Inteligência Artificial

Aula 14

Profª Bianca Zadrozny

http://www.ic.uff.br/~bianca/ia

Raciocínio Probabilístico

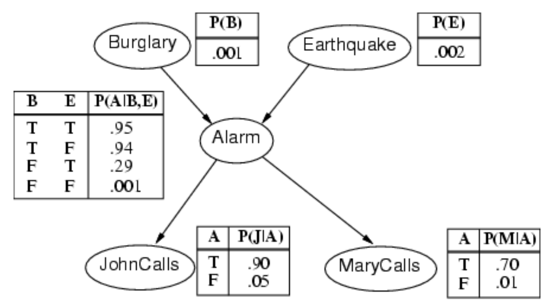
Capítulo 14 – Russell & Norvig

Seções 14.3 a 14.5

Revisão: Redes Bayesianas

- Estrutura de dados para representar as dependências entre variáveis e fornecer uma especificação concisa de *qualquer* distribuição de probabilidade conjunta total.
- Sintaxe:
  - um conjunto de nós, um para cada variável aleatória
  - grafo direcionado e acíclico (seta = "influência direta")
  - cada nó tem uma distribuição condicional **P**(X_i | Pais (X_i)) que quantifica o efeito dos pais sobre o nó
- No caso mais simples, a distribuição condicional é representada como uma tabela de probabilidade condicional (TPC) dada uma distribuição sobre X_i para cada combinação de valores dos pais.

Exemplo



Representação eficiente de distribuições condicionais

- Ainda que o número de pais *k* seja reduzido, o preenchimento da TPC para um nó exige até $O(2^k)$ e muita experiência para decidir os casos condicionais.
  - Esse é o pior caso, em que os relacionamentos entre pais e filhos são arbitrários.
- Em muitos casos podemos utilizar um padrão (***distribuição canônica***) para obter a tabela.

Representação eficiente de distribuições condicionais

- ***Distribuição canônica:***
  - ajustar a distribuição de probabilidades em cada nó a alguma forma padrão.
  - nestes casos a tabela completa pode ser especificada nomeando-se o padrão e fornecendo-se alguns parâmetros.
  - Exemplos:
    - nós determinísticos
    - relacionamentos lógicos ruidosos: *ou-ruidoso*

Representação eficiente: Distribuição canônica

- **Nós determinísticos**: tem seus valores especificados pelos valores de seus pais, sem qualquer incerteza:
  - X = f(Pais(X)) para alguma função f;
  - funções booleanas:
    - Norte Americano $\Leftrightarrow$ Canadense $\vee$ EUA $\vee$ Mexicano
  - relação numérica entre funções contínuas:
    - **pais** *afluentes/escoadouros* **filhos**: Δ*nível da água*
      - Δ*nível da água = afluentes - escoadouros*
    - *Valor mínimo de alguma função*

Representação eficiente: Distribuição canônica

- **Ou-ruidoso**
  - P(¬fever| cold, ¬ flu, ¬ malaria) = 0.6
  - P(¬fever| ¬ cold, flu, ¬ malaria) = 0.2
  - P(¬fever| ¬ cold, ¬ flu, malaria) = 0.1

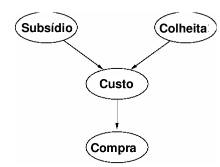
$Cold$	Flu	$Malaria$	$P(Fever)$	$P(\neg Fever)$
F	F	F	$\mathbf{0.0}$	1.0
F	F	T	0.9	$\mathbf{0.1}$
F	T	F	0.8	$\mathbf{0.2}$
F	T	T	0.98	$0.02 = 0.2 \times 0.1$
T	F	F	0.4	$\mathbf{0.6}$
T	F	T	0.94	$0.06 = 0.6 \times 0.1$
T	T	F	0.88	$0.12 = 0.6 \times 0.2$
T	T	T	0.988	$0.012 = 0.6 \times 0.2 \times 0.1$

Representação eficiente: Distribuição canônica

- Ou-ruidoso (em contraste com o ou proposicional)
  - Permite a incerteza sobre a habilidade de cada pai para fazer o filho ser verdadeiro - o relacionamento entre pai e filho pode ser inibido.
    - Todas as causas listadas
    - inibições independentes
    - Assim "febre é falsa se e somente se todos os seus pais verdadeiros são inibidos, e a probabilidade de isso ocorrer é o produto das probabilidades de inibição de cada pai."

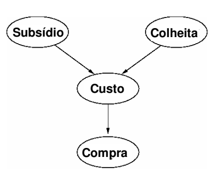
Redes de Bayes Híbridas

- Discretas: *Subsídio?* e *Compra?*



- Dois novos tipos de distribuições condicionais:
  - **variável contínua, com pais contínuos e discretos** (***Custo***)
  - **Variável discreta com pai contínuo (Compra*?*)**

Redes de Bayes Híbridas



- Manipular variáveis contínuas:
  - **Discretização**: repartir os valores possíveis em um conjunto fixo de intervalos
  - **Definir funções de probabilidade padrão** especificadas por um número finito de parâmetros

Variável contínua, com pais contínuos e discretos (*Cost*)

- Para custo: **P**(Custo|Colheita, Subsídio)
  - *O pai discreto (Subsídio) é manipulado por enumeração explícita:*

  P(Custo|Colheita, subsídio) e *P(Custo|Colheita, ¬subsídio)*
- Para *Colheita* especificamos como a distribuição sobre o custo **c** depende do valor contínuo **h** de colheita.
  - i.e., os parâmetros da distribuição de custo como função de **h**
  - em geral: **distribuição Gaussiana linear**

Variável contínua, com pais contínuos e discretos *(Custo)*

- **distribuição gaussiana linear:** o filho (*Custo*) tem uma distribuição gaussiana cuja média varia linearmente com o valor do pai (*Colheita*), e cujo desvio padrão é fixo:

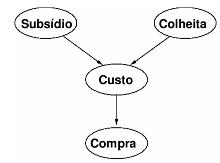
$$P(Cost = c|Harvest = h, Subsidy? = true)$$
$$= N(a_t h + b_t, \sigma_t)(c)$$
$$= \frac{1}{\sigma_t\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{c-(a_t h + b_t)}{\sigma_t}\right)^2\right)$$

- **distribuição gaussiana linear:** o filho (*Custo*) tem uma distribuição gaussiana cuja média varia linearmente com o valor do pai (*Colheita*), e cujo desvio padrão é fixo:

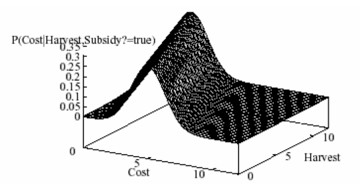
$$P(Cost = c|Harvest = h, Subsidy? = true)$$
$$= N(a_t h + b_t, \sigma_t)(c)$$
$$= \frac{1}{\sigma_t\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{c-(a_t h + b_t)}{\sigma_t}\right)^2\right)$$

- **distribuição gaussiana linear:** o filho (*Custo*) tem uma distribuição gaussiana cuja média varia linearmente com o valor do pai (*Colheita*), e cujo desvio padrão é fixo:

$$P(Cost = c|Harvest = h, Subsidy? = true)$$
$$= N(a_t h + b_t, \sigma_t)(c)$$
$$= \frac{1}{\sigma_t\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{c-(a_t h + b_t)}{\sigma_t}\right)^2\right)$$



$$P(Cost = c|Harvest = h, Subsidy? = true)$$
$$= N(a_t h + b_t, \sigma_t)(c)$$
$$= \frac{1}{\sigma_t\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{c-(a_t h + b_t)}{\sigma_t}\right)^2\right)$$



A inclinação é negativa, porque o preço diminui à medida que a quantidade oferecida aumenta

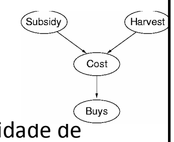
Distribuição gaussiana condicional linear

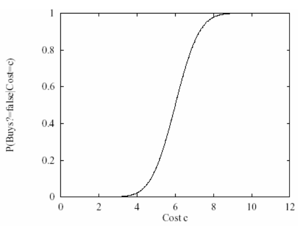
- Uma rede que contém apenas variáveis contínuas com distribuições Gaussianas lineares tem uma distribuição conjunta que é uma **distribuição multivariada** sobre todas as variáveis.
  - superfície em mais de uma dimensão que tem um pico na média (em n dimensões) e decresce para todos os lados.
- Com variáveis discretas (se nenhuma destas é filha de uma var. contínua), a rede define uma **distribuição gaussiana condicional**
  - dada qqr. atribuição às var. discretas, a distribuição sobre as var. contínuas é uma **distribuição gaussiana multivariada.**

variáveis discretas com pais contínuos

- Ex. *Compras*:
  - Podemos supor que o cliente comprará se o preço for baixo e não comprará se for alto e que:
  - A probabilidade de compra varia suavemente em alguma região intermediária
    - A distribuição condicional é semelhante a uma função de limiar "suave" (*soft threshold*)
    - Distribuição **probit** é uma possibilidade...

v.discretas, pais contínuos



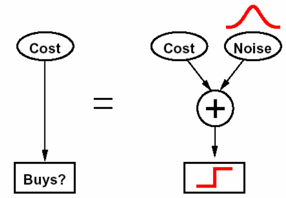


- Probabilidade de *Compra* dado *Custo:* ***limiar suave***
- Distribuição **Probit**:
  - integral da Gaussiana
  - posição precisa do limiar está sujeita a ruído gaussiano

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} N(0,1)(x)dx$$
$$P(Buys?{=}true \mid Cost{=}c) = \Phi((-c+\mu)/\sigma)$$

Por que **Probit**?

- Possui mais ou menos o formato desejado
- Pode ser visto como um degrau cuja posição tem ruído.



Inferência Bayesiana

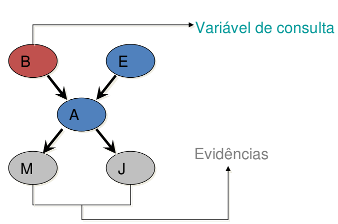
- Dada uma rede bayesiana, queremos computar a distribuição da probabilidade condicional para um conjunto de variáveis de consulta, dado os valores de um conjunto de variáveis de evidência:

P(Variável_consulta|Variáveis_Evidência)

Inferência Exata: Algoritmo de Enumeração

- A idéia básica do algoritmo de Enumeração é avaliar a equação
$$P(X \mid E) = \alpha \sum_{y} P(X, e, y)$$
sem ter que montar explicitamente a tabela de probabilidade conjunta total.
- Apenas, percorrem-se os nós da rede propagando as evidências e extraindo as probabilidades para que sejam feitos os somatórios e multiplicações necessárias.

Algoritmo de Enumeração

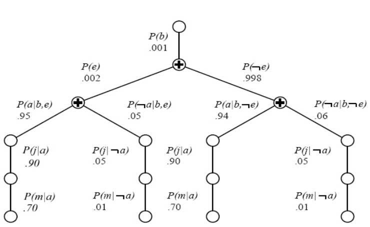


P(B|J,M)?? $\longrightarrow$ $P(B \mid j,m) = \alpha P(B,j,m) = \alpha \sum_{e}\sum_{a} P(B,e,a,j,m)$

$= \alpha \sum\sum P(B)P(a|B,e)P(m|a)P(j|a)$

(calcular para cada valor de B (b e ¬b) e normalizar)

Algoritmo de Enumeração



A figura torna explícita as sub-expressões repetidas que são avaliadas pelo algoritmo.
Os produtos P(j | a)P(m | a) e P(j | a)P(m | a) são calculados duas vezes, um para cada valor de *e*.

Algoritmo de Enumeração

```
function ENUMERATION-ASK(X, e, bn) returns a distribution over X
   inputs: X, the query variable
           e, observed values for variables E
           bn, a Bayesian network with variables {X} ∪ E ∪ Y
   Q(X) ← a distribution over X, initially empty
   for each value x_i of X do
       extend e with value x_i for X
       Q(x_i) ← ENUMERATE-ALL(VARS[bn], e)
   return NORMALIZE(Q(X))

function ENUMERATE-ALL(vars, e) returns a real number
   if EMPTY?(vars) then return 1.0
   Y ← FIRST(vars)
   if Y has value y in e
       then return P(y | Pa(Y)) × ENUMERATE-ALL(REST(vars), e)
       else return Σ_y P(y | Pa(Y)) × ENUMERATE-ALL(REST(vars), e_y)
           where e_y is e extended with Y = y
```

Algoritmo de Eliminação de Variáveis

- Elimina os cálculos repetidos do algoritmo de enumeração.
- A idéia é simples: efetuar o cálculo apenas uma vez e guardar os resultados para uso posterior.
- Esta é uma forma de programação dinâmica.

Algoritmo de Eliminação de Variáveis

Problemas do algoritmo de eliminação de variáveis:

- A configuração inicial das variáveis influencia no tempo de execução dos algoritmos.
- Encontrar uma configuração inicial ótima é um problema NP-Completo.