

Aula 1 - Grafos: Motivação e Conceitos básicos

Luís Felipe

UFF

10 de Março de 2026

Luís Felipe
10/03/26

O que é um Algoritmo??

O que é um Algoritmo??

- Sequência finita de **regras**, raciocínios ou operações que, aplicada a um número finito de dados, permite **solucionar** classes semelhantes de **problemas**. (Wikipedia)

O que é um Algoritmo??

- Sequência finita de **regras**, raciocínios ou operações que, aplicada a um número finito de dados, permite **solucionar** classes semelhantes de **problemas**. (Wikipedia)
- Dado um problema, existem duas questões acerca da sua resolução:

O que é um Algoritmo??

- Sequência finita de **regras**, raciocínios ou operações que, aplicada a um número finito de dados, permite **solucionar** classes semelhantes de **problemas**. (Wikipedia)
- Dado um problema, existem duas questões acerca da sua resolução:
 - ▶ Consigo resolvê-lo?

O que é um Algoritmo??

- Sequência finita de **regras**, raciocínios ou operações que, aplicada a um número finito de dados, permite **solucionar** classes semelhantes de **problemas**. (Wikipedia)
- Dado um problema, existem duas questões acerca da sua resolução:
 - ▶ Consigo resolvê-lo?
 - ▶ Consigo resolvê-lo **eficientemente**?

Luis Felipe
10/03/26

O problema das 7 pontes de Königsberg



Charge de Simon Kneebone, sobre as pontes de Königsberg.

Luís Felipe
10/03/26

O problema das 7 pontes de Königsberg

- Em 1736, na antiga Prússia

O problema das 7 pontes de Königsberg

- Em 1736, na antiga Prússia
- Os moradores gostariam de saber se era possível um caminho que percorresse cada uma das sete pontes, sem repetição, e que retornasse ao ponto de partida.

O problema das 7 pontes de Königsberg

- Em 1736, na antiga Prússia
- Os moradores gostariam de saber se era possível um caminho que percorresse cada uma das sete pontes, sem repetição, e que retornasse ao ponto de partida.
- Solucionado por Leonhard Euler dando origem à Teoria dos Grafos.

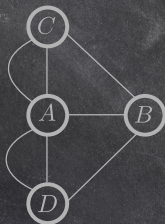
Luis Felipe
10/03/26

O problema das 7 pontes de Königsberg

Modelagem utilizando Teoria dos Grafos:

O problema das 7 pontes de Königsberg

Modelagem utilizando Teoria dos Grafos:



Grafo que modela o problema das 7 pontes de Königsberg.

O problema das 7 pontes de Königsberg

- Euler concluiu que **não** era possível efetuar o percurso sem repetição de arestas.

O problema das 7 pontes de Königsberg

- Euler concluiu que **não** era possível efetuar o percurso sem repetição de arestas.
- Por quê?

O problema das 7 pontes de Königsberg

- Euler concluiu que **não** era possível efetuar o percurso sem repetição de arestas.
- Por quê?
- Cada **nó** ou **vértice** possui um número ímpar de **arestas** incidentes.

O que é um Grafo??

- Conjunto de pontos, chamados **vértices**, conectados por linhas, chamadas de **arestas**. (Wikipedia)

O que é um Grafo??

- Conjunto de pontos, chamados **vértices**, conectados por linhas, chamadas de **arestas**. (Wikipedia)
- Representação de **relacionamento** de **objetos**.

O que é um Grafo??

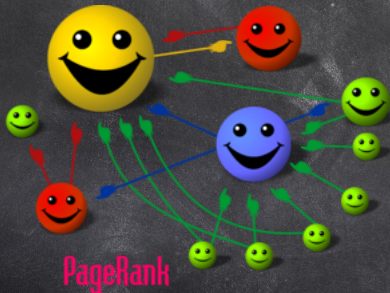
- Conjunto de pontos, chamados **vértices**, conectados por linhas, chamadas de **arestas**. (Wikipedia)
- Representação de **relacionamento** de **objetos**.
 - ▶ Quais objetos?

O que é um Grafo??

- Conjunto de pontos, chamados **vértices**, conectados por linhas, chamadas de **arestas**. (Wikipedia)
- Representação de **relacionamento** de **objetos**.
 - ▶ Quais objetos?
 - ▶ Quais relacionamentos?

O que é um Grafo??

- Conjunto de pontos, chamados **vértices**, conectados por linhas, chamadas de **arestas**. (Wikipedia)
- Representação de **relacionamento** de **objetos**.
 - ▶ Quais objetos?
 - ▶ Quais relacionamentos?



Luis Felipe
10/03/26

Mapa aéreo

- Voos entre todas as cidades?

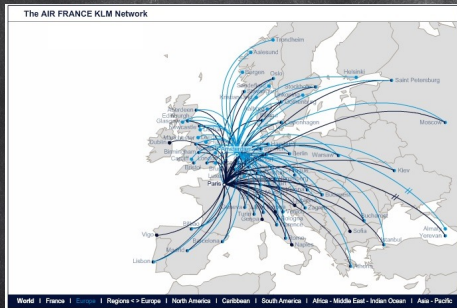
Luis Felipe
10/03/26

Mapa aéreo

- Voos entre todas as cidades?
- Qual o menor número de voos entre duas cidades?

Mapa aéreo

- Voos entre todas as cidades?
- Qual o menor número de voos entre duas cidades?



Luis Felipe
10/03/26

Vamos colorir??

Luis Felipe
10/03/26

Vamos colorir??



Luís Felipe
10/03/26

Modelagem utilizando grafos

- Cada estado é um **vértice**

Modelagem utilizando grafos

- Cada estado é um **vértice**
- Se os estados fazem fronteira, então os vértices correspondentes recebem uma **aresta**.

Modelagem utilizando grafos

- Cada estado é um **vértice**
- Se os estados fazem fronteira, então os vértices correspondentes recebem uma **aresta**.
- Assim, o objetivo é colorir tal grafo com o menor número de cores de modo que vértices adjacentes recebam cores distintas.

Luís Felipe
10/03/26

Vamos colorir??



Luis Felipe
10/03/26

Teorema das quatro cores

Dado um mapa plano, dividido em regiões, quatro cores são suficientes para colori-lo de forma a que regiões vizinhas não partilhem a mesma cor.

Luís Felipe
10/03/26

Teorema das quatro cores

Dado um mapa plano, dividido em regiões, quatro cores são suficientes para colori-lo de forma a que regiões vizinhas não partilhem a mesma cor.

- Um único ponto não é considerado fronteira.

Luis Felipe
10/03/26

Teorema das quatro cores

- O problema surgiu em 1852 quando um advogado conjecturou que com 4 cores seria possível colorir qualquer mapa sem que regiões vizinhas tivessem a mesma cor.

Teorema das quatro cores

- O problema surgiu em 1852 quando um advogado conjecturou que com 4 cores seria possível colorir qualquer mapa sem que regiões vizinhas tivessem a mesma cor.
- Solucionado em 1976 por Kenneth Appel e Wolfgang Haken, utilizando um computador IBM 360, que teve de realizar bilhões de cálculos.

Teorema das quatro cores

- O problema surgiu em 1852 quando um advogado conjecturou que com 4 cores seria possível colorir qualquer mapa sem que regiões vizinhas tivessem a mesma cor.
- Solucionado em 1976 por Kenneth Appel e Wolfgang Haken, utilizando um computador IBM 360, que teve de realizar bilhões de cálculos.
- Em 1994 foi produzida uma prova simplificada por Paul Seymour, Neil Robertson, Daniel Sanders e Robin Thomas.

Teorema das quatro cores

- O problema surgiu em 1852 quando um advogado conjecturou que com 4 cores seria possível colorir qualquer mapa sem que regiões vizinhas tivessem a mesma cor.
- Solucionado em 1976 por Kenneth Appel e Wolfgang Haken, utilizando um computador IBM 360, que teve de realizar bilhões de cálculos.
- Em 1994 foi produzida uma prova simplificada por Paul Seymour, Neil Robertson, Daniel Sanders e Robin Thomas.
- Até hoje ninguém conseguiu uma demonstração do Teorema que não recorra a um computador.

Formalmente, um grafo é...

Um **grafo simples**, ou simplesmente **grafo**, é um par (V, E) , denotado por $G = (V, E)$, onde V é um conjunto finito de **vértices** e E é um conjunto de pares não ordenados de elementos distintos de V , denominados **arestas**.

Formalmente, um grafo é...

Um **grafo simples**, ou simplesmente **grafo**, é um par (V, E) , denotado por $G = (V, E)$, onde V é um conjunto finito de **vértices** e E é um conjunto de pares não ordenados de elementos distintos de V , denominados **arestas**.

Exemplo 1: $G = (V, E)$, onde $V = \{a, b, c, d, e\}$
 $E = \{ab, ae, bd, be, cd\}$

Formalmente, um grafo é...

Um **grafo simples**, ou simplesmente **grafo**, é um par (V, E) , denotado por $G = (V, E)$, onde V é um conjunto finito de **vértices** e E é um conjunto de pares não ordenados de elementos distintos de V , denominados **arestas**.

Exemplo 1: $G = (V, E)$, onde $V = \{a, b, c, d, e\}$
 $E = \{ab, ae, bd, be, cd\}$
é um **grafo**.

- Dado um grafo $G = (V, E)$, uma **aresta** $e \in E$ é denotada pelo par não-ordenado vw que a forma, onde $v, w \in V$.

- Dado um grafo $G = (V, E)$, uma **aresta** $e \in E$ é denotada pelo par não-ordenado vw que a forma, onde $v, w \in V$.
 - ▶ v, w são ditos **extremos** de e .

- Dado um grafo $G = (V, E)$, uma **aresta** $e \in E$ é denotada pelo par não-ordenado vw que a forma, onde $v, w \in V$.
 - ▶ v, w são ditos **extremos** de e .
 - ▶ e é dita **incidente** aos vértices v e w .

- Dado um grafo $G = (V, E)$, uma **aresta** $e \in E$ é denotada pelo par não-ordenado vw que a forma, onde $v, w \in V$.
 - ▶ v, w são ditos **extremos** de e .
 - ▶ e é dita **incidente** aos vértices v e w .
- Denotaremos por **n** a **cardinalidade de V** , i.e., $|V| = n$, e por **m** a **cardinalidade de E** , i.e., $|E| = m$.

- Dado um grafo $G = (V, E)$, uma **aresta** $e \in E$ é denotada pelo par não-ordenado vw que a forma, onde $v, w \in V$.
 - ▶ v, w são ditos **extremos** de e .
 - ▶ e é dita **incidente** aos vértices v e w .
- Denotaremos por **n** a **cardinalidade de V** , i.e., $|V| = n$, e por **m** a **cardinalidade de E** , i.e., $|E| = m$.
- O **tamanho** do grafo G é $n + m$.

Representação geométrica no plano

- Vértice $v \rightarrow$



Representação geométrica no plano

- Vértice v $\rightarrow$

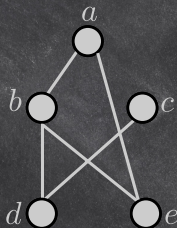


- Aresta vw $\rightarrow$

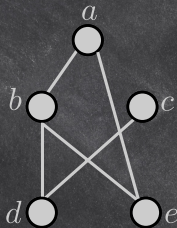


Exemplo 2: $G = (V, E)$, onde $V = \{a, b, c, d, e\}$
 $E = \{ab, ae, bd, be, cd\}$

Exemplo 2: $G = (V, E)$, onde $V = \{a, b, c, d, e\}$
 $E = \{ab, ae, bd, be, cd\}$

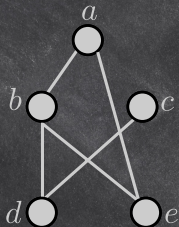


Exemplo 2: $G = (V, E)$, onde $V = \{a, b, c, d, e\}$
 $E = \{ab, ae, bd, be, cd\}$

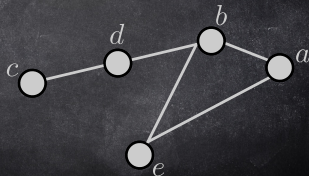


Esta é a única **representação geométrica** para o grafo G ?

Exemplo 2: $G = (V, E)$, onde $V = \{a, b, c, d, e\}$
 $E = \{ab, ae, bd, be, cd\}$



Esta é a única **representação geométrica** para o grafo G ?



Multigrafo

Um **multigrafo** é um grafo que admite **laços**, i.e., arestas com extremos idênticos, e **arestas paralelas**, i.e., pares não ordenados iguais de elementos distintos de V .

Multigrafo

Um **multigrafo** é um grafo que admite **laços**, i.e., arestas com extremos idênticos, e **arestas paralelas**, i.e., pares não ordenados iguais de elementos distintos de V .

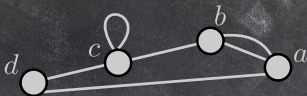
Exemplo 3: $G = (V, E)$, $V = \{a, b, c, d\}$
 $E(G) = \{ \underbrace{ab, ab}_{\text{arestas paralelas}}, bc, cd, da, \underbrace{cc}_{\text{laço}} \}$

Multigrafo

Um **multigrafo** é um grafo que admite **laços**, i.e., arestas com extremos idênticos, e **arestas paralelas**, i.e., pares não ordenados iguais de elementos distintos de V .

Exemplo 3: $G = (V, E)$, $V = \{a, b, c, d\}$

$$E(G) = \{ \underbrace{ab, ab}_{\text{arestas paralelas}}, bc, cd, da, \underbrace{cc}_{\text{laço}} \}$$

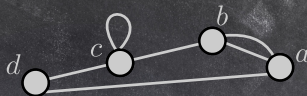


Multigrafo

Um **multigrafo** é um grafo que admite **laços**, i.e., arestas com extremos idênticos, e **arestas paralelas**, i.e., pares não ordenados iguais de elementos distintos de V .

Exemplo 3: $G = (V, E)$, $V = \{a, b, c, d\}$

$$E(G) = \{ \underbrace{ab, ab}_{\text{arestas paralelas}}, bc, cd, da, \underbrace{cc}_{\text{laço}} \}$$



OBS.: Neste curso, salvo quando dito o contrário, os grafos considerados são grafos simples.

Vizinhança e grau de um vértice

- Dois vértices $v, w \in V$ são ditos **adjacentes** quando $vw \in E$.

Vizinhança e grau de um vértice

- Dois vértices $v, w \in V$ são ditos **adjacentes** quando $vw \in E$.
- A **vizinhança** de um vértice $v \in V$, denotada por $N(v)$, é o conjunto de todos os vértices adjacentes a v em G .

Vizinhança e grau de um vértice

- Dois vértices $v, w \in V$ são ditos **adjacentes** quando $vw \in E$.
- A **vizinhança** de um vértice $v \in V$, denotada por $N(v)$, é o conjunto de todos os vértices adjacentes a v em G .
- A **vizinhança fechada** de um vértice $v \in V$, denotada por $N[v]$, é dada por $N[v] = N(v) \cup \{v\}$.

Vizinhança e grau de um vértice

- Dois vértices $v, w \in V$ são ditos **adjacentes** quando $vw \in E$.
- A **vizinhança** de um vértice $v \in V$, denotada por $N(v)$, é o conjunto de todos os vértices adjacentes a v em G .
- A **vizinhança fechada** de um vértice $v \in V$, denotada por $N[v]$, é dada por $N[v] = N(v) \cup \{v\}$.
- O **grau de um vértice** $v \in V$, denotado por $d(v)$, é o número de arestas incidentes a v .

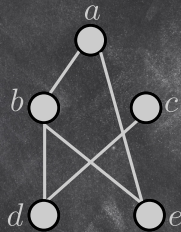
Vizinhança e grau de um vértice

- Dois vértices $v, w \in V$ são ditos **adjacentes** quando $vw \in E$.
- A **vizinhança** de um vértice $v \in V$, denotada por $N(v)$, é o conjunto de todos os vértices adjacentes a v em G .
- A **vizinhança fechada** de um vértice $v \in V$, denotada por $N[v]$, é dada por $N[v] = N(v) \cup \{v\}$.
- O **grau de um vértice** $v \in V$, denotado por $d(v)$, é o número de arestas incidentes a v .

OBS.: Em um multigrafo, um **laço** adiciona **2** unidades ao grau do vértice.

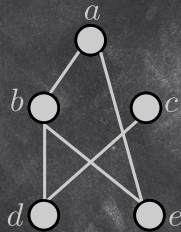
Exemplo 4: Considerando o grafo do Exemplo 3

- $N(a) = \{b, e\}$ e $d(a) = 2$



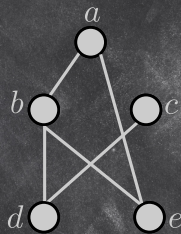
Exemplo 4: Considerando o grafo do Exemplo 3

- $N(a) = \{b, e\}$ e $d(a) = 2$
- $N(b) = \{a, d, e\}$ e $d(b) = 3$



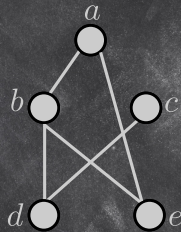
Exemplo 4: Considerando o grafo do Exemplo 3

- $N(a) = \{b, e\}$ e $d(a) = 2$
- $N(b) = \{a, d, e\}$ e $d(b) = 3$
- $N(c) = \{d\}$ e $d(c) = 1$



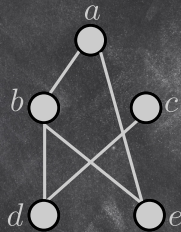
Exemplo 4: Considerando o grafo do Exemplo 3

- $N(a) = \{b, e\}$ e $d(a) = 2$
- $N(b) = \{a, d, e\}$ e $d(b) = 3$
- $N(c) = \{d\}$ e $d(c) = 1$
- $N(d) = \{b, c\}$ e $d(d) = 2$



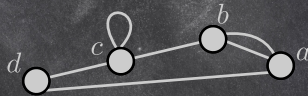
Exemplo 4: Considerando o grafo do Exemplo 3

- $N(a) = \{b, e\}$ e $d(a) = 2$
- $N(b) = \{a, d, e\}$ e $d(b) = 3$
- $N(c) = \{d\}$ e $d(c) = 1$
- $N(d) = \{b, c\}$ e $d(d) = 2$
- $N(e) = \{a, b\}$ e $d(e) = 2$



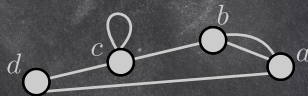
Exemplo 5: Considerando o grafo do Exemplo 4:

- $N(a) = \{b, d\}$ e $d(a) = 3$



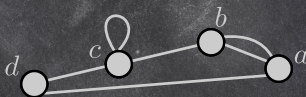
Exemplo 5: Considerando o grafo do Exemplo 4:

- $N(a) = \{b, d\}$ e $d(a) = 3$
- $N(b) = \{a, c\}$ e $d(b) = 3$



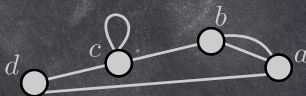
Exemplo 5: Considerando o grafo do Exemplo 4:

- $N(a) = \{b, d\}$ e $d(a) = 3$
- $N(b) = \{a, c\}$ e $d(b) = 3$
- $N(c) = \{c, b, d\}$ e $d(c) = 4$



Exemplo 5: Considerando o grafo do Exemplo 4:

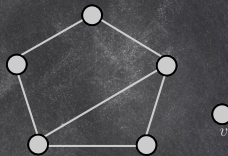
- $N(a) = \{b, d\}$ e $d(a) = 3$
- $N(b) = \{a, c\}$ e $d(b) = 3$
- $N(c) = \{c, b, d\}$ e $d(c) = 4$
- $N(d) = \{c, a\}$ e $d(d) = 2$



- Um vértice v é dito **isolado** quando $N(v) = \emptyset$.

- Um vértice v é dito **isolado** quando $N(v) = \emptyset$.
- Um vértice v é dito **universal** quando $N[v] = V$.

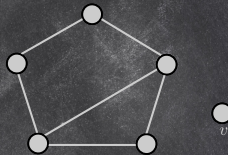
Exemplo 6:



- Um vértice v é dito **isolado** quando $N(v) = \emptyset$.
- Um vértice v é dito **universal** quando $N[v] = V$.

Exemplo 6:

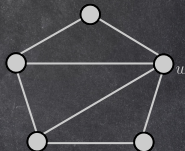
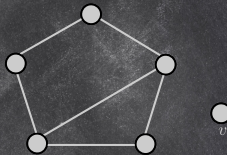
O vértice v é um vértice **isolado**.



- Um vértice v é dito **isolado** quando $N(v) = \emptyset$.
- Um vértice v é dito **universal** quando $N[v] = V$.

Exemplo 6:

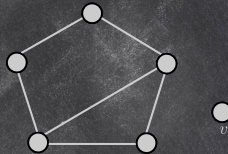
O vértice v é um vértice **isolado**.



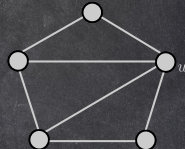
- Um vértice v é dito **isolado** quando $N(v) = \emptyset$.
- Um vértice v é dito **universal** quando $N[v] = V$.

Exemplo 6:

O vértice v é um vértice **isolado**.



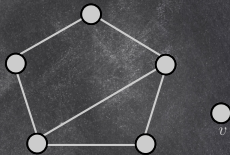
O vértice w é um vértice **universal**.



- Um vértice v é dito **isolado** quando $N(v) = \emptyset$.
- Um vértice v é dito **universal** quando $N[v] = V$.

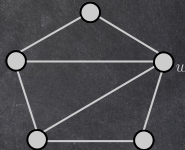
Exemplo 6:

O vértice v é um vértice **isolado**.



O vértice w é um vértice **universal**.

OBS.: Em um mesmo grafo G , não podemos ter um vértice isolado e um vértice universal.



Tipos importantes de grafos

- Um grafo com apenas 1 vértice é dito **trivial**.

Tipos importantes de grafos

- Um grafo com apenas 1 vértice é dito **trivial**.



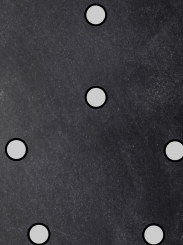
Tipos importantes de grafos

- Um grafo com apenas 1 vértice é dito **trivial**.
- Um grafo com n vértices é **nulo**, denotado por N_n , quando todos os seus vértices são **isolados**.



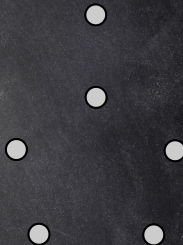
Tipos importantes de grafos

- Um grafo com apenas 1 vértice é dito **trivial**.
- Um grafo com n vértices é **nulo**, denotado por N_n , quando todos os seus vértices são **isolados**.



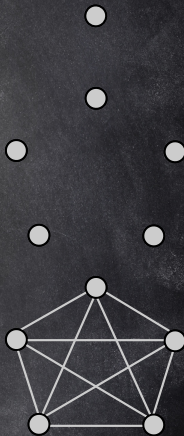
Tipos importantes de grafos

- Um grafo com apenas 1 vértice é dito **trivial**.
- Um grafo com n vértices é **nulo**, denotado por N_n , quando todos os seus vértices são **isolados**.
- Um grafo com n vértices é **completo**, denotado por K_n , quando todos os seus vértices são **universais**.



Tipos importantes de grafos

- Um grafo com apenas 1 vértice é dito **trivial**.
- Um grafo com n vértices é **nulo**, denotado por N_n , quando todos os seus vértices são **isolados**.
- Um grafo com n vértices é **completo**, denotado por K_n , quando todos os seus vértices são **universais**.



Complemento de um grafo

O **complemento** de um grafo G , denotado por $\overline{G}$, é o grafo que possui o mesmo conjunto de vértices de G e tal que dois vértices distintos são adjacentes em $\overline{G}$ se e somente se **não são adjacentes em G** .

Complemento de um grafo

O **complemento** de um grafo G , denotado por $\overline{G}$, é o grafo que possui o mesmo conjunto de vértices de G e tal que dois vértices distintos são adjacentes em $\overline{G}$ se e somente se **não são adjacentes em G** .

$$V(\overline{G}) = V(G)$$

Complemento de um grafo

O **complemento** de um grafo G , denotado por $\overline{G}$, é o grafo que possui o mesmo conjunto de vértices de G e tal que dois vértices distintos são adjacentes em $\overline{G}$ se e somente se **não são adjacentes em G** .

$$V(\overline{G}) = V(G)$$

$$E(\overline{G}) = \{vw \mid v, w \in V(G) \text{ e } vw \notin E(G)\}$$

Complemento de um grafo

O **complemento** de um grafo G , denotado por $\overline{G}$, é o grafo que possui o mesmo conjunto de vértices de G e tal que dois vértices distintos são adjacentes em $\overline{G}$ se e somente se **não são adjacentes em G** .

$$V(\overline{G}) = V(G)$$

$$E(\overline{G}) = \{vw \mid v, w \in V(G) \text{ e } vw \notin E(G)\}$$

Exemplo:

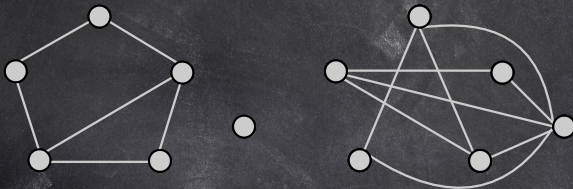
Complemento de um grafo

O **complemento** de um grafo G , denotado por $\overline{G}$, é o grafo que possui o mesmo conjunto de vértices de G e tal que dois vértices distintos são adjacentes em $\overline{G}$ se e somente se **não são adjacentes em G** .

$$V(\overline{G}) = V(G)$$

$$E(\overline{G}) = \{vw \mid v, w \in V(G) \text{ e } vw \notin E(G)\}$$

Exemplo:



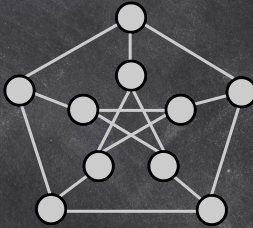
Grafo G à esquerda e seu complemento à direita.

Luis Felipe
10/03/26

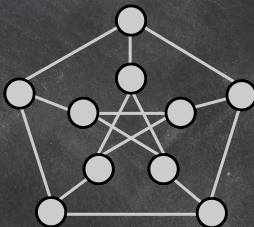
- Um grafo é **d-regular** se $d(v) = d, \forall v \in V$.

- Um grafo é **d-regular** se $d(v) = d, \forall v \in V$.
 - Um grafo 3-regular é chamado de grafo **cúbico**.
- Exemplo:** O **grafo de Petersen** é cúbico.

- Um grafo é **d-regular** se $d(v) = d, \forall v \in V$.
 - Um grafo 3-regular é chamado de grafo **cúbico**.
- Exemplo:** O **grafo de Petersen** é cúbico.

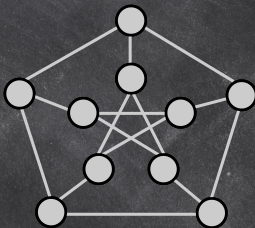


- Um grafo é **d-regular** se $d(v) = d, \forall v \in V$.
- Um grafo 3-regular é chamado de grafo **cúbico**.
Exemplo: O **grafo de Petersen** é cúbico.



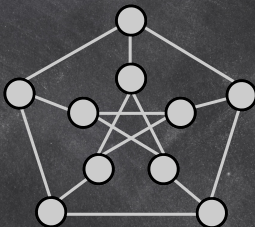
- Denotamos por $\delta(G)$ e $\Delta(G)$ os **graus mínimo** e **máximo** de um grafo G , respectivamente.

- Um grafo é **d-regular** se $d(v) = d, \forall v \in V$.
- Um grafo 3-regular é chamado de grafo **cúbico**.
Exemplo: O **grafo de Petersen** é cúbico.



- Denotamos por $\delta(G)$ e $\Delta(G)$ os **graus mínimo** e **máximo** de um grafo G , respectivamente.
- Se $\Delta(G) = 3$, dizemos que G é um grafo **subcúbico**.

- Um grafo é **d-regular** se $d(v) = d, \forall v \in V$.
- Um grafo 3-regular é chamado de grafo **cúbico**.
Exemplo: O **grafo de Petersen** é cúbico.



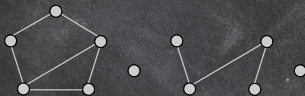
- Denotamos por $\delta(G)$ e $\Delta(G)$ os **graus mínimo** e **máximo** de um grafo G , respectivamente.
- Se $\Delta(G) = 3$, dizemos que G é um grafo **subcúbico**.
- A **sequência de graus** de um grafo G é a sequência não crescente dos graus dos vértices de G .

Subgrafos

- Seja $G = (V, E)$ um grafo. $H = (V(H), E(H))$ é dito **subgrafo** de G se $V(H) \subseteq V$ e $E(H) \subseteq E$.

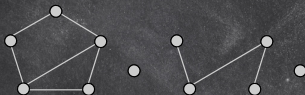
Subgrafos

- Seja $G = (V, E)$ um grafo. $H = (V(H), E(H))$ é dito **subgrafo** de G se $V(H) \subseteq V$ e $E(H) \subseteq E$.



Subgrafos

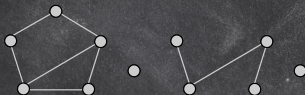
- Seja $G = (V, E)$ um grafo. $H = (V(H), E(H))$ é dito **subgrafo** de G se $V(H) \subseteq V$ e $E(H) \subseteq E$.



- Um subgrafo $H = (V(H), E(H))$ é um **subgrafo gerador** de G se H é subgrafo de G e $V(H) = V$.

Subgrafos

- Seja $G = (V, E)$ um grafo. $H = (V(H), E(H))$ é dito **subgrafo** de G se $V(H) \subseteq V$ e $E(H) \subseteq E$.



- Um subgrafo $H = (V(H), E(H))$ é um **subgrafo gerador** de G se H é subgrafo de G e $V(H) = V$.

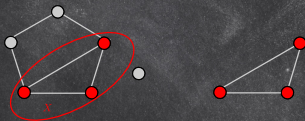


Subgrafos

- Seja $X \subseteq V$. Um grafo $H = (V(H), E(H))$ é um **subgrafo induzido** de G por X , denotado por $H = G[X]$ se $V(H) = X$ e $E(H) = \{vw \in E(G) \mid v, w \in X\}$.

Subgrafos

- Seja $X \subseteq V$. Um grafo $H = (V(H), E(H))$ é um **subgrafo induzido** de G por X , denotado por $H = G[X]$ se $V(H) = X$ e $E(H) = \{vw \in E(G) \mid v, w \in X\}$.



Subgrafos

- Seja $X \subseteq V$. Um grafo $H = (V(H), E(H))$ é um **subgrafo induzido** de G por X , denotado por $H = G[X]$ se $V(H) = X$ e $E(H) = \{vw \in E(G) \mid v, w \in X\}$.



- Seja $Y \subseteq E$. Um subgrafo $H = (V(H), E(H))$ é um **subgrafo induzido** de G por Y , denotado por $H = G[Y]$ se $E(H) = Y$ e $V(H) = \{v, w \in V(G) \mid vw \in Y\}$.

Subgrafos

- Seja $X \subseteq V$. Um grafo $H = (V(H), E(H))$ é um **subgrafo induzido** de G por X , denotado por $H = G[X]$ se $V(H) = X$ e $E(H) = \{vw \in E(G) \mid v, w \in X\}$.



- Seja $Y \subseteq E$. Um subgrafo $H = (V(H), E(H))$ é um **subgrafo induzido** de G por Y , denotado por $H = G[Y]$ se $E(H) = Y$ e $V(H) = \{v, w \in V(G) \mid vw \in Y\}$.



Luis Felipe
10/03/26

Cliques e Conjuntos independentes

Dado um grafo G ,

Cliques e Conjuntos independentes

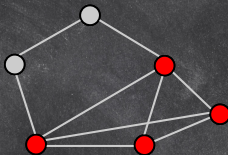
Dado um grafo G ,

- Uma **clique** de G é um conjunto de vértices $V' \subseteq V$ tal $G[V']$ é um grafo completo.

Cliques e Conjuntos independentes

Dado um grafo G ,

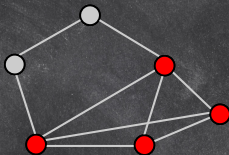
- Uma **clique** de G é um conjunto de vértices $V' \subseteq V$ tal $G[V']$ é um grafo completo.



Cliques e Conjuntos independentes

Dado um grafo G ,

- Uma **clique** de G é um conjunto de vértices $V' \subseteq V$ tal $G[V']$ é um grafo completo.

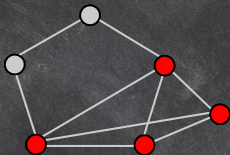


- Um **conjunto independente** de G é conjunto de vértices $V' \subseteq V$ tal que $G[V']$ é grafo nulo.

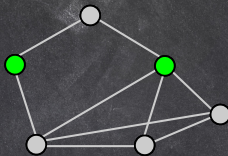
Cliques e Conjuntos independentes

Dado um grafo G ,

- Uma **clique** de G é um conjunto de vértices $V' \subseteq V$ tal $G[V']$ é um grafo completo.



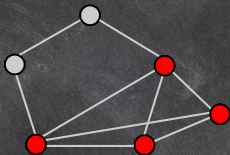
- Um **conjunto independente** de G é conjunto de vértices $V' \subseteq V$ tal que $G[V']$ é grafo nulo.



Cliques e Conjuntos independentes

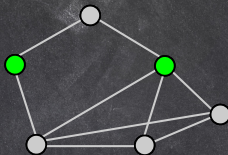
Dado um grafo G ,

- Uma **clique** de G é um conjunto de vértices $V' \subseteq V$ tal $G[V']$ é um grafo completo.



- Um **conjunto independente** de G é conjunto de vértices $V' \subseteq V$ tal que $G[V']$ é grafo nulo.

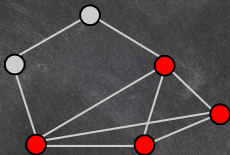
Existe outro conjunto independente?



Cliques e Conjuntos independentes

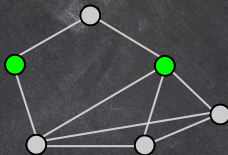
Dado um grafo G ,

- Uma **clique** de G é um conjunto de vértices $V' \subseteq V$ tal $G[V']$ é um grafo completo.



- Um **conjunto independente** de G é conjunto de vértices $V' \subseteq V$ tal que $G[V']$ é grafo nulo.

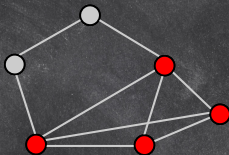
Existe outro conjunto independente?



Cliques e Conjuntos independentes

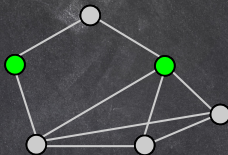
Dado um grafo G ,

- Uma **clique** de G é um conjunto de vértices $V' \subseteq V$ tal $G[V']$ é um grafo completo.



- Um **conjunto independente** de G é conjunto de vértices $V' \subseteq V$ tal que $G[V']$ é grafo nulo.

Existe outro conjunto independente?

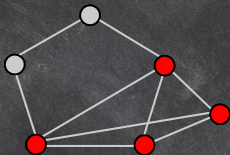


Existe conjunto independente maior?

Cliques e Conjuntos independentes

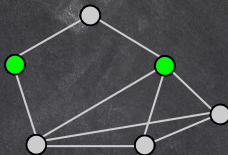
Dado um grafo G ,

- Uma **clique** de G é um conjunto de vértices $V' \subseteq V$ tal $G[V']$ é um grafo completo.



- Um **conjunto independente** de G é conjunto de vértices $V' \subseteq V$ tal que $G[V']$ é grafo nulo.

Existe outro conjunto independente?



Existe conjunto independente maior?

Não!!!

Máximo x Maximal

- Um subgrafo H de G é **maximal** (resp. **minimal**) com relação a uma **propriedade $\mathcal{P}$** se **H satisfaz $\mathcal{P}$** e não existe H' satisfazendo $\mathcal{P}$ tal que **$H \subset H'$** (resp. **$H' \subset H$**).

Máximo x Maximal

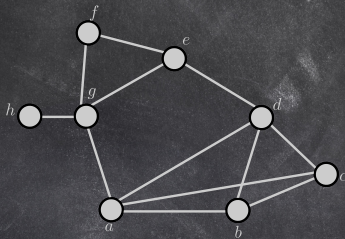
- Um subgrafo H de G é **maximal** (resp. **minimal**) com relação a uma **propriedade $\mathcal{P}$** se H **satisfaz $\mathcal{P}$** e não existe H' satisfazendo $\mathcal{P}$ tal que $H \subset H'$ (resp. $H' \subset H$).
- Um subgrafo $H = (V(H), E(H))$ de G é **máximo** (resp. **mínimo**) com relação a uma **propriedade $\mathcal{P}$** se, dentre todos os subgrafos H' de G **maximais** (resp. **minimais**) com relação a propriedade $\mathcal{P}$,
 $|V(H)| \geq |V(H')|$ (resp. $|V(H)| \leq |V(H')|$).

Máximo x Maximal

Exemplo: Enumere todos os conjuntos independentes e cliques maximais do grafo abaixo. Identifique a cardinalidade do conjunto independente máximo e da clique máxima.

Máximo x Maximal

Exemplo: Enumere todos os conjuntos independentes e cliques maximais do grafo abaixo. Identifique a cardinalidade do conjunto independente máximo e da clique máxima.



Teorema do Aperto de Mãos

Seja $G = (V, E)$, tal que $|V| = n$ e $|E| = m$. Então,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m.$$

Teorema do Aperto de Mãos

Seja $G = (V, E)$, tal que $|V| = n$ e $|E| = m$. Então,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m.$$

- **Prova:** Uma aresta incrementa o grau dos seus dois extremos em uma unidade.

Teorema do Aperto de Mãos

Seja $G = (V, E)$, tal que $|V| = n$ e $|E| = m$. Então,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m.$$

- **Prova:** Uma aresta incrementa o grau dos seus dois extremos em uma unidade. Logo, ao somarmos os graus de todos os vértices de um grafo, estamos considerando cada aresta duas vezes.

Luís Felipe
10/03/26

Corolário 1

O número máximo de arestas em um grafo é $\frac{n(n-1)}{2}$.

Corolário 1

O número máximo de arestas em um grafo é $\frac{n(n-1)}{2}$.

- **Prova:** O grafo com maior número possível de arestas é um grafo completo.

Corolário 1

O número máximo de arestas em um grafo é $\frac{n(n-1)}{2}$.

- **Prova:** O grafo com maior número possível de arestas é um grafo completo. Ele, por definição, é um grafo $(n - 1)$ -regular.

Corolário 1

O número máximo de arestas em um grafo é $\frac{n(n-1)}{2}$.

- **Prova:** O grafo com maior número possível de arestas é um grafo completo. Ele, por definição, é um grafo $(n - 1)$ -regular. Basta utilizar o Teorema do Aperto de Mãos para finalizar a demonstração.

Corolário 1

O número máximo de arestas em um grafo é $\frac{n(n-1)}{2}$.

- **Prova:** O grafo com maior número possível de arestas é um grafo completo. Ele, por definição, é um grafo $(n-1)$ -regular. Basta utilizar o Teorema do Aperto de Mãos para finalizar a demonstração. Ou seja,

$$\sum_{v \in V} d(v) = n(n-1)$$

Corolário 1

O número máximo de arestas em um grafo é $\frac{n(n-1)}{2}$.

- **Prova:** O grafo com maior número possível de arestas é um grafo completo. Ele, por definição, é um grafo $(n-1)$ -regular. Basta utilizar o Teorema do Aperto de Mãos para finalizar a demonstração. Ou seja,

$$\sum_{v \in V} d(v) = n(n-1) = 2m$$

Corolário 1

O número máximo de arestas em um grafo é $\frac{n(n-1)}{2}$.

- **Prova:** O grafo com maior número possível de arestas é um grafo completo. Ele, por definição, é um grafo $(n-1)$ -regular. Basta utilizar o Teorema do Aperto de Mãos para finalizar a demonstração. Ou seja,

$$\sum_{v \in V} d(v) = n(n-1) = 2m \quad \therefore \quad m = \frac{n(n-1)}{2}$$

Corolário 1

O número máximo de arestas em um grafo é $\frac{n(n-1)}{2}$.

- **Prova:** O grafo com maior número possível de arestas é um grafo completo. Ele, por definição, é um grafo $(n-1)$ -regular. Basta utilizar o Teorema do Aperto de Mãos para finalizar a demonstração. Ou seja,

$$\sum_{v \in V} d(v) = n(n-1) = 2m \quad \therefore \quad m = \frac{n(n-1)}{2}$$

- Alguma outra ideia?

Luís Felipe
10/03/26

Corolário 2

O número de vértices de grau ímpar em um grafo é par.

Corolário 2

O número de vértices de grau ímpar em um grafo é par.

- **Prova:** Pelo Teorema do Aperto de Mãos, $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$.

Corolário 2

O número de vértices de grau ímpar em um grafo é par.

- **Prova:** Pelo Teorema do Aperto de Mãos, $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$. Note que $\sum_{v \in V} d(v)$ pode ser separada em termos de valores pares e ímpares.

Corolário 2

O número de vértices de grau ímpar em um grafo é par.

- **Prova:** Pelo Teorema do Aperto de Mãos, $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$. Note que $\sum_{v \in V} d(v)$ pode ser separada em termos de valores pares e ímpares. Ou seja,

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V, d(v) \text{ é ímpar}} d(v) + \sum_{v \in V, d(v) \text{ é par}} d(v)$$

Corolário 2

O número de vértices de grau ímpar em um grafo é par.

- **Prova:** Pelo Teorema do Aperto de Mãos, $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$. Note que $\sum_{v \in V} d(v)$ pode ser separada em termos de valores pares e ímpares. Ou seja,

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V, d(v) \text{ é ímpar}} d(v) + \sum_{v \in V, d(v) \text{ é par}} d(v) = 2m$$

Corolário 2

O número de vértices de grau ímpar em um grafo é par.

- **Prova:** Pelo Teorema do Aperto de Mãos, $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$. Note que $\sum_{v \in V} d(v)$ pode ser separada em termos de valores pares e ímpares. Ou seja,

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V, d(v) \text{ é ímpar}} d(v) + \sum_{v \in V, d(v) \text{ é par}} d(v) = 2m \therefore$$

Corolário 2

O número de vértices de grau ímpar em um grafo é par.

- **Prova:** Pelo Teorema do Aperto de Mãos, $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$. Note que $\sum_{v \in V} d(v)$ pode ser separada em termos de valores pares e ímpares. Ou seja,

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V, d(v) \text{ é ímpar}} d(v) + \sum_{v \in V, d(v) \text{ é par}} d(v) = 2m \therefore$$

$$\sum_{v \in V, d(v) \text{ é ímpar}} d(v) = 2m - \sum_{v \in V, d(v) \text{ é par}} d(v).$$

Corolário 2

O número de vértices de grau ímpar em um grafo é par.

- **Prova:** Pelo Teorema do Aperto de Mãos, $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$. Note que $\sum_{v \in V} d(v)$ pode ser separada em termos de valores pares e ímpares. Ou seja,

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V, d(v) \text{ é ímpar}} d(v) + \sum_{v \in V, d(v) \text{ é par}} d(v) = 2m \therefore$$

$$\sum_{v \in V, d(v) \text{ é ímpar}} d(v) = 2m - \sum_{v \in V, d(v) \text{ é par}} d(v).$$

1. A soma de pares é um número par,

Corolário 2

O número de vértices de grau ímpar em um grafo é par.

- **Prova:** Pelo Teorema do Aperto de Mãos, $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$. Note que $\sum_{v \in V} d(v)$ pode ser separada em termos de valores pares e ímpares. Ou seja,

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V, d(v) \text{ é ímpar}} d(v) + \sum_{v \in V, d(v) \text{ é par}} d(v) = 2m \therefore$$

$$\sum_{v \in V, d(v) \text{ é ímpar}} d(v) = 2m - \sum_{v \in V, d(v) \text{ é par}} d(v).$$

1. A soma de pares é um número par, então $\sum_{v \in V, d(v) \text{ é par}} d(v)$ é par.

Corolário 2

O número de vértices de grau ímpar em um grafo é par.

- **Prova:** Pelo Teorema do Aperto de Mãos, $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$. Note que $\sum_{v \in V} d(v)$ pode ser separada em termos de valores pares e ímpares. Ou seja,

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V, d(v) \text{ é ímpar}} d(v) + \sum_{v \in V, d(v) \text{ é par}} d(v) = 2m \therefore$$

$$\sum_{v \in V, d(v) \text{ é ímpar}} d(v) = 2m - \sum_{v \in V, d(v) \text{ é par}} d(v).$$

1. A soma de pares é um número par, então $\sum_{v \in V, d(v) \text{ é par}} d(v)$ é par.
2. $2m$ é par, e como a subtração de pares é um par,

Corolário 2

O número de vértices de grau ímpar em um grafo é par.

- **Prova:** Pelo Teorema do Aperto de Mãos, $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$. Note que $\sum_{v \in V} d(v)$ pode ser separada em termos de valores pares e ímpares. Ou seja,

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V, d(v) \text{ é ímpar}} d(v) + \sum_{v \in V, d(v) \text{ é par}} d(v) = 2m \therefore$$

$$\sum_{v \in V, d(v) \text{ é ímpar}} d(v) = 2m - \sum_{v \in V, d(v) \text{ é par}} d(v).$$

1. A soma de pares é um número par, então $\sum_{v \in V, d(v) \text{ é par}} d(v)$ é par.
2. $2m$ é par, e como a subtração de pares é um par, então $\sum_{v \in V, d(v) \text{ é ímpar}} d(v)$ é par.

Corolário 2

O número de vértices de grau ímpar em um grafo é par.

- **Prova:** Pelo Teorema do Aperto de Mãos, $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$. Note que $\sum_{v \in V} d(v)$ pode ser separada em termos de valores pares e ímpares. Ou seja,

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V, d(v) \text{ é ímpar}} d(v) + \sum_{v \in V, d(v) \text{ é par}} d(v) = 2m \therefore$$

$$\sum_{v \in V, d(v) \text{ é ímpar}} d(v) = 2m - \sum_{v \in V, d(v) \text{ é par}} d(v).$$

1. A soma de pares é um número par, então $\sum_{v \in V, d(v) \text{ é par}} d(v)$ é par.
2. $2m$ é par, e como a subtração de pares é um par, então $\sum_{v \in V, d(v) \text{ é ímpar}} d(v)$ é par.
3. Cada termo de $\sum_{v \in V, d(v) \text{ é ímpar}} d(v)$ é ímpar.

Corolário 2

O número de vértices de grau ímpar em um grafo é par.

- **Prova:** Pelo Teorema do Aperto de Mãos, $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$. Note que $\sum_{v \in V} d(v)$ pode ser separada em termos de valores pares e ímpares. Ou seja,

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V, d(v) \text{ é ímpar}} d(v) + \sum_{v \in V, d(v) \text{ é par}} d(v) = 2m \therefore$$

$$\sum_{v \in V, d(v) \text{ é ímpar}} d(v) = 2m - \sum_{v \in V, d(v) \text{ é par}} d(v).$$

1. A soma de pares é um número par, então $\sum_{v \in V, d(v) \text{ é par}} d(v)$ é par.
2. $2m$ é par, e como a subtração de pares é um par, então $\sum_{v \in V, d(v) \text{ é ímpar}} d(v)$ é par.
3. Cada termo de $\sum_{v \in V, d(v) \text{ é ímpar}} d(v)$ é ímpar. Seja essa soma igual a $(2k_1 + 1) + (2k_2 + 1) + \dots + (2k_\ell + 1)$.

Corolário 2

O número de vértices de grau ímpar em um grafo é par.

- **Prova:** Pelo Teorema do Aperto de Mãos, $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$. Note que $\sum_{v \in V} d(v)$ pode ser separada em termos de valores pares e ímpares. Ou seja,

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V, d(v) \text{ é ímpar}} d(v) + \sum_{v \in V, d(v) \text{ é par}} d(v) = 2m \therefore$$

$$\sum_{v \in V, d(v) \text{ é ímpar}} d(v) = 2m - \sum_{v \in V, d(v) \text{ é par}} d(v).$$

1. A soma de pares é um número par, então $\sum_{v \in V, d(v) \text{ é par}} d(v)$ é par.
2. $2m$ é par, e como a subtração de pares é um par, então $\sum_{v \in V, d(v) \text{ é ímpar}} d(v)$ é par.
3. Cada termo de $\sum_{v \in V, d(v) \text{ é ímpar}} d(v)$ é ímpar. Seja essa soma igual a $(2k_1 + 1) + (2k_2 + 1) + \dots + (2k_\ell + 1)$. Como essa soma é par e há um 1 para cada termo, então ℓ é par.