

Álgebra Geométrica e Aplicações

Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC)
Notas em Matemática Aplicada, Volume 85, 2017

<http://www.ic.uff.br/~algebrageometrica>

Leandro Augusto Frata Fernandes (IC-UFF)
Carlile Lavor (IMECC-UNICAMP)
Manuel Menezes de Oliveira Neto (INF-UFRGS)

CNMAC | 18 a 20 de setembro de 2018



Problemas Geométricos

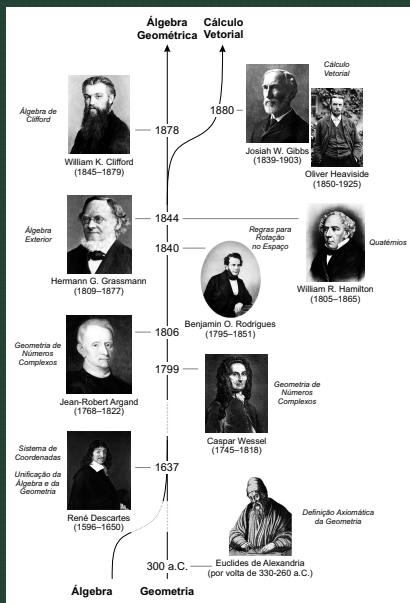
- Dados geométricos
 - ▶ Direções, pontos, linhas, planos, círculos, esferas, etc.
- Transformações
 - ▶ Rotações, translações, escalas, etc.
- Outras operações
 - ▶ Intersecções, ortogonalização de base, etc.

Problemas Geométricos

- Dados geométricos
 - ▶ Direções, pontos, linhas, planos, círculos, esferas, etc.
- Transformações
 - ▶ Rotações, translações, escalas, etc.
- Outras operações
 - ▶ Intersecções, ortogonalização de base, etc.

Álgebra Linear é o arcabouço padrão

Cronologia das Descobertas



Álgebra Linear

- Linguagem padrão para problemas geométricos
- Limitações bem conhecidas
- Agrega diferentes formalismos para obter soluções completas
 - ▶ Álgebra vetorial
 - ▶ Álgebra de matrizes
 - ▶ Números complexos
 - ▶ Quatérnios
 - ▶ Coordenadas de Plücker
- Transitar entre formalismos requer convenções ad-hoc

Álgebra Geométrica

- Arcabouço de alto nível para operações geométricas
- Elementos geométricos como primitivas para computação
- Naturalmente integra e generaliza
 - ▶ Quatérnios
 - ▶ Números complexos
 - ▶ Coordenadas de Plücker
- Estende a mesma solução para
 - ▶ Dimensões mais altas
 - ▶ Todos os tipos de elementos geométricos

Estrutura do Minicurso

- Terça-feira, 18 de setembro de 2018
 - ▶ Fundamentos

- Quarta-feira, 19 de setembro de 2018
 - ▶ Mais um pouco de fundamentos
 - ▶ Modelo Euclidiano de geometria
 - ▶ Modelo homogêneo de geometria

- Quinta-feira, 20 de setembro de 2018
 - ▶ Modelo conforme de geometria

Fundamentos de Álgebra Geométrica

Espaço Vetorial

Revisão de Pré-Requisito para o Minicurso

Um espaço vetorial sobre um corpo F é um conjunto V dotado das operações de adição de vetores e multiplicação por escalar, que definem mapeamentos $V \times V \rightarrow V$ e $F \times V \rightarrow V$

Os elementos em F são chamados escalares e os elementos em V são chamados vetores

Espaço Vetorial

Axiomas da Adição e Multiplicação Envolvendo Elementos de F e V

1. *Associatividade da adição de vetores:*

$$u + (v + w) = (u + v) + w$$

2. *Comutatividade da adição de vetores:*

$$u + v = v + u$$

3. *Existência de elemento neutro aditivo:*

existe um elemento $0 \in V$ tal que $v + 0 = v$ para todo $v \in V$

4. *Existência de elemento oposto:*

para cada $v \in V$, existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = 0$

5. *Associatividade da multiplicação por escalar:*

$$\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$$

6. *Existência de elemento neutro multiplicativo:*

$$1v = v, \text{ onde } 1 \in F$$

7. *Distributividade de escalares sobre adição de vetores:*

$$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$$

8. *Distributividade da soma de escalares sobre vetores:*

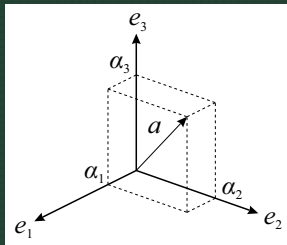
$$(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$$

Subespaços Orientados como Primitivas

Blades e subespaços são sinônimos

Vetores são subespaços unidimensionais, *i.e.*, 1-blades

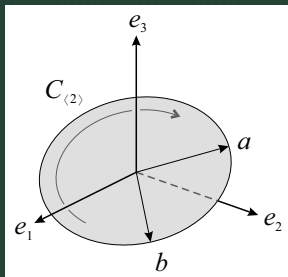
$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \in \mathbb{R}^3$$



Subespaços Orientados como Primitivas

Podemos expandir subespaços bidimensionais, *i.e.*, 2-blades, como o produto externo de dois vetores linearmente independentes

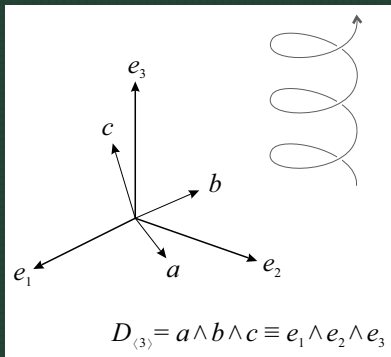
$$C_{\langle 2 \rangle} = a \wedge b$$



Subespaços Orientados como Primitivas

Podemos expandir subespaços tridimensionais, *i.e.*, 3-blades, como o produto externo de três vetores linearmente independentes

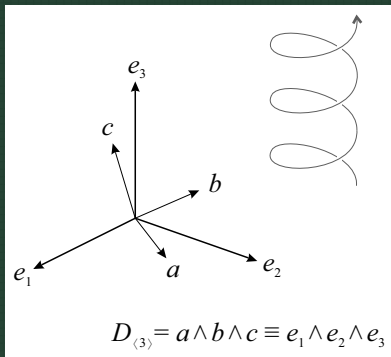
$$D_{\langle 3 \rangle} = a \wedge b \wedge c$$



Subespaços Orientados como Primitivas

Podemos expandir subespaços tridimensionais, *i.e.*, 3-blades, como o produto externo de três vetores linearmente independentes

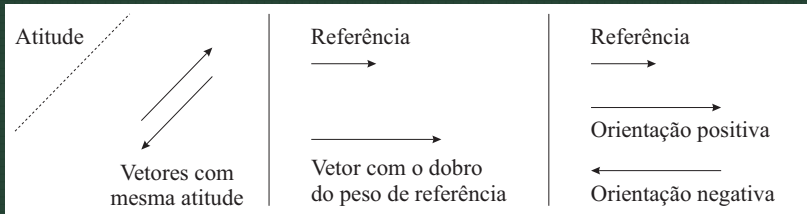
$$D_{\langle 3 \rangle} = a \wedge b \wedge c$$



A ideia pode ser aplicada para subespaços k -dimensionais em espaços n -dimensionais, onde $k \in \{0, 1, \dots, n\}$

Subespaços Orientados como Primitivas

Ilustração das propriedades **atitude**, **peso** e **orientação** de blades



Uma Base para Subespaços Orientados k -Dimensionais

O espaço vetorial

$$\mathbb{R}^n$$

consiste de elementos
1-dimensionais chamados
vetores,
representados na base

$$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

Não é suficiente!

Uma Base para Subespaços Orientados k -Dimensionais

O espaço vetorial

$$\mathbb{R}^n$$

consiste de elementos
1-dimensionais chamados
vetores,
representados na base

$$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

O espaço multivetorial

$$\bigwedge \mathbb{R}^n$$

consiste de elementos
chamados
multivetores,
que podem representar
subespaços
 k -dimensionais

Não é suficiente!

Espaço Multivetorial

$\wedge \mathbb{R}^n$ é o espaço multivetorial construído a partir do espaço vetorial \mathbb{R}^n

Os 2^n blades de base de $\wedge \mathbb{R}^n$ são definidos pelas k -combinações de vetores em $\{e_i\}_{i=1}^n$

Por exemplo, a base de $\wedge \mathbb{R}^3$ é

$$\left\{ \underbrace{1,}_{\text{Valores Reais}} \quad \underbrace{e_1, e_2, e_3,}_{\text{Espaço Vetorial}} \quad \underbrace{e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3,}_{\text{Espaço Bivetorial}} \quad \underbrace{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3}_{\text{Espaço Trivetorial}} \right\}$$
$$\mathbb{R} = \wedge^0 \mathbb{R}^3 \quad \mathbb{R}^3 = \wedge^1 \mathbb{R}^3 \quad \wedge^2 \mathbb{R}^3 \quad \wedge^3 \mathbb{R}^3$$

Espaço Multivetorial

A combinação linear de elementos da base de $\bigwedge \mathbb{R}^n$ é chamada de multivetor

Por exemplo, um multivetor para a base de $\bigwedge \mathbb{R}^3$ é

$$M = \eta_1 1 + \eta_2 e_1 + \eta_3 e_2 + \eta_4 e_3 + \eta_5 e_1 \wedge e_2 + \eta_6 e_1 \wedge e_3 + \eta_7 e_2 \wedge e_3 + \eta_8 e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$$

onde $\eta_i \in \mathbb{R}$ é o i -ésimo coeficiente de M

O 2-blade $C_{\langle 2 \rangle}$ pode ser escrito, após a avaliação do produto externo, como

$$C_{\langle 2 \rangle} = \eta_5 e_1 \wedge e_2 + \eta_6 e_1 \wedge e_3 + \eta_7 e_2 \wedge e_3$$

Produto Externo

O produto externo é um mapeamento

$$\wedge : \bigwedge^r \mathbb{R}^n \times \bigwedge^s \mathbb{R}^n \rightarrow \bigwedge^{r+s} \mathbb{R}^n$$

Propriedades

antissimetria $a \wedge b = -b \wedge a$
que implica $c \wedge c = 0$

distributividade $a \wedge (b + c) = a \wedge b + a \wedge c$

associatividade $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$

comutatividade de escalares $a \wedge (\beta b) = \beta(a \wedge b)$

Produto Externo

$$C_{\langle 2 \rangle} = a \wedge b$$

$$= (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) \wedge (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3) \quad (\text{substituição})$$

$$= \alpha_1 \beta_1 e_1 \wedge e_1 + \alpha_1 \beta_2 e_1 \wedge e_2 + \alpha_1 \beta_3 e_1 \wedge e_3 \quad (\text{distributividade})$$

$$+ \alpha_2 \beta_1 e_2 \wedge e_1 + \alpha_2 \beta_2 e_2 \wedge e_2 + \alpha_2 \beta_3 e_2 \wedge e_3$$

$$+ \alpha_3 \beta_1 e_3 \wedge e_1 + \alpha_3 \beta_2 e_3 \wedge e_2 + \alpha_3 \beta_3 e_3 \wedge e_3$$

$$= \alpha_1 \beta_2 e_1 \wedge e_2 + \alpha_1 \beta_3 e_1 \wedge e_3 \quad (\text{antissimetria})$$

$$- \alpha_2 \beta_1 e_1 \wedge e_2 + \alpha_2 \beta_3 e_2 \wedge e_3$$

$$- \alpha_3 \beta_1 e_1 \wedge e_3 - \alpha_3 \beta_2 e_2 \wedge e_3$$

$$= (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) e_1 \wedge e_2 \quad (\text{distributividade})$$

$$+ (\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1) e_1 \wedge e_3$$

$$+ (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) e_2 \wedge e_3$$

k -Blades, k -Vetores e Multivetores

k -Blade

é um subespaço linear orientado. k -Blades são obtidos pelo produto externo de k vetores linearmente independentes em \mathbb{R}^n

k -Vetor

é uma combinação linear de blades de base k -dimensionais

Multivetor

é a combinação linear de blades de base

Todo k -blade é um k -vetor, mas nem todo k -vetor é um k -blade.

As únicas exceções são os casos onde $k = 0$ (escalares),

$k = 1$ (vetores), $k = n - 1$ (pseudovetores)

e $k = n$ (pseudo-escalares)

Utilizamos multivetores para “codificar” k -vetores e, conseqüentemente, k -blades

Produto Interno de Vetores

Revisão de Pré-Requisito para o Minicurso

O produto interno de vetores é um mapeamento

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Propriedades

simetria $a \cdot b = b \cdot a$

distributividade $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

comutatividade de escalares $a \cdot (\beta b) = \beta(a \cdot b)$

Produto Interno de Vetores

Revisão de Pré-Requisito para o Minicurso

O produto interno de vetores é um mapeamento

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Propriedades

simetria $a \cdot b = b \cdot a$

distributividade $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

comutatividade de escalares $a \cdot (\beta b) = \beta(a \cdot b)$

Seja $a \cdot b = Q(a, b)$, a função Q define a métrica do espaço vetorial \mathbb{R}^n

Produto Interno de Vetores

Revisão de Pré-Requisito para o Minicurso

A função Q pode ser escrita por multiplicação de matrizes

$$Q(a, b) = a^T M b,$$

onde $M = (\mu_{i,j})$ é a matriz de métrica, com termos
 $\mu_{i,j} = Q(e_i, e_j)$ para $1 \leq i, j \leq n$

- Métrica não-degenerada

$Q(a, a) \geq 0 \forall a \in \mathbb{R}^n$, sendo que $Q(a, a)$
será igual a zero se e somente se a for igual a zero

- Métrica degenerada

permite a existência de algum $b \in \mathbb{R}^n$
onde $Q(b, b) \leq 0$

Produto Interno de Vetores

Revisão de Pré-Requisito para o Minicurso

Por exemplo, a métrica Euclidiana é uma métrica não-degenerada:

$$a \cdot b = Q(a, b) = \|a\| \|b\| \cos \theta,$$

onde $\|x\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2}$ e θ é o ângulo entre a e b

Nesse exemplo, para um espaço vetorial com vetores de base ortonormais $\{e_i\}_{i=1}^n$, temos

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Assinatura da Métrica

Revisão de Pré-Requisito para o Minicurso

Um espaço vetorial n -dimensional com assinatura (p, q, r) é denotado por $\mathbb{R}^{p,q,r}$, onde $n = p + q + r$

Os vetores de base apresentam a relação métrica

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} +1 & , \text{ se } i = j \text{ e } 1 \leq i \leq p, \\ -1 & , \text{ se } i = j \text{ e } p < i \leq p + q, \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Assinatura da Métrica

Revisão de Pré-Requisito para o Minicurso

Um espaço vetorial n -dimensional com assinatura (p, q, r) é denotado por $\mathbb{R}^{p,q,r}$, onde $n = p + q + r$

Os vetores de base apresentam a relação métrica

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} +1 & , \text{ se } i = j \text{ e } 1 \leq i \leq p, \\ -1 & , \text{ se } i = j \text{ e } p < i \leq p + q, \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Uma Álgebra Geométrica construída sobre $\mathbb{R}^{p,q,r}$ é denotada por $\mathcal{A}_{p,q,r}$

Essa álgebra faz uso do espaço multivetorial $\bigwedge \mathbb{R}^{p,q,r}$

Produto Escalar de Blades

O produto escalar é um mapeamento

$$* : \bigwedge^r \mathbb{R}^n \times \bigwedge^s \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Propriedades

simetria $A_{\langle r \rangle} * B_{\langle s \rangle} = B_{\langle s \rangle} * A_{\langle r \rangle}$

distributividade $A_{\langle r \rangle} * (B_{\langle s \rangle} + C_{\langle t \rangle}) = A_{\langle r \rangle} * B_{\langle s \rangle} + A_{\langle r \rangle} * C_{\langle t \rangle}$

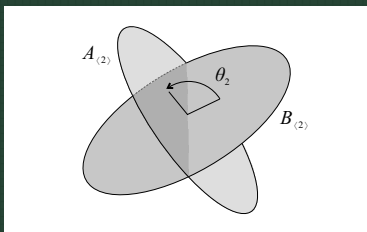
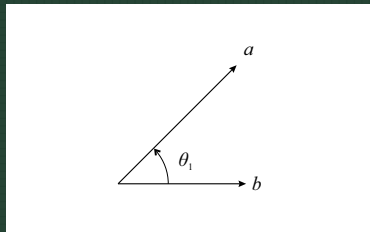
comutatividade de escalares $A_{\langle r \rangle} * (\beta B_{\langle s \rangle}) = \beta(A_{\langle r \rangle} * B_{\langle s \rangle})$

Produto Escalar de Blades

Por exemplo, sob métrica Euclidiana

$$A_{\langle k \rangle} * B_{\langle k \rangle} = \|A_{\langle k \rangle}\| \|B_{\langle k \rangle}\| \cos \theta$$

onde $\|X_{\langle k \rangle}\|$ é a norma reversa de um blade



Quadrado da Norma Reversa

O quadrado da norma reversa de um blade é dado por

$$\|A_{\langle k} \|^2 = A_{\langle k} * \tilde{A}_{\langle k},$$

onde

$$\tilde{A}_{\langle k} = (-1)^{k(k-1)/2} A_{\langle k}$$

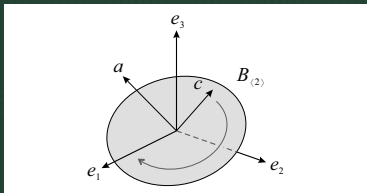
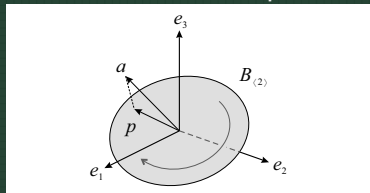
é o reverso do subespaço

Contração à Esquerda

$$C_{\langle s-r \rangle} = A_{\langle r \rangle} \rfloor B_{\langle s \rangle}$$

Remove de $B_{\langle s \rangle}$ a parte que é “mais parecida” com $A_{\langle r \rangle}$, retornando a porção $C_{\langle s-r \rangle} \subseteq B_{\langle s \rangle}$ que é “menos parecida” com $A_{\langle r \rangle}$ na métrica assumida, devidamente escalada pela relação métrica entre $A_{\langle r \rangle}$ e o que é mais parecido em $B_{\langle s \rangle}$

Por exemplo, sob métrica Euclidiana

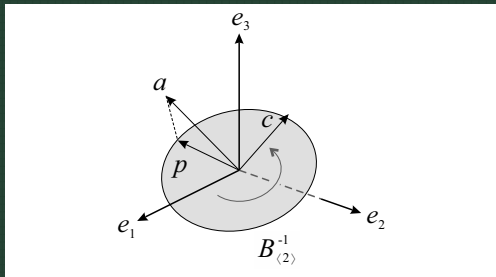


Projeção Ortogonal

Cálculo da projeção ortogonal de um vetor sobre um plano em um espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{3,0}$

$$p = c \rfloor B_{\langle k \rangle}^{-1} = (a \rfloor B_{\langle k \rangle}) \rfloor B_{\langle k \rangle}^{-1},$$

onde o inverso do blade é dado por $B_{\langle k \rangle}^{-1} = \frac{\tilde{B}_{\langle k \rangle}}{\|B_{\langle k \rangle}\|^2}$



Contração à Esquerda

A contração à esquerda define um mapeamento

$$\lrcorner : \bigwedge^r \mathbb{R}^n \times \bigwedge^s \mathbb{R}^n \rightarrow \bigwedge^{s-r} \mathbb{R}^n$$

Propriedades

simetria $A_{\langle r \rangle} \lrcorner B_{\langle s \rangle} = B_{\langle s \rangle} \lrcorner A_{\langle r \rangle}$
se e somente se $r = s$

distributividade $A_{\langle r \rangle} \lrcorner (B_{\langle s \rangle} + C_{\langle t \rangle}) = A_{\langle r \rangle} \lrcorner B_{\langle s \rangle} + A_{\langle r \rangle} \lrcorner C_{\langle t \rangle}$

comutatividade de escalares $A_{\langle r \rangle} \lrcorner (\beta B_{\langle s \rangle}) = \beta(A_{\langle r \rangle} \lrcorner B_{\langle s \rangle})$

Equivalência entre Produtos Métricos Vistos

Os produtos métricos vistos são equivalentes quando aplicados a 1-blades

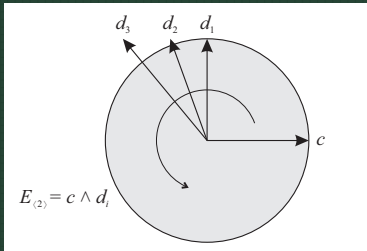
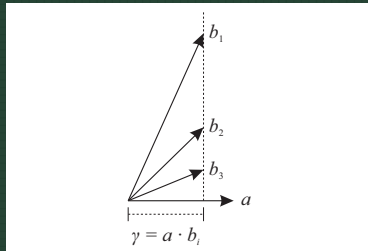
$$a \cdot b = a * b = a \lrcorner b$$

O produto escalar de blades é um caso particular de contração à esquerda

$$A_{\langle k \rangle} \lrcorner B_{\langle k \rangle} = A_{\langle k \rangle} * B_{\langle k \rangle}$$

Limitação dos Produtos Internos e Externo

Os produtos internos e o produto externo não são inversíveis!



Para quê eu quero um produto inversível?

Se $C = xb$, para o multivetor C e o vetor b informados, então a solução poderia ser escrita como

$$x = C / b,$$

implicando em

$$\begin{aligned} C / b &= (xb) / b \\ &= (xb) b^{-1} \\ &= x (bb^{-1}) = x, \end{aligned}$$

onde $/$ denota o inverso do produto de x por b

Para quê eu quero um produto inversível?

Soluções intuitivas para problemas simples, tal como o uso de taxas

Dados os vetores p , q e t , calcule o vetor r que está para t assim como q está para p

$$r = (q / p) t$$

Produto Geométrico de Vetores

$$ab = a \cdot b + a \wedge b$$

A interpretação do resultado depende dos operandos

Produto Geométrico de Vetores e Multivetores

$$aB = a \lrcorner B + a \wedge B$$

A interpretação do resultado depende dos operandos

Produto Geométrico

O produto geométrico define um mapeamento

$$\bigwedge \mathbb{R}^n \times \bigwedge \mathbb{R}^n \rightarrow \bigwedge \mathbb{R}^n$$

Propriedades

distributividade $A(B + C) = AB + AC$

associatividade $A(BC) = (AB)C$

não-comutatividade no caso geral $\exists A, B \in \bigwedge \mathbb{R}^n : AB \neq BA$

Produto Geométrico em Métricas Ortogonais

Quando a métrica do espaço \mathbb{R}^n é ortogonal, temos

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} \mu_{i,i} & , \text{ se } i = j, \\ 0 & , \text{ se } i \neq j, \end{cases}$$

para $\mu_{i,i} \in \mathbb{R}$ e $1 \leq i, j \leq n$

O produto geométrico dos multivetores

$$A = \alpha_1 e_1 \wedge e_2 + \alpha_2 e_1 \wedge e_3 + \alpha_3 e_2 \wedge e_3 \in \bigwedge \mathbb{R}^4 \text{ e}$$

$$B = \beta_1 e_1 \wedge e_2 + \beta_2 e_1 \wedge e_4 + \beta_3 e_2 \wedge e_4 \in \bigwedge \mathbb{R}^4$$

resulta em

$$\begin{aligned} C = AB = & -\alpha_1 \beta_1 \mu_{1,1} \mu_{2,2} - \alpha_3 \beta_1 \mu_{2,2} e_1 \wedge e_3 + \alpha_1 \beta_3 \mu_{2,2} e_1 \wedge e_4 \\ & + \alpha_2 \beta_1 \mu_{1,1} e_2 \wedge e_3 - \alpha_1 \beta_2 \mu_{1,1} e_2 \wedge e_4 - (\alpha_2 \beta_2 \mu_{1,1} + \alpha_3 \beta_3 \mu_{2,2}) e_3 \wedge e_4 \\ & + (\alpha_3 \beta_2 - \alpha_2 \beta_3) e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \end{aligned}$$

Extração do Grau

$$\langle M \rangle_k$$

denota a operação de **extração do grau**, que elimina os coeficientes associados às porções de dimensionalidade diferente de k no multivector M

Por exemplo, para $M = \eta_1 + \eta_5 e_1 \wedge e_2 + \eta_6 e_1 \wedge e_3 + \eta_7 e_2 \wedge e_3$,

$$\langle M \rangle_{-1} = 0$$

$$\langle M \rangle_0 = \eta_1$$

$$\langle M \rangle_1 = 0$$

$$\langle M \rangle_2 = \eta_5 e_1 \wedge e_2 + \eta_6 e_1 \wedge e_3 + \eta_7 e_2 \wedge e_3$$

$$\langle M \rangle_3 = 0$$

Outros Produtos a Partir do Produto Geométrico

$$A_{\langle r \rangle} \wedge B_{\langle s \rangle} = \langle A_{\langle r \rangle} B_{\langle s \rangle} \rangle_{r+s}$$

produto externo

$$A_{\langle r \rangle} * B_{\langle s \rangle} = \langle A_{\langle r \rangle} B_{\langle s \rangle} \rangle_0$$

produto escalar de blades

$$A_{\langle r \rangle} \rfloor B_{\langle s \rangle} = \langle A_{\langle r \rangle} B_{\langle s \rangle} \rangle_{s-r}$$

contração à esquerda

$$A_{\langle r \rangle} \lrcorner B_{\langle s \rangle} = \langle A_{\langle r \rangle} B_{\langle s \rangle} \rangle_{r-s}$$

contração à direita

$$A_{\langle r \rangle} \bullet B_{\langle s \rangle} = \langle A_{\langle r \rangle} B_{\langle s \rangle} \rangle_{|r-s|}$$

produto “dot”

$$A_{\langle r \rangle} \bullet_H B_{\langle s \rangle} = \begin{cases} A_{\langle r \rangle} \bullet B_{\langle s \rangle} & , r \neq 0 \text{ e } s \neq 0 \\ 0 & , \text{c.c.} \end{cases}$$

produto interno de Hestenes

$$A_{\langle r \rangle} \Delta B_{\langle s \rangle} = \langle A_{\langle r \rangle} B_{\langle s \rangle} \rangle_{\max}$$

produto delta

Quando um texto utiliza um único produto interno, é comum representá-lo por $A \cdot B$

Dualidade

O número de blades de base em cada porção k -vetorial do espaço multivetorial $\bigwedge \mathbb{R}^n$ sugere a existência de uma relação entre k -blades e $(n - k)$ -blades

Por exemplo, a base de $\bigwedge \mathbb{R}^3$ é

$$\left\{ \underbrace{1,}_{\text{Valores Reais}} \quad \underbrace{e_1, e_2, e_3,}_{\text{Espaço Vetorial}} \quad \underbrace{e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3,}_{\text{Espaço Bivetorial}} \quad \underbrace{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3}_{\text{Espaço Trivetorial}} \right\}$$
$$\mathbb{R} = \bigwedge^0 \mathbb{R}^3 \quad \mathbb{R}^3 = \bigwedge^1 \mathbb{R}^3 \quad \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \quad \bigwedge^3 \mathbb{R}^3$$

Dualidade

O dual de $A_{\langle k \rangle}$ com relação ao pseudo-escalar unitário do espaço n -dimensional é definido por

$$A_{\langle k \rangle}^* = A_{\langle k \rangle} \lrcorner I_{\langle n \rangle}^{-1}$$

A dualização define um mapeamento

$$\square^* : \bigwedge^k \mathbb{R}^n \rightarrow \bigwedge^{n-k} \mathbb{R}^n$$

Observe que $A_{\langle k \rangle}^*$ é um $(n - k)$ -blade

Dualidade

Nem sempre o dual da “representação dual” de um blade resulta na “representação primal” deste blade

$$\left(A_{\langle k \rangle}^*\right)^* = \left(A_{\langle k \rangle} \lrcorner I_{\langle n \rangle}^{-1}\right) \lrcorner I_{\langle n \rangle}^{-1} = A_{\langle k \rangle} I_{\langle n \rangle}^{-1} I_{\langle n \rangle}^{-1} = (-1)^{n(n-1)/2} A_{\langle k \rangle}$$

A representação dual de um blade pode ser mapeado de volta para sua representação primal usando o operador de desdualização

$$\left(A_{\langle k \rangle}^*\right)^{-*} = \left(A_{\langle k \rangle} \lrcorner I_{\langle n \rangle}^{-1}\right) \lrcorner I_{\langle n \rangle} = A_{\langle k \rangle} I_{\langle n \rangle}^{-1} I_{\langle n \rangle} = A_{\langle k \rangle}$$

A desdualização é um mapeamento

$$\square^{-*} : \bigwedge^{n-k} \mathbb{R}^n \rightarrow \bigwedge^k \mathbb{R}^n$$

Modelo Euclidiano de Geometria

Modelo Euclidiano de Geometria

Espaço métrico com assinatura $\mathbb{R}^{n,0}$

Assume métrica Euclidiana para o espaço vetorial com base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1 & , \text{ se } i = j \\ 0 & , \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

\cdot	e_1	e_2	\dots	e_n
e_1	1	0	\dots	0
e_2	0	1	\dots	0
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
e_n	0	0	\dots	1

Relação entre Produto Externo e Produto Vetorial em $\mathbb{R}^{3,0}$

Na Álgebra Vetorial, o resultado de um produto vetorial é o vetor normal ao plano induzido pelos vetores operados

Na Álgebra Geométrica, o resultado do produto externo aplicado a vetores é o plano induzido pelos vetores operados

Relação entre Produto Externo e Produto Vetorial em $\mathbb{R}^{3,0}$

Na Álgebra Vetorial, o resultado de um produto vetorial é o vetor normal ao plano induzido pelos vetores operados

Na Álgebra Geométrica, o resultado do produto externo aplicado a vetores é o plano induzido pelos vetores operados

$$a \times b \equiv (a \wedge b)^*$$

onde $X^* = X \rfloor I_{\langle 3 \rangle}^{-1}$ denota o dual de X

Relação entre Produto Externo e Produto Vetorial em $\mathbb{R}^{3,0}$

$$a \times b \equiv (a \wedge b)^* \\ = (a \wedge b) \rfloor I_{\langle 3 \rangle}^{-1} \quad (\text{substituição})$$

$$= ((\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)e_1 \wedge e_2 \\ + (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)e_1 \wedge e_3 \\ + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)e_2 \wedge e_3) \rfloor I_{\langle 3 \rangle}^{-1} \quad (\text{substituição})$$

$$= (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)(e_1 \wedge e_2) \rfloor I_{\langle 3 \rangle}^{-1} \quad (\text{distributividade}) \\ + (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)(e_1 \wedge e_3) \rfloor I_{\langle 3 \rangle}^{-1} \\ + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)(e_2 \wedge e_3) \rfloor I_{\langle 3 \rangle}^{-1}$$

$$= (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)e_1 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)e_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)e_3$$

Relação entre 2-blades e Números Complexos em $\mathbb{R}^{2,0}$

A unidade imaginária i tem a propriedade

$$i^2 = -1$$

A mesma propriedade é observada em 2-blades unitários, onde o quadrado é avaliado com o produto geométrico

$$\begin{aligned}(e_1 \wedge e_2)^2 &= (e_1 \wedge e_2) (e_1 \wedge e_2) && \text{(substituição)} \\ &= - (e_1 \wedge e_2) (e_2 \wedge e_1) && \text{(antissimetria)} \\ &= - (e_1 e_2) (e_2 e_1) && \text{(equivalência)} \\ &= -e_1 (e_2 \cdot e_2) e_1 && \text{(associatividade e equivalência)} \\ &= - (e_1 \cdot e_1) && \text{(equivalência)} \\ &= -1\end{aligned}$$

Relação entre 2-blades e Números Complexos em $\mathbb{R}^{2,0}$

É fácil montar em $\bigwedge \mathbb{R}^{2,0}$ um multivetor que se comporta como um número complexo

$$\alpha + \beta e_1 \wedge e_2$$

onde α é o coeficiente associado à parte 0-vetorial (escalar)
e β é o coeficiente associado à parte 2-vetorial

Relação entre Rotores e Quatérnios em $\mathbb{R}^{3,0}$

Os componentes imaginários de quatérnios são tipicamente denotados por \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} . Eles satisfazem as relações

$$\begin{aligned}\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 &= -1, \\ \mathbf{ij} = -\mathbf{ji}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik}, \\ \mathbf{ij} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j}, \\ \mathbf{ijk} &= -1\end{aligned}$$

Um quatérnio geral é dado por

$$\mathbf{h} = \eta_1 + \eta_2\mathbf{i} + \eta_3\mathbf{j} + \eta_4\mathbf{k}$$

com $\eta_i \in \mathbb{R}$

Rotores serão definidos formalmente em breve

Relação entre Rotores e Quatérnios em $\mathbb{R}^{3,0}$

Um rotor $\mathcal{R} \in \bigwedge \mathbb{R}^{3,0}$ pode ser representado como um multivetor na forma

$$\mathcal{R} = \eta_1 + \eta_2 e_2 \wedge e_3 + \eta_3 e_1 \wedge e_2 + \eta_4 e_3 \wedge e_1$$

Existe isomorfismo entre

$$\mathbf{i} \rightarrow e_2 \wedge e_3, \quad \mathbf{j} \rightarrow e_1 \wedge e_2, \quad \mathbf{k} \rightarrow e_3 \wedge e_1$$

de modo que as relações multiplicativas são as mesmas

$$\mathbf{ij} \rightarrow (e_2 \wedge e_3) (e_1 \wedge e_2) = e_3 \wedge e_1 \rightarrow \mathbf{k},$$

$$\mathbf{jk} \rightarrow (e_1 \wedge e_2) (e_3 \wedge e_1) = e_2 \wedge e_3 \rightarrow \mathbf{i},$$

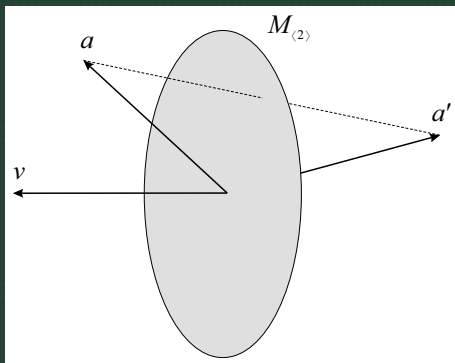
$$\mathbf{ki} \rightarrow (e_3 \wedge e_1) (e_2 \wedge e_3) = e_1 \wedge e_2 \rightarrow \mathbf{j}$$

Rotores serão definidos formalmente em breve

Rotação como um Par de Reflexões

Reflexão de um vetor arbitrário a com respeito a um pseudovetor $M_{\langle n-1 \rangle}$ que age como um espelho, onde $v = M_{\langle n-1 \rangle}^*$

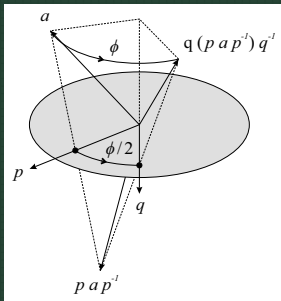
$$a' = -va / v = -vav^{-1}$$



Rotação como um Par de Reflexões

Um par de reflexões de a sobre os vetores p e q é equivalente à rotação de a no plano $p \wedge q$

$$a' = q (p a p^{-1}) q^{-1}$$



O ângulo de rotação ϕ é duas vezes o ângulo entre p e q
O sentido da rotação é dado pela orientação do 2-blade $p \wedge q$

Rotacionar “em torno de um eixo” não generaliza para $n > 3$. Rotação é no plano!

k -Blades, k -Versores e Rotores

De Volta aos Fundamentos de Álgebra Geométrica

k -Blade

é um subespaço linear orientado. k -Blades são obtidos pelo produto externo de k vetores linearmente independentes em \mathbb{R}^n

k -Versor

é uma transformação ortogonal. k -Versores são obtidos pelo produto geométrico de k vetores inversíveis, são inversíveis e podem ter grau misto (par ou ímpar)

Rotor

é um versor par unitário

Todo k -blade inversível é um k -versor, mas nem todo k -versor é um k -blade

Produto de Versores

De Volta aos Fundamentos de Álgebra Geométrica

O produto de versores pode ser estendido da aplicação em sanduíche sobre vetores

$$X' = \begin{cases} \mathcal{V}X\mathcal{V}^{-1} & , \text{ para versores pares} \\ \mathcal{V}\widehat{X}\mathcal{V}^{-1} & , \text{ para versores ímpares} \end{cases}$$

onde o inverso do versor \mathcal{V} é dado por $\mathcal{V}^{-1} = \frac{\tilde{\mathcal{V}}}{\mathcal{V}\tilde{\mathcal{V}}}$

e \widehat{X} denota a involução do grau dos blades de base no multivetor X

$$\widehat{B}_{\langle k \rangle} = (-1)^k B_{\langle k \rangle}$$

Produto de Versores

De Volta aos Fundamentos de Álgebra Geométrica

O produto de versores pode ser estendido da aplicação em sanduíche sobre vetores

$$X' = \begin{cases} \mathcal{V}X\mathcal{V}^{-1} & , \text{ para versores pares} \\ \mathcal{V}\widehat{X}\mathcal{V}^{-1} & , \text{ para versores ímpares} \end{cases}$$

onde o inverso do versor \mathcal{V} é dado por $\mathcal{V}^{-1} = \frac{\tilde{\mathcal{V}}}{\mathcal{V}\tilde{\mathcal{V}}}$

e \widehat{X} denota a involução do grau dos blades de base no multivetor X

$$\widehat{B}_{\langle k \rangle} = (-1)^k B_{\langle k \rangle}$$

Outermorfismo: o produto de versores preserva a estrutura de qualquer operação, *i.e.*, $\mathcal{V}(A \circ B)\mathcal{V}^{-1} = (\mathcal{V}A\mathcal{V}^{-1}) \circ (\mathcal{V}B\mathcal{V}^{-1})$

Modelo Euclidiano de Geometria

- Métrica Euclidiana
- Interpretação geométrica de blades
 - ▶ Direções k -dimensionais
- Interpretação geométrica de versores
 - ▶ Reflexões
 - ▶ Rotações

Modelo Homogêneo de Geometria

Modelo Homogêneo de Geometria

Similar ao uso de coordenadas homogêneas em Álgebra Linear

Espaço métrico com assinatura $\mathbb{R}^{d+1,0}$, logo $n = d + 1$

Assume métrica Euclidiana para o espaço vetorial com base $\{e_0, e_1, e_2, \dots, e_d\}$

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1 & , \text{ se } i = j \\ 0 & , \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

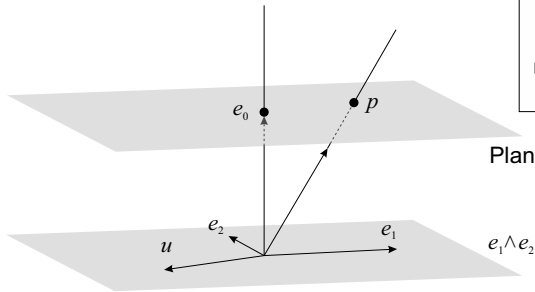
\cdot	e_0	e_1	e_2	\dots	e_d
e_0	1	0	0	\dots	0
e_1	0	1	0	\dots	0
e_2	0	0	1	\dots	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
e_d	0	0	0	\dots	1

Modelo Homogêneo de Geometria

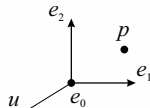
- Métrica Euclidiana
- Interpretação geométrica de blades
 - ▶ Direções
 - ▶ Subespaços planares afastados da origem (pontos, linhas retas, planos, etc.)
- Interpretação geométrica de versores
 - ▶ Rotações ao redor da origem
- O vetor extra na base, e_0 , é interpretado como o ponto na origem

Pontos no Modelo Homogêneo de Geometria

Espaço (2+1)-Dimensional
de Representação



Espaço-Base
2-Dimensional



Plano Homogêneo

$e_1 \wedge e_2$

Ponto próprio ($\gamma \neq 0$)

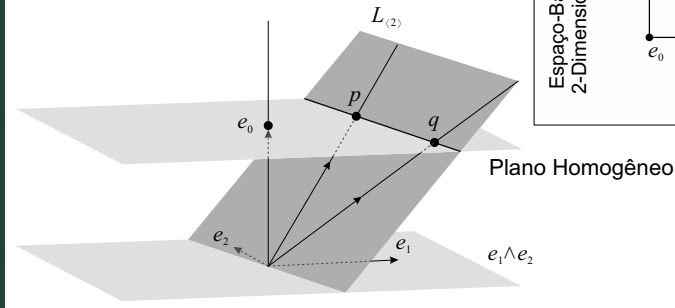
$$p = \gamma (e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_d e_d)$$

Ponto impróprio

$$u = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_d e_d$$

Retas no Modelo Homôgeneo de Geometria

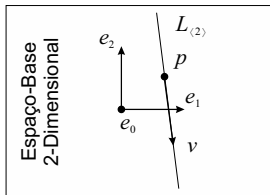
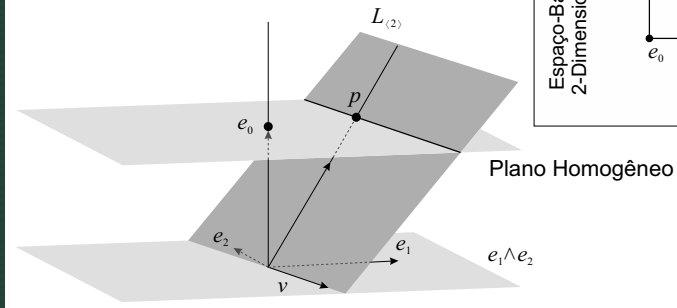
Espaço (2+1)-Dimensional
de Representação



$$L_{\langle 2 \rangle} = p \wedge q$$

Retas no Modelo Homôgeneo de Geometria

Espaço (2+1)-Dimensional
de Representação



$$L_{\langle 2 \rangle} = p \wedge v$$

Subespaços Planares k -Dimensionais Orientados

Subespaços planares orientados podem ser construídos pelo produto externo de $(k + 1)$ pontos

$$F_{\langle k+1 \rangle} = p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_{k+1}$$

$k = 0$ para pontos, $k = 1$ para retas, $k = 2$ para planos, etc.

De forma prática, para a localização p e direção

$$A_{\langle k \rangle} \subseteq (e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_d)$$

$$F_{\langle k+1 \rangle} = p \wedge A_{\langle k \rangle}$$

Para $d = 3$, os coeficientes de $F_{\langle k+1 \rangle}$ equivalem às suas coordenadas de Plücker

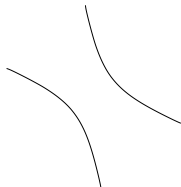
Extração de Parâmetros de Subespaços

	Próprio	Impróprio
Condição	$e_0 \rfloor X_{\langle k+1 \rangle} \neq 0$	$e_0 \rfloor X_{\langle k+1 \rangle} = 0$
Direção $A_{\langle k \rangle}$	$e_0^{-1} \rfloor X_{\langle k+1 \rangle}$	$X_{\langle k+1 \rangle}$
Momento $M_{\langle k+1 \rangle}$	$e_0^{-1} \rfloor (e_0 \wedge X_{\langle k+1 \rangle})$	-
Vetor suporte s	$M_{\langle k+1 \rangle} A_{\langle k \rangle}^{-1}$	-
Ponto-suporte unitário $e_0 + s$	$X_{\langle k+1 \rangle} A_{\langle k \rangle}^{-1}$	-

Aplicação: Desenho de Seções Cônicas e Generalizações

Seções Cônicas

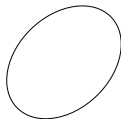
Não Degeneradas



Hipérbole



Parábola

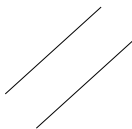


Elipse

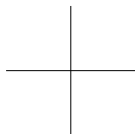


Círculo

Degeneradas



Par de Retas Paralelas



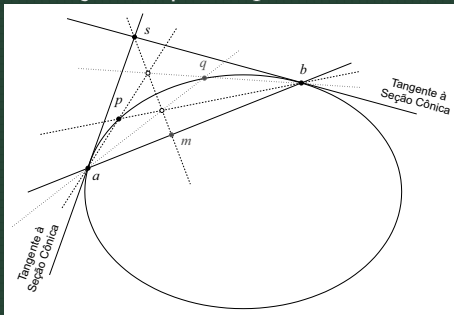
Par de Retas Concorrentes



Ponto

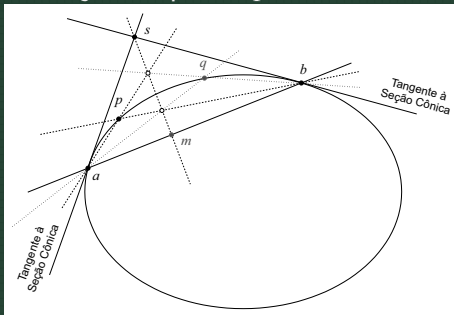
Aplicação: Desenho de Seções Cônicas e Generalizações

A relação geométrica entre os pontos a , b , p , s e m é utilizada na obtenção do ponto q sobre a cônica



Aplicação: Desenho de Seções Cônicas e Generalizações

A relação geométrica entre os pontos a, b, p, s e m é utilizada na obtenção do ponto q sobre a cônica



$$a \wedge p$$

$$m \wedge s$$

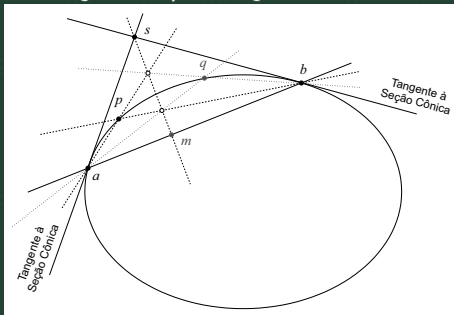
$$b \wedge p$$

$$m \wedge s$$

$$\text{onde } m = a + \gamma \frac{b-a}{\|b-a\|}, \gamma \in \mathbb{R}$$

Aplicação: Desenho de Seções Cônicas e Generalizações

A relação geométrica entre os pontos a, b, p, s e m é utilizada na obtenção do ponto q sobre a cônica



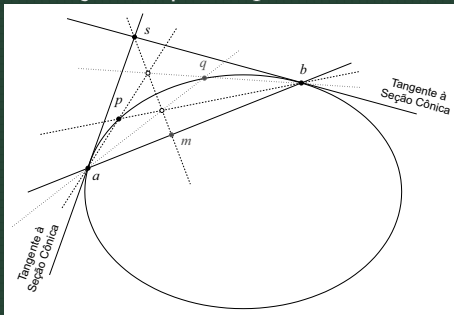
$$(a \wedge p) \vee (m \wedge s)$$

$$(b \wedge p) \vee (m \wedge s)$$

$$\text{onde } m = a + \gamma \frac{b-a}{\|b-a\|}, \gamma \in \mathbb{R} \text{ e } X \vee Y \equiv (Y^* \wedge X^*)^{-*}$$

Aplicação: Desenho de Seções Cônicas e Generalizações

A relação geométrica entre os pontos a, b, p, s e m é utilizada na obtenção do ponto q sobre a cônica

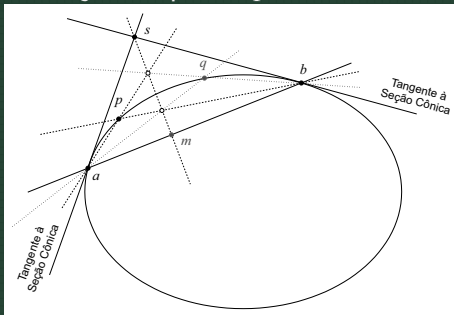


$$b \wedge ((a \wedge p) \vee (m \wedge s)) \quad a \wedge ((b \wedge p) \vee (m \wedge s))$$

$$\text{onde } m = a + \gamma \frac{b-a}{\|b-a\|}, \gamma \in \mathbb{R} \text{ e } X \vee Y \equiv (Y^* \wedge X^*)^{-*}$$

Aplicação: Desenho de Seções Cônicas e Generalizações

A relação geométrica entre os pontos a , b , p , s e m é utilizada na obtenção do ponto q sobre a cônica

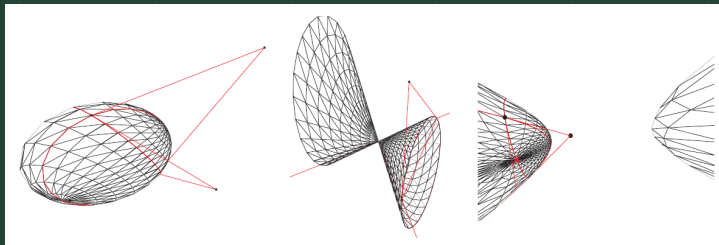


$$q = (b \wedge ((a \wedge p) \vee (m \wedge s))) \vee (a \wedge ((b \wedge p) \vee (m \wedge s)))$$

onde $m = a + \gamma \frac{b-a}{\|b-a\|}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ e $X \vee Y \equiv (Y^* \wedge X^*)^{-*}$

Aplicação: Desenho de Seções Cônicas e Generalizações

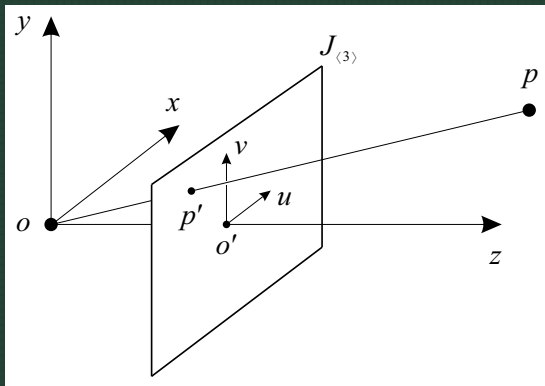
A expressão pode ser generalizada para quádricas



conforme apresentado por Jourdanet et al.
em “Automatic tessellation of quadric surfaces using
Grassmann-Cayley algebra”, in *Proc. Int. Conf. Comput. Vis.
Graph.*, 2004, pp. 674–682

Aplicação: Câmeras com Modelo de Projeção Linear

O modelo de câmera estenopeica (ou *pinhole*)



O modelo de câmera afim passa a ser uma consequência natural da generalização

Aplicação: Solução de Sistemas Homogêneos de Equações

Subespaços Euclidianos em $\mathbb{R}^{n,0}$ representam o conjunto solução para qualquer sistema homogêneo de equações lineares com n variáveis

$$\mathcal{S}_{\langle n-k \rangle} = (f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_k)^{-*}$$

para $0 \leq k \leq n$, onde cada vetor f_i é a representação dual do hiperplano que caracteriza uma das funções do sistema

Aplicação: Solução de Sistemas Homogêneos de Equações

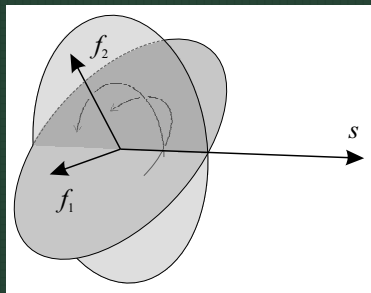
Por exemplo, considere o sistema

$$\begin{cases} 2e_1 - 3e_2 & = 0 \\ e_1 - 2e_2 + 3e_3 & = 0 \end{cases}$$

O dual dos hiperplanos que caracterizam as funções são

$$f_1 = 2e_1 - 3e_2$$

$$f_2 = e_1 - 2e_2 + 3e_3$$



$$s = (f_1 \wedge f_2)^{-*}$$

$$= ((2e_1 - 3e_2) \wedge (e_1 - 2e_2 + 3e_3))^{-*}$$

(substituição)

$$= (-e_1 \wedge e_2 + 6e_1 \wedge e_3 - 9e_2 \wedge e_3)^{-*}$$

(distributividade e antissimetria)

$$= (-e_1 \wedge e_2 + 6e_1 \wedge e_3 - 9e_2 \wedge e_3) \rfloor I_{\langle 3 \rangle}$$

(substituição)

$$= 9e_1 + 6e_2 + e_3$$

(avaliação da contração)

Modelo Conforme de Geometria

Modelo Conforme de Geometria

Concebido para trabalhar de forma natural com transformações de similaridade¹

Assume-se métrica proporcional ao quadrado da distância Euclidiana entre vetores interpretados como pontos finitos unitários p e q

$$Q(p, q) = p \cdot q = -\frac{1}{2}d_E^2(p, q)$$

Logo, vetores p interpretados como pontos finitos são vetores nulos, *i.e.*, $Q(p, p) = p \cdot p = 0$

¹Transformações que preservam ângulos, paralelismo e razão entre distâncias

Modelo Conforme de Geometria

Podemos optar pelo uso de...

...métrica de Minkowski, com
vetores de base

$$\{e_1, e_2, \dots, e_d, e_+, e_-\}$$

e matriz de métrica

\cdot	e_1	e_2	\dots	e_d	e_+	e_-
e_1	1	0	\dots	0	0	0
e_2	0	1	\dots	0	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots
e_d	0	0	\dots	1	0	0
e_+	0	0	\dots	0	1	0
e_-	0	0	\dots	0	0	-1

... ou métrica conforme, com
vetores de base

$$\{n_o, e_1, e_2, \dots, e_d, n_\infty\}$$

e matriz de métrica

\cdot	n_o	e_1	e_2	\dots	e_d	n_∞
n_o	0	0	0	\dots	0	-1
e_1	0	1	0	\dots	0	0
e_2	0	0	1	\dots	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
e_d	0	0	0	\dots	1	0
n_∞	-1	0	0	\dots	0	0

Modelo Conforme de Geometria

Podemos optar pelo uso de...

...métrica de Minkowski, com
vetores de base

$$\{e_1, e_2, \dots, e_d, e_+, e_-\}$$

e matriz de métrica

\cdot	e_1	e_2	\dots	e_d	e_+	e_-
e_1	1	0	\dots	0	0	0
e_2	0	1	\dots	0	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots
e_d	0	0	\dots	1	0	0
e_+	0	0	\dots	0	1	0
e_-	0	0	\dots	0	0	-1

... ou métrica conforme, com
vetores de base

$$\{n_o, e_1, e_2, \dots, e_d, n_\infty\}$$

e matriz de métrica

\cdot	n_o	e_1	e_2	\dots	e_d	n_∞
n_o	0	0	0	\dots	0	-1
e_1	0	1	0	\dots	0	0
e_2	0	0	1	\dots	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
e_d	0	0	0	\dots	1	0
n_∞	-1	0	0	\dots	0	0

Espaço com métrica degenerada,
de assinatura $\mathbb{R}^{d+1,1}$, logo $n = d + 2$

Modelo Conforme de Geometria

- Métrica pseudo-Euclidiana
- Interpretação geométrica de blades
 - ▶ Direções
 - ▶ Subespaços planares afastados da origem (pontos, linhas retas, planos, etc.)
 - ▶ Circunferências (pares de pontos, círculos, esferas, etc. – reais ou imaginários)
 - ▶ Subespaços tangentes
- Interpretação geométrica de versores
 - ▶ Transformações de similaridade (reflexão, rotação, translação, escala uniforme e transversão)
- Dois vetores extras na base
 - ▶ n_o é interpretado como ponto na origem
 - ▶ n_∞ é interpretado como ponto no infinito

Matriz de Métrica Conforme

Métrica desejada para vetores interpretados como pontos finitos unitários p e q

$$Q(p, q) = p \cdot q = -\frac{1}{2}d_E^2(p, q)$$

Pontos finitos unitários que respeitam a métrica indicada acima são escritos como vetores usando a base $\{n_o, e_1, e_2, \dots, e_d, n_\infty\}$

$$\begin{aligned} p &= n_o + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_d e_d + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d (\alpha_i^2) n_\infty \\ &= n_o + x + \frac{1}{2} x^2 n_\infty \end{aligned}$$

Matriz de Métrica Conforme

Métrica desejada para vetores interpretados como pontos finitos unitários p e q

$$Q(p, q) = p \cdot q = -\frac{1}{2}d_E^2(p, q)$$

Dados os vetores

$$p = n_o + x + \frac{1}{2}x^2 n_\infty \qquad q = n_o + y + \frac{1}{2}y^2 n_\infty$$

podemos corrigir a métrica colocando os 1's e os quadrados em local adequado, e adicionando um menos extra

$$\begin{aligned} p \cdot q &= \left(1 \quad x \quad \frac{1}{2}x^2\right) \begin{pmatrix} 0 & \cdots & -1 \\ \vdots & \mathbf{I} & \vdots \\ -1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ \frac{1}{2}y^2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}x^2 + x \cdot y - \frac{1}{2}y^2 \\ &= -\frac{1}{2}(x - y)^2 \end{aligned}$$

Relação entre Métrica de Minkowski e Métrica Conforme

Usando a matriz de métrica de Minkowski

\cdot	e_1	e_2	\cdots	e_d	e_+	e_-
e_1	1	0	\cdots	0	0	0
e_2	0	1	\cdots	0	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots
e_d	0	0	\cdots	1	0	0
e_+	0	0	\cdots	0	1	0
e_-	0	0	\cdots	0	0	-1

adotamos os vetores de base

$$\{e_1, e_2, \cdots, e_d, e_+, e_-\}$$

e constituímos os vetores extra da métrica conforme como

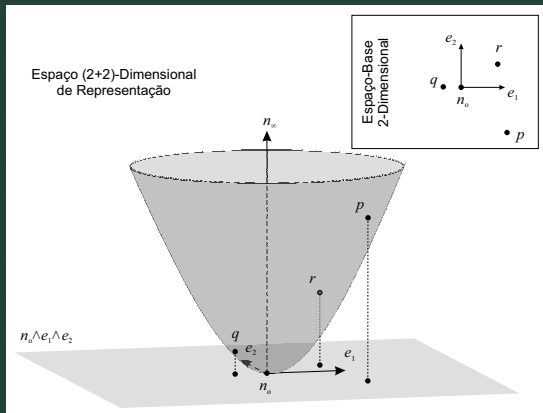
$$n_o = \frac{1}{2}(e_+ + e_-)$$

$$n_\infty = e_- - e_+$$

Pontos Finitos no Modelo Conforme de Geometria

Pontos finitos gerais são escritos como pontos finitos unitários multiplicados por um valor escalar $\gamma \neq 0$

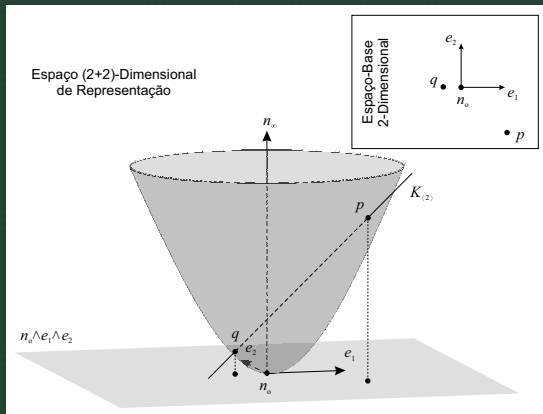
$$g = \gamma p = \gamma \left(n_o + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_d e_d + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d (\alpha_i^2) n_\infty \right)$$



Pares de Pontos no Modelo Conforme de Geometria

O produto externo de dois pontos finitos define um par de pontos

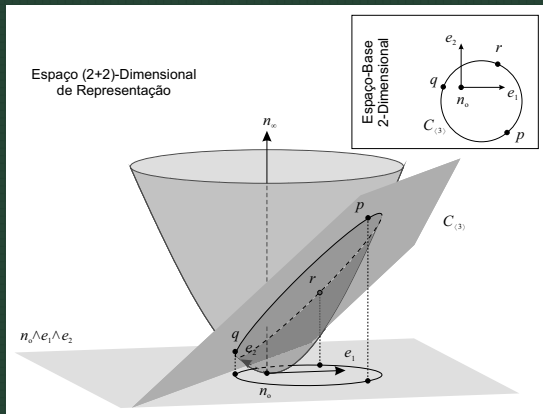
$$K_{\langle 2 \rangle} = p \wedge q$$



Círculos no Modelo Conforme de Geometria

O produto externo de três pontos finitos define um círculo

$$C_{\langle 3 \rangle} = p \wedge q \wedge r$$



Circunferências no Modelo Conforme de Geometria

No caso geral, circunferências (k -esferas) são construídas a partir do produto externo de $(k + 2)$ pontos finitos

$$S_{\langle k+2 \rangle} = p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_{k+2}$$

Outra maneira prática de construir k -esferas é a partir do ponto central c , do raio ρ e da direção $A_{\langle k+1 \rangle} \subseteq (e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_d)$ do espaço-suporte

$$S_{\langle k+2 \rangle} = \left(c + \frac{1}{2} \rho^2 n_\infty \right) \wedge \left(-c \lrcorner \left(\widehat{A}_{\langle k+1 \rangle} n_\infty \right) \right)$$

$\widehat{X}_{\langle t \rangle} = (-1)^t X_{\langle t \rangle}$ denota a involução do grau

0-esfera, par de pontos; 1-esfera, círculo; 2-esfera, esfera, etc.

Circunferências no Modelo Conforme de Geometria

No caso geral, circunferências (k -esferas) são construídas a partir do produto externo de $(k + 2)$ pontos finitos

$$S_{\langle k+2 \rangle} = p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_{k+2}$$

A hiperesfera de centro c e que passa pelo ponto p pode ser construída por

$$S_{\langle d+1 \rangle} = p \wedge (c \wedge n_\infty)^{-*}$$

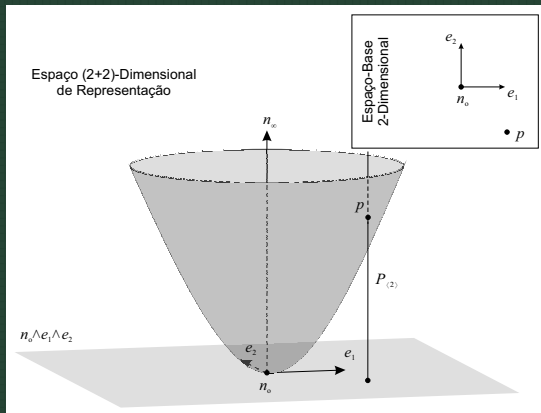
$X^{-*} = X \rfloor I_{\langle d+2 \rangle}$ denota a desdualização

0-esfera é um par de pontos; 1-esfera é um círculo; 2-esfera é uma esfera, etc.

Pontos Planares no Modelo Conforme de Geometria

Ponto planar é construído pelo produto externo de um ponto finito com n_∞

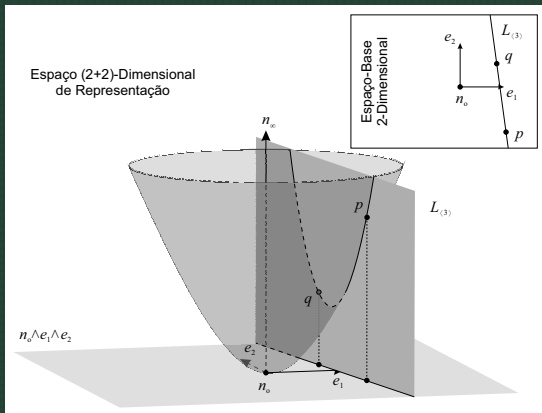
$$P_{\langle 2 \rangle} = p \wedge n_\infty$$



Retas no Modelo Conforme de Geometria

Ao incluir o ponto finito q ao produto externo de p com n_∞ , teremos um 3-blade geometricamente interpretado como uma reta

$$L_{\langle 3 \rangle} = p \wedge q \wedge n_\infty$$



Subespaços Planares Orientados no Modelo Conforme

No caso geral, subespaços planares orientados podem ser construídos pelo produto externo de $(k + 1)$ pontos finitos e n_∞

$$F_{\langle k+2 \rangle} = p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_{k+1} \wedge n_\infty$$

De forma prática, $F_{\langle k+2 \rangle}$ também pode ser construído a partir de sua localização p e direção $A_{\langle k \rangle} \subseteq (e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_d)$

$$F_{\langle k+2 \rangle} = p \wedge A_{\langle k \rangle} \wedge n_\infty$$

$k = 0$ para pontos, $k = 1$ para retas, $k = 2$ para planos, etc.

Expressões Úteis para Contruir Hiperplanos

Hiperplanos podem ser obtidos a partir do vetor normal unitário $n \subset (e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_d)$ e distância Euclidiana δ em relação à origem

$$H_{\langle d+1 \rangle} = (n + \delta n_\infty)^{-*}$$

Ou a partir de seu vetor normal n e de um ponto finito p contido no hiperplano

$$H_{\langle d+1 \rangle} = p \wedge (n \wedge n_\infty)^{-*}$$

Ou como o bissetor perpendicular de dois pontos finitos p e q

$$H_{\langle d+1 \rangle} = (p - q)^{-*}$$

$X^{-*} = X \rfloor I_{\langle d+2 \rangle}$ denota a desdualização

Direções no Modelo Conforme de Geometria

Direções não podem ter nenhum aspecto de localização

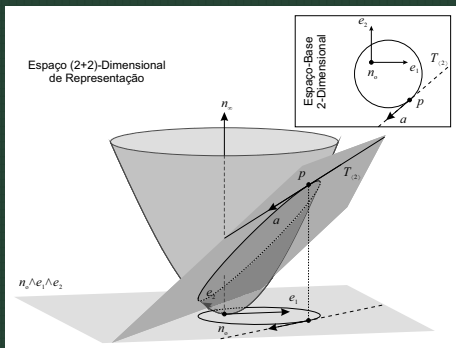
Portanto, devem ser colocadas infinitamente distantes de n_o

$$D_{\langle k+1 \rangle} = A_{\langle k \rangle} \wedge n_\infty = A_{\langle k \rangle} n_\infty$$

para $A_{\langle k \rangle} \subset (e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_d)$

Subespaços Tangentes no Modelo Conforme de Geometria

Subespaços tangentes são blades que tangenciam o parabolóide de pontos finitos



Para $X_{\langle k \rangle}$ interpretado como circunferência ou subespaço planar que passa pelo ponto finito p , o subespaço tangente localizado em p é

$$T_{\langle k-1 \rangle} = p \rfloor \widehat{X}_{\langle k \rangle}$$

Subespaços Tangentes no Modelo Conforme de Geometria

A expressão geral para construção de subespaços tangentes, a partir de um ponto p e uma direção $A_{\langle k \rangle} \subset (e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_d)$, é dada por

$$T_{\langle k-1 \rangle} = p \wedge \left(-p \lrcorner \left(\widehat{A}_{\langle k \rangle} n_\infty \right) \right)$$

$\widehat{A}_{\langle k \rangle} = (-1)^k A_{\langle k \rangle}$ denota a involução do grau

Testes para Interpretação Geométrica de Subespaços

	Condições
Circunferência Primal/Dual	$n_\infty \wedge X_{\langle k \rangle} \neq 0$ $n_\infty \lrcorner X_{\langle k \rangle} \neq 0$ $X_{\langle k \rangle}^2 \neq 0$
Subespaço Planar Primal	$n_\infty \wedge X_{\langle k \rangle} = 0$ $n_\infty \lrcorner X_{\langle k \rangle} \neq 0$
Subespaço Planar Dual	$n_\infty \wedge X_{\langle k \rangle} \neq 0$ $n_\infty \lrcorner X_{\langle k \rangle} = 0$
Direção Primal/Dual	$n_\infty \wedge X_{\langle k \rangle} = 0$ $n_\infty \lrcorner X_{\langle k \rangle} = 0$
Tangente Primal/Dual	$n_\infty \wedge X_{\langle k \rangle} \neq 0$ $n_\infty \lrcorner X_{\langle k \rangle} \neq 0$ $X_{\langle k \rangle}^2 = 0$

Extração de Parâmetros de Subespaços

	Direção ($A_{\langle t \rangle} n_{\infty}$)	Localização Finita (p)	Quadrado do Raio (ρ^2)
Circunferência Primal	$(-n_{\infty} \rfloor X_{\langle k \rangle}) \wedge n_{\infty}$	$-\frac{1}{2} \frac{X_{\langle k \rangle} n_{\infty} X_{\langle k \rangle}}{(n_{\infty} \rfloor X_{\langle k \rangle})^2}$	$\frac{X_{\langle k \rangle} \widehat{X}_{\langle k \rangle}}{(n_{\infty} \rfloor X_{\langle k \rangle})^2}$
Circunferência Dual	$(-n_{\infty} \rfloor X_{\langle k \rangle}^{-*}) \wedge n_{\infty}$	$-\frac{1}{2} \frac{X_{\langle k \rangle} n_{\infty} X_{\langle k \rangle}}{(n_{\infty} \rfloor X_{\langle k \rangle})^2}$	$-\frac{X_{\langle k \rangle} \widehat{X}_{\langle k \rangle}}{(n_{\infty} \rfloor X_{\langle k \rangle})^2}$
Subespaço Planar Primal	$-n_{\infty} \rfloor X_{\langle k \rangle}$	$(n_o \rfloor X_{\langle k \rangle}) X_{\langle k \rangle}^{-1}$	-
Subespaço Planar Dual	$-n_{\infty} \rfloor X_{\langle k \rangle}^{-*}$	$(n_o \wedge X_{\langle k \rangle}) X_{\langle k \rangle}^{-1}$	-
Direção Primal	$X_{\langle k \rangle}$	-	-
Direção Dual	$X_{\langle k \rangle}^{-*}$	-	-
Tangente Primal	$(-n_{\infty} \rfloor X_{\langle k \rangle}) \wedge n_{\infty}$	$\frac{X_{\langle k \rangle}}{-n_{\infty} \rfloor X_{\langle k \rangle}}$	0
Tangente Dual	$(-n_{\infty} \rfloor X_{\langle k \rangle}^{-*}) \wedge n_{\infty}$	$\frac{X_{\langle k \rangle}}{-n_{\infty} \rfloor X_{\langle k \rangle}}$	0

Versores como Transformações de Similaridade

Para ser um versor de similaridade, \mathcal{V} deve preservar o ponto no infinito

$$\widehat{\mathcal{V}}n_{\infty}\mathcal{V}^{-1} = n_{\infty}$$

Pela manipulação algébrica da expressão acima, chegamos à condição para um versor \mathcal{V} ser de similaridade

$$\widehat{\mathcal{V}}n_{\infty}\mathcal{V}^{-1} = n_{\infty}$$

$$\widehat{\mathcal{V}}n_{\infty} = n_{\infty}\mathcal{V}$$

$$n_{\infty}\mathcal{V} - \widehat{\mathcal{V}}n_{\infty} = 0$$

$$2n_{\infty} \rfloor \mathcal{V} = 0$$

$$n_{\infty} \rfloor \mathcal{V} = 0$$

Versores como Transformações de Similaridade

Para ser um versor de similaridade, \mathcal{V} deve preservar o ponto no infinito

$$\widehat{\mathcal{V}}n_{\infty}\mathcal{V}^{-1} = n_{\infty}$$

Pela manipulação algébrica da expressão acima, chegamos à condição para um versor \mathcal{V} ser de similaridade

$$\widehat{\mathcal{V}}n_{\infty}\mathcal{V}^{-1} = n_{\infty}$$

$$\widehat{\mathcal{V}}n_{\infty} = n_{\infty}\mathcal{V}$$

$$n_{\infty}\mathcal{V} - \widehat{\mathcal{V}}n_{\infty} = 0$$

$$2n_{\infty} \rfloor \mathcal{V} = 0$$

$$n_{\infty} \rfloor \mathcal{V} = 0$$

n_{∞} é ortogonal à qualquer característica que \mathcal{V} venha a codificar

Versores como Transformações de Similaridade

Os versores de similaridade mais simples e mais gerais que existem são vetores que codificam a reflexão em um hiperplano $H_{\langle d+1 \rangle} = h^{-*}$, com vetor normal unitário n e distância δ da origem

$$h = n + \delta n_{\infty}$$

e a reflexão em uma hiperesfera $S_{\langle d+1 \rangle} = s^{-*}$ de raio ρ positivo

Sem perda de generalidade, nos próximos slides utilizaremos $S_{\langle d+1 \rangle}$ centrada na origem, o que leva a

$$s = n_o - \frac{1}{2}\rho^2 n_{\infty}$$

Versores como Transformações de Similaridade

Os versores de similaridade mais simples e mais gerais que existem são vetores que codificam a reflexão em um hiperplano $H_{\langle d+1 \rangle} = h^{-*}$, com vetor normal unitário n e distância δ da origem

$$h = n + \delta n_{\infty}$$

e a reflexão em uma hiperesfera $S_{\langle d+1 \rangle} = s^{-*}$ de raio ρ positivo

Sem perda de generalidade, nos próximos slides utilizaremos $S_{\langle d+1 \rangle}$ centrada na origem, o que leva a

$$s = n_o - \frac{1}{2}\rho^2 n_{\infty}$$

Aplicaremos o teorema de Cartan–Dieudonné na construção de versores para outras transformações de similaridade

Translações a Partir de Dupla Reflexão

A partir do dual de hiperplanos paralelos
e com a mesma orientação

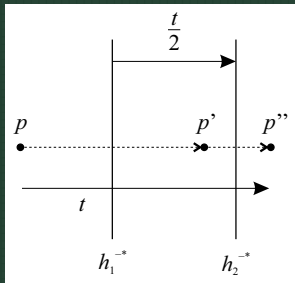
$$h_1 = n + \delta_1 n_\infty$$

$$h_2 = n + \delta_2 n_\infty$$

o rotor de translação \mathcal{T} é obtido por

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &= h_2 h_1 \\ &= (n + \delta_2 n_\infty)(n + \delta_1 n_\infty) \\ &= 1 - (\delta_2 - \delta_1) n \wedge n_\infty \\ &= 1 - \frac{1}{2} t n_\infty\end{aligned}$$

onde $t = 2(\delta_2 - \delta_1)n$ é o vetor de
translação



$$p'' = h_2 h_1 p h_1^{-1} h_2^{-1} = \mathcal{T} p \tilde{\mathcal{T}}$$

Rotação a Partir de Dupla Reflexão

A partir do dual de hiperplanos
não paralelos

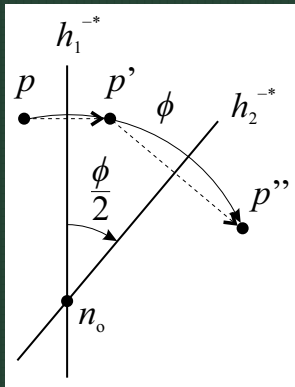
$$h_1 = n_1 + \delta_1 n_\infty$$

$$h_2 = n_2 + \delta_2 n_\infty$$

o rotor de rotação \mathcal{R} é obtido por

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= h_2 h_1 \\ &= (n_2 + \delta_2 n_\infty) (n_1 + \delta_1 n_\infty) \\ &= n_2 \cdot n_1 + n_2 \wedge n_1 \\ &= \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) B_{\langle 2 \rangle} \end{aligned}$$

onde ϕ é o ângulo da rotação que ocorre
no plano unitário $B_{\langle 2 \rangle}$



$$p'' = h_2 h_1 p h_1^{-1} h_2^{-1} = \mathcal{R} p \tilde{\mathcal{R}}$$

Escala Uniforme a Partir de Dupla Reflexão

A partir do dual de hiperesferas
centradas na origem

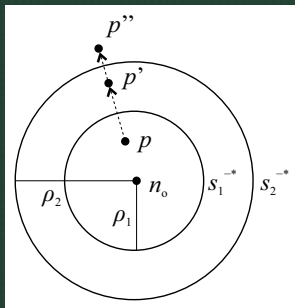
$$s_1 = n_o - \frac{1}{2}\rho_1^2 n_\infty$$

$$s_2 = n_o - \frac{1}{2}\rho_2^2 n_\infty$$

o rotor de escala positiva \mathcal{S} é obtido por

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= s_2 s_1 \\ &= \left(n_o - \frac{1}{2}\rho_2^2 n_\infty \right) \left(n_o - \frac{1}{2}\rho_1^2 n_\infty \right) \\ &= \frac{1}{2} (\rho_1^2 + \rho_2^2) - \frac{1}{2} (\rho_1^2 - \rho_2^2) n_o \wedge n_\infty \\ &= \cosh\left(\frac{\gamma}{2}\right) + \sinh\left(\frac{\gamma}{2}\right) n_o \wedge n_\infty\end{aligned}$$

onde $\exp(\gamma) = \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2}$ é o fator de escala



$$p'' = s_2 s_1 p s_1^{-1} s_2^{-1} = \mathcal{S} p \tilde{\mathcal{S}}$$

Transformações como Exponencial de 2-blades

A exponencial de k -blades em um espaço métrico arbitrário, para grau k par, é escrita com série de Taylor

$$\begin{aligned}\exp(A_{\langle k \rangle}) &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{A_{\langle k \rangle}^t}{t!} \\ &= 1 + \frac{A_{\langle k \rangle}}{1!} + \frac{A_{\langle k \rangle}^2}{2!} + \frac{A_{\langle k \rangle}^3}{3!} + \dots \\ &= \begin{cases} \cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\alpha} A_{\langle k \rangle} & , \text{ para } A_{\langle k \rangle}^2 = -\alpha^2 \\ 1 + A_{\langle k \rangle} & , \text{ para } A_{\langle k \rangle}^2 = 0 \\ \cosh \alpha + \frac{\sinh \alpha}{\alpha} A_{\langle k \rangle} & , \text{ para } A_{\langle k \rangle}^2 = \alpha^2 \end{cases}\end{aligned}$$

Transformações como Exponencial de 2-blades

Os rotores de rotação, translação e escala uniforme positiva vistos anteriormente podem ser obtidos como os casos da exponencial de 2-blades

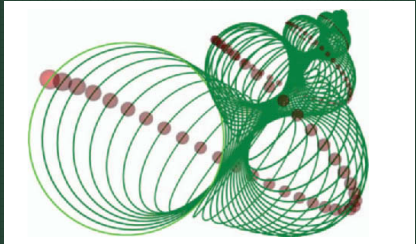
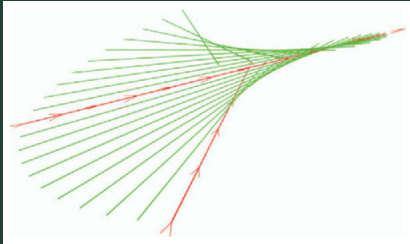
$$\mathcal{R} = \exp\left(-\frac{\phi}{2}B_{\langle 2 \rangle}\right) = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)B_{\langle 2 \rangle}$$

$$\mathcal{T} = \exp\left(-\frac{1}{2}t \wedge n_{\infty}\right) = 1 - \frac{1}{2}t \wedge n_{\infty}$$

$$\mathcal{S} = \exp\left(-\frac{\gamma}{2}n_o \wedge n_{\infty}\right) = \cosh\left(\frac{\gamma}{2}\right) + \sinh\left(\frac{\gamma}{2}\right)n_o \wedge n_{\infty}$$

O logaritmo desses versores é conhecido!

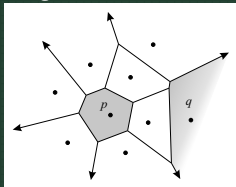
Aplicação: Interpolação de Transformações



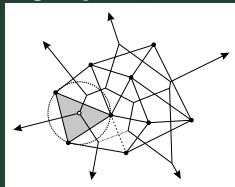
Imagens de Dorst, Fontijne, and Mann, "Geometric algebra for computer science: an object oriented approach to geometry", Amsterdam: Morgan Kaufmann Publishers, 2007

Aplicação: Voronoi e Delaunay

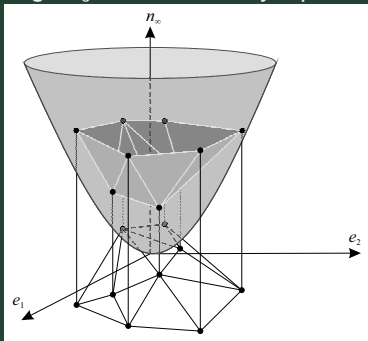
Diagrama de Voronoi



Triangulação de Delaunay

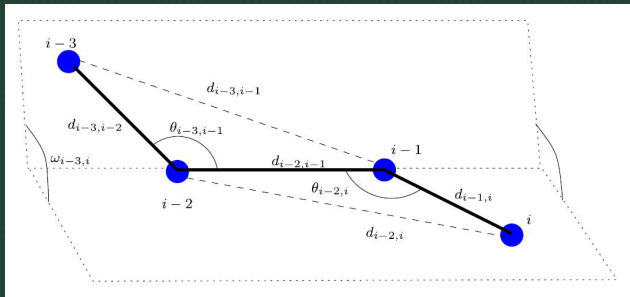


Construção da triangulação de Delaunay a partir do fecho convexo



Aplicação: Cálculo de Estrutura Molecular

Imagem dos comprimentos de ligação, ângulos de ligação e de torção entre átomos

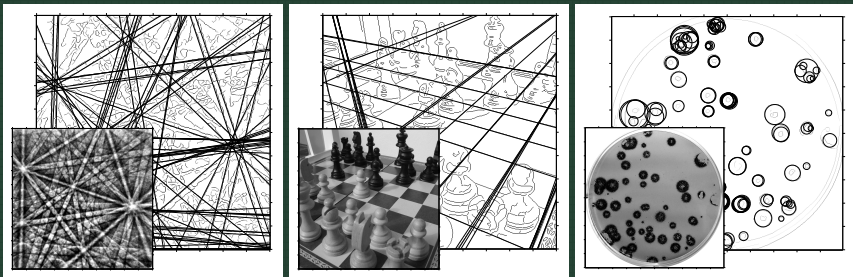


A discretização da geometria de distâncias moleculares sugere uma interpretação geométrica do problema através da interseção de esferas

Imagem de Alves, "Álgebra de Clifford Aplicada ao Cálculo de Estruturas Moleculares", Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, 2013

Aplicação: Detecção de Formas Geométricas Analíticas

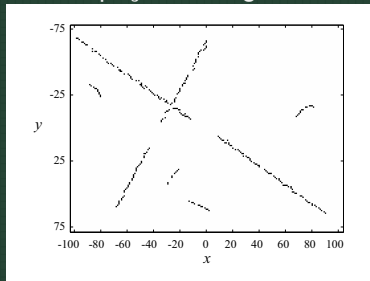
Detecção automática de entidades geométricas em imagens é uma tarefa rotineira em Visão Computacional



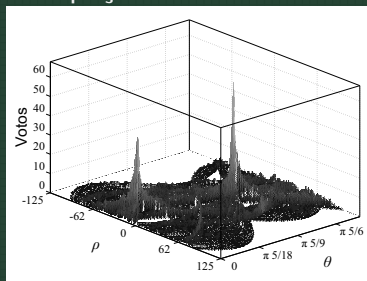
Aplicação: Detecção de Formas Geométricas Analíticas

Uma das técnicas mais empregada é a Transformada de Hough

Espaço de Imagem



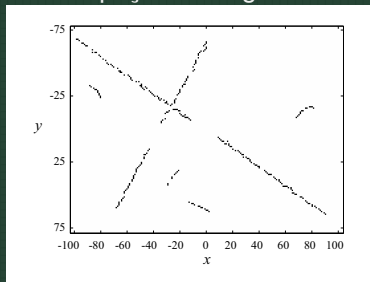
Espaço de Parâmetros



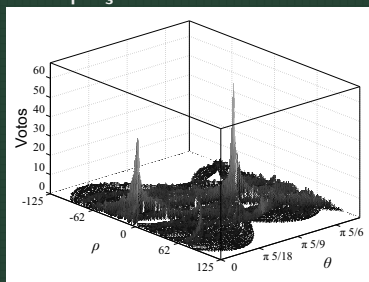
Aplicação: Detecção de Formas Geométricas Analíticas

Uma das técnicas mais empregada é a Transformada de Hough

Espaço de Imagem



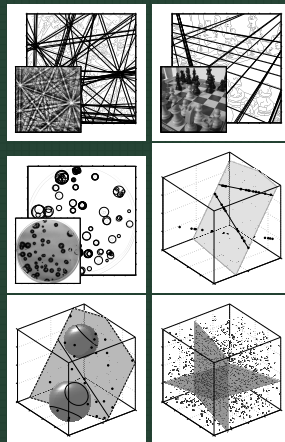
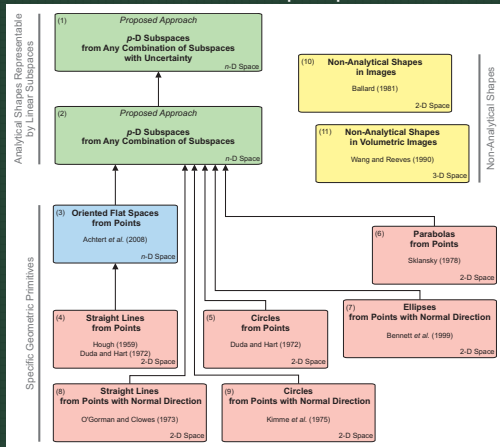
Espaço de Parâmetros



Requer um modelo matemático diferente e um mecanismo de votação diferente para cada caso de tipo de entrada e tipo de entidade geométrica a ser detectada

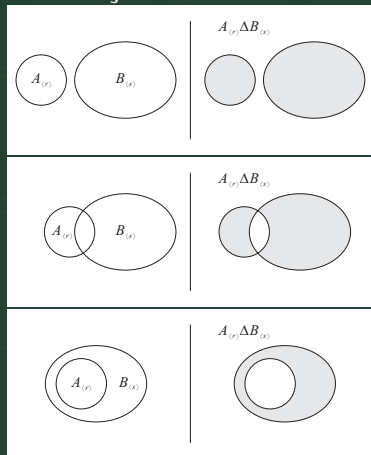
Aplicação: Detecção de Formas Geométricas Analíticas

A Transformada Generalizada para Subespaços define um mecanismo de votação e identificação de picos de votos para encontrar os blades de grau p que melhor se ajustam aos blades de entrada de grau qualquer, em qualquer modelo de geometria



Aplicação: Teste Geral de Inclusão

Casos de
relação de inclusão



$$A_{\langle r \rangle} \wedge (A_{\langle r \rangle} \Delta B_{\langle s \rangle}) \neq 0$$

$$\text{se } A_{\langle r \rangle} \subseteq B_{\langle s \rangle}$$

Considerações Finais

Considerações Finais

- Linguagem universal consistente para operações geométricas
 - ▶ Elementos geométricos como primitivas
 - ▶ Produtos com significado geométrico embutido
- Se bem utilizada, leva a soluções que generalizam
 - ▶ Para dimensões mais altas
 - ▶ Para todo tipo de elemento geométrico
- Abre oportunidades de pesquisa
 - ▶ Definição de novos algoritmos
 - ▶ Generalização e integração de técnicas existentes
 - ▶ Definição de novos modelos de geometria

Considerações Finais

- Linguagem universal consistente para operações geométricas
 - ▶ Elementos geométricos como primitivas
 - ▶ Produtos com significado geométrico embutido
- Se bem utilizada, leva a soluções que generalizam
 - ▶ Para dimensões mais altas
 - ▶ Para todo tipo de elemento geométrico
- Abre oportunidades de pesquisa
 - ▶ Definição de novos algoritmos
 - ▶ Generalização e integração de técnicas existentes
 - ▶ Definição de novos modelos de geometria

Em breve teremos a
Escola Nacional de Álgebra Geométrica e Aplicações (ENAGA)
de 27 a 30 de julho de 2020