$ , e como existe a aresta  $v_k v_0$  em  $G$ , então  $v_k$  pertence a  $Y$ . Ou seja,  $k$  é ímpar ( $k = 2i + 1$ , para algum  $i$ ). Isso implica que  $C$ , de tamanho  $k + 1$ , possui tamanho par.

## Demonstração (volta)

Prova (continuação):



Note que é suficiente considerarmos  $G$  conexo (se  $G$  não fosse conexo, bastava analisar cada componente conexa separadamente). Suponha  $G$  um grafo sem ciclos ímpares. Escolha um vértice arbitrário  $u \in V(G)$ . Como  $G$  é conexo, definimos uma partição dos vértices de  $G$  em relação a distância dentre  $u$  e os demais vértices de  $V$  pela seguinte associação:

$$\begin{aligned} X &= \{x \in V \mid d(u, x) \text{ é par} \} \\ Y &= \{y \in V \mid d(u, y) \text{ é ímpar} \} \end{aligned}$$

Resta mostrar que  $X$  e  $Y$  formam uma bipartição de  $V(G)$ , ou seja, vamos mostrar que não há aresta entre dois vértices de uma mesma parte.

## Demonstração (volta, continuação)

### Prova (continuação):

Considere  $v$  e  $w$  dois vértices de  $X$ . Portanto, a distância entre  $u$  e  $v$  é par, bem como a distância entre  $u$  e  $w$  é par.

Considere  $P$  um caminho de menor comprimento de  $u$  até  $v$  e  $Q$  um caminho de menor comprimento de  $u$  até  $w$ .

Considere  $u'$  o último vértice comum que pertença tanto a  $P$  quanto a  $Q$  (note que, eventualmente,  $u' = u$ ).

Como  $P$  e  $Q$  são caminhos de menores tamanhos, então os caminhos de  $u$  até  $u'$  tanto em  $P$  quanto em  $Q$  possuem o mesmo tamanho.

Como  $P$  e  $Q$  possuem comprimentos pares, os caminhos entre  $u'$  e  $v$  e entre  $u'$  e  $w$  possuem a mesma paridade.

Implicando, então, que o caminho entre  $v$  e  $w$  utilizando arestas de  $P$  e  $Q$ , passando por  $u'$ , possui comprimento par. Seja  $P'Q'$  este caminho.

## Demonstração (volta, conclusão)

### Prova (conclusão):

Se  $v$  e  $w$  fossem vizinhos, teríamos, portanto, um **ciclo ímpar** obtido pelo caminho  $P'Q'$  e pela aresta  $vw$ .

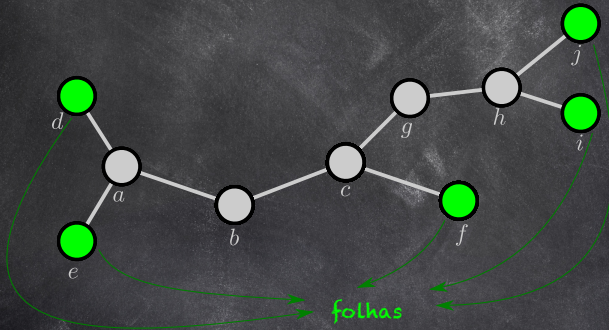
Porém, dado que **não existe ciclo ímpar** em  $G$  (por hipótese), então **não existe a aresta  $vw$** . Ou seja, não existe aresta entre dois vértices da mesma parte  $X$ .

Analogamente, segue para quando analisamos dois vértices de  $Y$ .

# Árvores

Uma **árvore** é um grafo **conexo** e **sem ciclos**.

**Exemplo 1:**



**OBS.:** Toda árvore é, por definição, um grafo bipartido.

# Árvores

**Teorema 4.** Um grafo é uma árvore se, e somente se, entre cada par de vértices existe um único caminho.

- **Dem.:**

( $\leftarrow$ ) Se, entre cada par de vértices existe caminho, então  $G$  é conexo. Além disso, como o caminho é único,  $G$  não possui ciclos.

# Árvores

- Dem. (continuação):

( $\rightarrow$ ) Agora, seja  $G$  uma árvore e suponha que, entre os vértices  $u$  e  $v$  existam dois caminhos distintos  $P$  e  $P'$ . Tome  $xy \in E(P)$  tal que  $xy \notin E(P')$ .

Considere o subgrafo induzido por  $P \cup P'$  e remova deste subgrafo a aresta  $xy$ . Note que  $(P \cup P') \setminus \{xy\}$  é conexo. Logo, existe um caminho  $P''$  entre  $x$  e  $y$  neste subgrafo. Portanto  $P'' + \{xy\}$  é um ciclo em  $G$ . Absurdo.

