

P1 - 2025 - CG - nome _____ Número de matrícula: _____

- 1) Baseado no seu número de matrícula crie 2 quatérnios. Apresente-os e diga:
- (a) Qual a parte vetorial deles no sistema de eixos 3D complexo.
 - (b) Quais os quatérnios conjugados destes dois números.
 - (c) Some esses 2 quatérnios.
 - (d) Transforme o resultado da soma em um quatérnio unitário.
 - (e) Multiplique esses 2 quatérnios.

Objetivo – verificar entendimento do que são H.

Valor total 3,0 dividindo entre os subitens abaixo.

Respostas: Por exemplo, supondo o número 223037027, um pode ser $\langle 2, 2, 3, 0 \rangle$ e o outro $\langle 7, 0, 2, 7 \rangle$. **Valor 0,1**

(a) A parte vetorial seriam os 3 últimos de cada um. Usando a notação da página 78, seria: (a) $2i+3j+0k$ e $0i+2j+7k$. **Valor 0,2**

(b) Os **conjugados** são (b) $\langle 2, -2, -3, 0 \rangle$ e $\langle 7, 0, -2, -7 \rangle$ ou $2+2i+3j+0k$ e $7+0i+2j+7k$. **Valor 0,2**

(c) **Somando** eles temos: (c) o quatérnio $\langle 9, 2, 5, 7 \rangle$ ou $9+2i+5j+7k$. **Valor 0,5**

(d) Esse quatérnio tem norma dada por: raiz quadrada de $(81+4+25+49) = \sqrt{159} = 12,60952$. Multiplicando esse quatérnio pelo número real $1/\sqrt{159}$ se tem um **quatérnio unitário**: (d) $1/\sqrt{159} \langle 9, 2, 5, 7 \rangle$. **Valor 0,5**

(e) **Valor 1,5** A multiplicação dos 2 quatérnios pode ser feita de vários modos.

A mais simples de todas, pois não requer qualquer fórmula: multiplicação dos 2 quatérnios pode ser obtida da **multiplicação direta** de $(2+2i+3j+0k)$ por $(7+0i+2j+7k)$ levando em conta que **i, j, k são complexos e vetores** no sentido dos eixos.

Assim multiplicando cada um dos elementos do primeiro pelo segundo se tem: $2(7+0i+2j+7k) + 2i(7+0i+2j+7k) + 3j(7+0i+2j+7k) + 0k(7+0i+2j+7k)$ e desenvolvendo:

$$(14+0i+4j+14k) + (14i+0i^2+4ij+14ik) + (21j+0ji+6j^2+21jk) + 0 =$$

$$(14+0i+4j+14k) + (14i+0i^2+4k-14j) + (21j+0-6+21j+21i) =$$

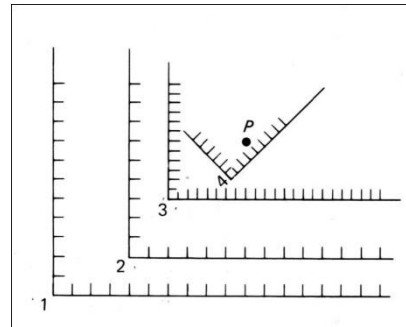
(e) $8+35i+32j+18k$ (resposta final)

Ou Alternativamente pode ser obtido pela formula da pagina 82:

$$p \otimes q = p_0q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q} \quad \text{Mas considerando corretamente cada parte}$$

Variações da resposta para pontuação deste item: Só dar a formula correta **ganha 0,1**. Erro de multiplicação de cada um dos vetores imaginários **-0,1** para cada erro. Ou **meia questão** o que for melhor para o aluno. Arrumando os diversos elementos, mas não fazendo a multiplicação vetorial dos imaginários = **meia questão**.

2- Observe os 4 sistemas de coordenados da figura abaixo. Veja que a origem de cada um está em um ponto diferente, mas pode ser definida em relação aos demais. Repare que uma unidade nos sistemas 1 e 2 corresponde a 2 unidades nos sistemas 3 e 4.



(a) - Desenhe em cada um dos sistemas um retângulo. Esses 4 retângulos devem ter suas diagonais principais indo da origem $O=(0,0)$ até o um ponto $P=(4,2)$ de cada sistema de eixos, nas unidades destes. Para facilitar marcamos o ponto P no último sistema.

Depois de fazer esses desenhos, observar os retângulos e os dois pontos $O=(0,0)$ e $P=(4,2)$ das diagonais dos mesmos nas diversas coordenadas **responda as 9 perguntas que seguem:**

- (b) - Que transformação 2d transforma o **primeiro** no **segundo** retângulo e **vice versa**.
- (c) - Dê **a matriz** que transforma o **primeiro** retângulo no **segundo**, e
- (d) - Dê **a matriz** que transforma o **segundo** no **primeiro**.
- (e) - Que transformações 2d transformam o **segundo** retângulo no **terceiro**.
- (f) - Descreva **a matriz** única que transforma o **segundo** retângulo no **terceiro**.
- (g) A **ordem** destas transformações é importante? (se sim/não, por quê?)
- (h) - Que transformações levariam o **terceiro** retângulo no **segundo** retângulo?
- (i) - Como você poderia transformar o **retângulo 3** no **retângulo 4** ? (diga o nome delas e as **explique com suas palavras**, mas não precisa apresentar a matriz 4x4 final, pode indicar cada uma delas separadamente e como as combinaria).
- (j) - Como você poderia fazer **sucessivamente** uma transformação do retângulo **1 ao 4**? (não precisa resolver apresentando a matriz final apenas explicar detalhadamente **com suas palavras**).

Objetivo – verificar entendimento de como se transforma em 2D usando coordenadas homogêneas e suas combinações em CG.

Valor total 3,0 dividindo entre os subitens abaixo. A questão pode ser avaliada descontando item não respondido

Respostas:

(a) Este item será corrigido pelo o desenho de cada aluno. **Valor 0,1.**

(b) **Translação (valor total 0,2) dividindo entre os subitens abaixo.**

Na ordem de ida: Os sistemas 1 e 2 tem mesma escala. A diferença é onde esta a origem de cada um. Sendo o 2 posicionado em (4,2) do 1. **Valor 0,1.** Exatamente onde o retângulo 1

finaliza. Assim o retângulo 1 apenas é transladado para se transformar no 2, de um valor igual a sua largura e altura.

Na ordem de volta: O retângulo 2 apenas é transladado para se transformar no 1 em sentido oposto. **Valor 0,1 (ou mencionado de alguma forma a ordem inversa)**

Note que por definição de inversa se tem $T \times T^{-1} = I = T^{-1} \times T$ como pode ser notado abaixo:

1	0	x		1	0	-x		1	0	x-x		1	0	-x		1	0	x
0	1	y	*	0	1	-y	=	0	1	y-y	=	0	1	-y	*	0	1	-y
0	0	1		0	0	1		0	0	1		0	0	1		0	0	1

Assim obviamente uma terá valores negativos em relação a outra na posição das translações em coordenadas homogêneas.

(c) Valor total 0,2 (definindo concretamente os valores).

Transformação de Translação de 4 na horizontal e 2 na vertical, levariam o primeiro retângulo no segundo, e o segundo no primeiro pela translação oposta. Todos os pontos do retângulo 1 são levados ao retângulo 2 pela soma dos pontos do retângulo com o **veto** $t=(4,2)$.

Como **pede que a matriz** que transforma o retângulo 1 no 2, a resposta deve ser apresentada em **coordenadas homogêneas**. Usando a notação de **veto** linha ou **veto** coluna e a **regra de multiplicação de matrizes**, que modifica a posição das coordenadas homogêneas, dependendo de o veto estar antes ou depois da matriz página, em coordenadas homogêneas essas devem ser.

x2		1		4		x1				1				x1	y1	1
y2	=		1	2		y1		Ou	x1	y1	1	*				
1				1		1							4	2	1	

Objetivo deste item - Esse item leva o aluno a mostrar de alguma forma se esta usando vetores linha ou coluna. Assim se conscientizar da ordem de pré ou pós-multiplicação em relação a transposta da matriz de transformação. Se o ponto for descrito em linha e pré-multiplicado pela matriz essa deve ser usada na forma transposta, pela regra de multiplicação de matrizes ($l \times m * m \times n = l \times n$).

(d) valor total 0,2

Objetivo deste item - Esse item se confirma a forma como (o aluno) está usando vetores linha ou coluna. Verifica-se se entende a relação da pré ou pós-multiplicação com o resultado e que isso tem relação à transposta da matriz de transformação.

Todos os pontos do retângulo 2 são levados ao retângulo 1 pela **soma** dos pontos do retângulo com o **veto** $t=(-4, -2)$.

Como **(d) pede que matriz** transforme um retângulo no outro, a resposta deve ser apresentada em coordenadas homogêneas. Usando a notação da adequada a forma usada por cada um, ou coordenadas homogêneas essas devem ser.

x1	y1	1	=	1			*	x2	y2	1	ou	x1		1		-4		x2	
					1								y1		1		-2		y2
				-4	-2	1							1			1			1

(e) valor total 0,2 Mudança de Escala de ½ e Translação de 3 unidades na horizontal , na 2 na vertical nesta ordem, transformam o segundo retângulo no terceiro. Os sistemas seguintes 2 e 3 tem escalas diferentes além das origens. A diferença é que a do sistema 3 é metade da escala do 2. De acordo com o desenho, a origem do sistema 3 está em (2,3) do sistema 2. Assim o retângulo 2 para se transformar no 3, deve ter sua escala reduzida a metade e depois transladado para (2,3), nas unidades iniciais.

(f) valor total 0,3

Em coordenadas homogêneas, a **matriz única** que faz isto é a primeira matriz abaixo, resultado (como mostrado) da multiplicação da segunda e terceira.

1/2		2		x		1		2		1/2			x
	1/2	3	*	y	↔		1	3	*		1/2		y
		1		1				1				1	1

Valor 0,1 pelas individuais. Valor 0,2 pela multiplicação final na ordem certa pela consciência do efeito desejado.

Pode-se ver que a matriz acima leva o retângulo 2 com pontos da diagonal (0,0) e (4,2) para os pontos do retângulo 3 ao multiplicar esses dois pontos pela primeira matriz abaixo. Assim se vê que esses pontos serão transformados para (2,3) e (4,4), se descritos nas coordenadas do sistema 2, que definem a posição da diagonal do retângulo 3. E **exatamente** onde o retângulo do sistema 3 fica posicionado se descrito no sistema 2. Se o ponto for descrito em linha e pré-multiplicado pela matriz essa deve ser usada na forma transposta, pela regra de multiplicação de matrizes ($l \times m * m \times n = l \times n$).

Esse item os centros estão deslocados de 2 na horizontal e 3 na vertical se a referencia for o retângulo 2. (ou 6, 4 em direções opostas se a referencia for o retângulo 3). A escala passa a ser a metade se a referencia for o retângulo 2. A escala passa a ser o dobro se a referencia for o retângulo 3.

Objetivo: fazer o aluno a se conscientizar da ordem da multiplicação e verificar se a faz na ordem certa. Fazer o aluno a se conscientizar que : **Como sabe o resultado** facilmente se auto corrige quanto a ordem, **de modo a para fazer o correto** nos próximos itens. (Poderia facilmente usar os ponto dos retângulo para checar por si mesmo se está fazendo na ordem correta , ou como esta usando a matriz em relação ao ponto (vetor).

(g) valor total 0,3 - Sim (mas só pela resposta correta nada leva). O valor será de 0,1 por responder a cada um dos três porquês. A ordem destas é muito importante por 3 motivos : 1- valor 0,1- a transformação de escala fora da origem produz uma translação automaticamente; 2- valor 0,1- como a multiplicação precisa ser feita como T ou T^t dependendo de usar vetor como linha ou coluna pela regra de multiplicação (ponto for descrito em linha (1x3) deve ser pré-multiplicado pela matriz , se como coluna 3x1, essa deve ser usada na forma transposta em relação a anterior; 3- valor 0,1- e mais importante de tudo, não se terá o efeito desejado quando se fizer um teste usando algo com resposta conhecida, como neste item.

(h)- Que transformações levariam o terceiro retângulo no segundo retângulo? Valor total 0,6.

Translação e escala. (mas só pela resposta correta nada leva) O valor será de 0,1 a cada completar da resposta.

Objetivo: entender como obter as matrizes. Como podem ser usados como referência os pontos do terceiro retângulo. A forma correta de descrever todas as coordenadas do segundo retângulo em relação ao sistema de referencia do terceiro.

Para transformar o terceiro retângulo no segundo, se **dobra** a escala e **translada-se** depois considerando as novas unidades. Ou usamos uma única matriz em coordenadas homogêneas resultado da multiplicação destas duas. Na forma de vetor coluna pós-multiplicado essa fica: Para multiplicação das matrizes em outra ordem se tem outro resultado:

2		-4	*	x		2		0	*	1		-2	*	x
	2	-6		y	↔		2	0			1	-3		y
		1		1				1				1		1

(obs. importante. Repare que nesta forma de uma **matriz única**, agora o **referencial** é o retângulo 3. Esse tem que estar na **nova origem** antes de ser modificado por efeitos de **escala**, que tem importância de serem feitos na origem, como neste caso é a alteração de unidades de referencia. Ou seja com isso o ponto $O_3=(0,0,1)^T$ vai para $O_4=(-4,-6,1)^T$ em coordenadas do sistema 3, que é a origem do sistema 2 descrito em medidas do sistema 3. O ponto $P_3=(4,2,1)^T$ vai para $P_3=(4,-2,1)^T$ considerado ambos descritos no sistema 3, que é o ponto P do retângulo 2 descrito em coordenadas do sistema 3.)

Na forma misturando as escalas dos dois sistemas, ou seja,

2		-2	*	x		1		-2	*	2		0	*	x
	2	-3		y	↔		1	-3			2	0		y
		1		1				1				1		1

Veja que os pontos $O_3=(0, 0, 1)$ e $P_3=(4, 2, 1)$ do retângulo 3 serão $O_2= (-2, -3, 1)$ (que seria a origem do retângulo 3 descrita nas coordenadas do 2) e $(6, 1, 1)$ que não é um ponto P do retângulo 2?

Pontuação do item: Apenas falar translação e escala, mas sem valores e mostrar que entende da importância da ordem e das referências em relação ao objeto apenas 0,1.

Recebe mais 0,1 pontos até o máximo à medida que completar a resposta. Assim se ainda não entendeu isso pode vir a fixar.

Para multiplicação das matrizes em outra ordem se tem outro resultado:

2		-4		x		2		0		1		-2		x
	2	-6	*	y	↔		2	0	*		1	-3	*	y
		1		1				1				1		1

Na forma de linha tudo entra como transposta $(A v)^t = v^t A^t$

- (i) **Valor total 0,6;** o pedido na questão: “Como você poderia transformar o retângulo 3 no retângulo 4 ? (diga o nome delas e as explique com suas palavras....)”. O início da resposta é: **Rotação e Translação (que são os nomes das Transformações e que devem ser feitas nesta ordem).** Recebe **0,1 pelos nomes e 0,1 pela ordem correta**

A explicação com palavras está abaixo. **Valor:** cada aluno recebe mais **0,1 pontos** até o máximo à medida que completar a resposta.

Para transformar o retângulo 3 no retângulo 4 pode-se primeiro girar ele de **45 graus** em torno do (0,0) do sistema 3 (no sentido anti horário ou geometricamente positivo no plano 2d) para não ter efeitos adicionais além da rotação e depois **transladar** a origem do sistema 3 para onde parece ser a posição da origem do sistema 4, em relação ao 3 (6,5 ; 2), que é o ponto O do último retângulo. A matriz de rotação que faz isso está a direita abaixo. Depois deve ser multiplicada (ou composta) pela de translação à esquerda para se usar uma matriz única.

1		6,5		$\cos 45^\circ \approx 0,707$	$\sin 45^\circ \approx -0,707$	0
	1	2		$\sin 45^\circ \approx -0,707$	$\cos 45^\circ \approx 0,707$	0
		1		0	0	1

Multiplicando na ordem das matrizes de translação e rotação se tem a matriz da esquerda e Multiplicando na ordem das matrizes de rotação por translação a da direita. O que novamente mostra **importância da ordem** fazer sentido como efeito geométrico.

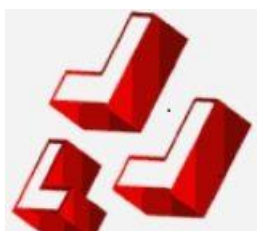
0,7	-0,7	6,5	Completamente diferente de	0,7	-0,7	0,7 (6,5-2)
-0,7	0,7	2		-0,7	0,7	0,7 (2-6,5)
0	0	1		0	0	1

Valor: Cada matriz com valores corretos nas posições corretas **0,1** . O sinal menos do seno, vai ser mantido em apenas uma posição da diagonal secundária, dependem de em que direção ao ser girado (os eixos ou o objeto) uma das dimensões diminuir. Em 3D isso também depende ser positivo ou negativo o sistema de eixos. AINDA: Em 2d e 3d depende de se usar vetor linha ou coluna para representar cada ponto.

Valor do item: É importante por valores nas matrizes, indicar que entendeu a ordem como devem ser multiplicada uma pela outra e em relação aos pontos (como matriz que é linha ou coluna, que aqui chamamos de vetor linha ou coluna).

(j) - valor total 0,3. Resposta: para fazer os diversos efeitos do 1 ao 4, as matrizes de cada efeito simples podem ser multiplicadas na ordem correta para resultar em efeitos complexos. Ou pode-se considerar as coordenadas importantes do retângulo 1 definidas no sistema 1 e ir sucessivamente fazendo cada transformação descrita neste sistema de coordenadas, para no final ter os pontos do retângulo 4 definido como coordenadas do sistema 1.

Valor: É importante por valores nas matrizes, dar uma dica de qual o referencial usado nas translações, escalas e rotação. Indicar que entendeu como devem ser multiplicada uma pela outra e em relação aos pontos (como a matriz ser linha ou coluna, que aqui chamamos de vetor linha ou coluna). Caso deu uma resposta final, para valoriza-lo, ver se essa pontuação pode ser incluída nos itens anteriores da questão.



3- A figura a lado mostra 2 transformações 3D feitas no **mesmo objeto**, que chamamos de **L**. Se tentou desenhar o objeto e todas as suas transformações sempre posicionados sobre um plano e desenhado em projeção paralela oblíqua de forma a se **manter as proporções das medidas unitárias nos 3 eixos**. O maior lado dele tem 7, o menor 4, sua altura é 3 e a espessura da forma L tem 1,5 centímetros.

Considerando que a posição inicial é a do objeto mais ao alto no desenho, e que ele inicialmente está posicionado na origem do sistema de eixos XYZ positivo, de modo que a origem do sistema 3D de eixos tenha centro na interseção das faces sombreadas do objeto com o plano em que o objeto se encontra posicionado. O eixo X seja na horizontal, o Y na direção do maior lado do objeto e para o alto da página. O Z estaria na interseção das faces sombreadas do objeto e perpendicular ao plano em que está apoiado, XY, com sentido positivo para fora do plano. Nesta posição as coordenadas importantes deste objeto estão descritas na matriz 12x3 abaixo onde cada coluna representa as coordenadas de um ponto de L:

0	0	0	0	-4	-4	-4	-4	-1,5	-1,5	-1,5	-1,5	x
0	7	7	0	0	0	2	2	2	7	2	7	y
0	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	0	z

Agora se pede:

- Desenhe **os 3 eixos mencionados** sobre o esquema nas **direções e na posição descrita** no enunciado
- Que transformação 3D leva o objeto da posição inicial para a mais a direita na imagem? Descreva-a com e sem o uso de coordenadas homogêneas. Use para isso os sistemas de eixos e as coordenadas dos pontos do objeto informadas acima, além da interpretação da visualização da imagem projetada.
- Multiplique alguns pontos do objeto acima pela sua resposta para verificar se faz sentido a matriz apresentada com a transformação que ocorre nos pontos do objeto.
- Que sequência de transformações leva o objeto da posição inicial para a mais a esquerda na imagem? Interprete a projeção e descreva cada transformação com uso de coordenadas homogêneas.

Objetivo – verificar entendimento da composição de transformações em 3D em CG.

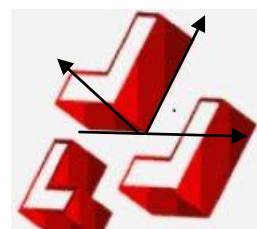
Valor total 3,0 dividindo entre os subitens abaixo

Respostas

Z

Y

- Valor 0,1** – importante indicar os sentidos **positivos dos eixos**, ou seja, eles devem satisfazer a **regra da mão direita** na definição das direções. Ou seja, devem ser **eixos positivos**.



Os dois tipos de projeções oblíquas mais utilizadas são: cavaleira e cabinet. Na **cavaleira** os raios de projeção formam um ângulo de 45° com o plano de projeção. Isto resulta no fato de que segmentos de reta ortogonais ao plano de projeção possuirão o mesmo comprimento que sua projeção. Essa foi a que se tentou usar no desenho pelo comentário feito. **O desenho deveria ser feito por cada aluno, mas**

deve ser algo como no esquema ao lado, onde a origem seria a interseção das 3 linhas mostradas e o sentido positivo dados pelas setas.

(b) **Valor 0,9 (com os valores divididos em partes)** A **translação 3D** leva o objeto da posição inicial para a mais a direita na imagem. Essa deve deslocar o objeto no **sentido positivo** do eixo X e **negativo** do eixo Y, mas para deve **manter ele no plano** em que está apoiado. Para isto deve ser dada por um **vetor de translação na forma $\langle x; y; 0 \rangle$** . Pelas dimensões do objeto, compreendidas pelas suas coordenadas fornecidas, essas deve ser tal que $x > 4$, pois esse é o lado de sua face L menor. E ter $y < 7$, **no sentido negativo**, pois esse é o lado de sua face L maior, que não parece no desenho estar completamente abaixo da nova posição do L.

Em 3d um vetor de translação de 3×1 pode ser $\langle 5, -5, 0 \rangle^T$ ou $\langle 5, -6, 0 \rangle^T$ ou diversas variações disto $\langle 4.5, -5.5, 0 \rangle^T$ etc. **Valor: 0,2 sem especificar valores e dando esses de forma a fazer sentido**

Em **coordenadas homogêneas**, considerando a forma descrita na página 70 do livro texto, temos que as partes 3x3 e 1x1 ao lado serão a identidade, e a translação 3x1 se incorpora a parte mais a direita da matriz.

$$\left[\begin{array}{c|c} 3 \times 3 & 3 \times 1 \\ \hline 1 \times 3 & 1 \times 1 \end{array} \right]$$

Deste modo a **matriz em coordenadas homogêneas** fica como a 4x4 abaixo. **Valor 0,2 sem especificar valores e dando esses de forma a fazer sentido + 0,5.**

1			5
	1		-6
		1	0
			1

c) Considerando os **pontos do objeto dado**, na forma dos pontos dada, i.e. de 4 linhas por 12 colunas (uma para cada ponto), a ordem da multiplicação deve ser de $4 \times 4 * 4 \times 12$

[illegible]

(pela matriz 12x4 acima temos que eles multiplicados por essa matriz resultam na matriz 12x4 abaixo). Cada ponto pode ser multiplicado individualmente como $4 \times 4 * 4$, o aluno escolhendo alguns pontos.

Valor 0,1 por cada coordenada correta que tiver transformado de uma posição para a outra, de acordo com suas respostas, até o **Maximo de 0,5 pontos**.

5	5	5	5	-1	-1	-1	-1	3,5	3,5	3,5	3,5
-6	-1	-1	-6	-6	-6	-2	-2	-2	-13	-2	-1
0	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

(d) **Valor 1,5 no total.**

Neste item além de apresentar as matrizes genéricas é **importante especificar valores** e descrever como elas seriam **compostas por multiplicação**. Mencionar a ordem correta até se chegar aos pontos, mostra que foi entendido como se compõem as matrizes. Não só fornecer as matrizes de forma a fazer sentido. **Não falar da ordem implica em (metade da questão), i.e. não receber mais da metade da questão. Idem por não especificar valores. Nem um nem outro valor da questão de no máximo ¼ do valor da questão total.**

Há diversas respostas.

Resposta 1. Uma das sequencia de transformações que leva o objeto da posição inicial para a mais a esquerda na imagem é: um **espelhamento** (ou reflexão) em torno do plano YZ (ou $x=0$), e a **translação** para a posição final de um vetor com valores negativos em X e Y de modo a reposicionar o objeto. Pela aparência do desenho a translação em x deve ser maior que o lado menor do L, e y maior que o maior lado de L. E ambas no sentido negativo do sistema de eixos desenhado na figura. Em coordenadas homogêneas tem-se, por exemplo, uma translação final de $\langle -5, -8, 0, 1 \rangle^T$. E a composição deve ser na ordem de espelhamento, e, por último a translação. Para se chegar a isso devem ser multiplicadas na ordem abaixo:

1			-5		-1				-1			-5
	1		-8	*		1				1		-8
		1	0				1				1	0
			1					1				1

Espelhamento em torno do plano YZ=>inverte as coordenadas x e deixa as demais inalteradas

Note que essas mesmas matrizes multiplicadas em outra ordem resultam outra transformação no objeto, por exemplo:

-1					1			-5		-1		5
	1					1		-8			1	-8
		1		*			1	0				0
			1					1				1

Resposta 2. Produz mesmo resultado uma **rotação em Y de 180 graus** (neste caso as coordenadas x e z do objeto ficarão $-x$ e $-z$). Esses efeitos são os desejado na direção x, mas não na direção z. Assim a translação final pode ter valores negativos variados em x e y, mas

não na direção z. O objeto deve ter apenas coordenadas positivas em Z, de modo que deve-se ter uma translação obrigatória igual **a altura do objeto em Z**, para não modificar as coordenadas z de cada ponto, em que essas não forem zero. A translação em z **tem que ser de 3**. Usando, aqui as mesmas x e y anteriores, mas os alunos podem escolher outras.

1			-5	*	Cos 180°=-1		sen 180°=0	0	=	-1			-5
	1		-8			1		0			1		-8
		1	3		sen 180°=0		Cos 180°=-1	0				-1	3
			1					1					1

Resposta 3. Outra sequência de transformações que leva o objeto da posição inicial para a mais a esquerda na imagem é: um **espelhamento em torno do plano XZ** (ou $y=0$), depois uma rotação de Euler no eixo Z em torno da origem de 180 graus, e a translação para a posição final de um vetor com valores negativos em X e Y de modo a reposicionar o objeto. Pela aparência do desenho x deve ser maior que o lado menor do L, e y maior que o maior lado de L. E ambas no sentido negativo do sistema de eixos desenhado na figura. Em **coordenadas homogêneas** tem-se, por exemplo, uma translação final de $\langle -5, -8, 0, 1 \rangle^T$. E a composição **deve ser na ordem de espelhamento e rotação**. O resultado transformado pela translação, depois. A matriz resultante desta multiplicação considera 3 matrizes a serem multiplicadas, devendo serem multiplicadas 2 a 2, como se faz abaixo:

1			-5	*	Cos 180°=-1	sen 180°=0			*	1				=	-1			-5
	1		-8		-sen 180°=0	Cos 180°=-1					-1					1		-8
		1	0					1				1					1	0
			1					1					1					1

Espelhamento em torno do plano XZ=>inverte as coordenadas y e deixa as demais inalteradas. **Rotação** em torno de Z: só altera coordenadas x,y, as deixando negativas. Depois de estar na nova orientação o objeto pode ser reposicionado.

A Multiplicação deverá ser feita, considerando que um ponto será espelhado, depois girado e por último transladado. Nesta ordem, gerando uma **matriz única** que produz esse efeito combinado das 3 matrizes. Essa final acaba sendo a mesma das anteriores. Se feita na ordem correta.

1			-5	*		-1				=		-1			-5
	1		-8				1						1		-8
		1	0					1						1	0
			1						1						1

Resposta com consideração de variação de escala – significa que **não foi bem lida a questão**, pois na terceira linha do enunciado, é dito que foi **mantida a escala do objeto** (alé da professora ter salientado oralmente em sala). **Valor 0 no total deste subitem com escala.**

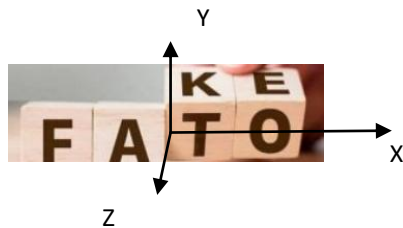
4 - Em uma animação deve-se transformar a palavra FATO na FAKE, ambas descritas em blocos didáticos de alfabetização. A **imagem** ao lado concretiza essa situação. Aproveitando essa imagem inclua nela um **sistema de eixos ortogonais cartesianos** que facilite você a responder as seguintes perguntas:



- (a) Que **transformação 3D** faria esse efeito?
- (b) Indique, usando os eixos que definiu **uma matriz** que produz esse efeito usando **ângulos de Euler**.
- (c) Descreva o **quaternion de rotação** que faz o mesmo efeito.
- (d) Diga como os pontos dos 2 blocos a serem movidos na animação devem ser considerados, concretamente mostrando **uma equação** que fará essa animação.

Objetivo – verificar entendimento do uso de H em CG e sua diferença das rotações de Euler.

Valor total 1,0 dividindo entre os subitens abaixo



Respostas:

- (a) **Valor 0,1 Rotação em X.** Passando eixos XYZ com origem no centro da face mais direita do bloco A. Com o eixo X paralelo aos lados horizontais das faces de frente dos blocos F e A e de modo que seu sentido positivo aponte para o sentido de leitura das palavras. O eixo Y será paralelo aos lados verticais das faces de frente dos blocos F e A e de modo que seu sentido positivo aponte para cima na pagina. E o eixo Z será o resultado do produto vetorial de X com Y, ou seja, ele é perpendicular às faces de frente dos blocos F e A, de modo que seu sentido positivo **aponte para fora** desta folha de papel, como desenhado. A transformação 3D faz esse efeito será de **rotações em torno de X**.
- (b) **Valor 0,2** A rotação em X usando **ângulos de Euler** se comporta como a identidade na direção deste eixo tendo valores de cossenos na diagonal principal e de senos na secundária (como definida na página 60 do livro texto). Usando o ângulo β (beta) para indicar o giro em torno de X. Usando **ângulos de Euler** será definida em **coordenadas homogêneas** como:

1			
	$\cos \beta$	$-\sin \beta$	
	$\sin \beta$	$\cos \beta$	
			1

As coordenadas **x** nunca mudam e as **y e z** , ficam **y' = y cosB – z senB** e **z' = y senB + z cosB**. Esse ângulo final deve ser de 90 graus

(c) **Valor 0,3**. O quaternio de rotação $q = \langle \cos\beta/2, \sin\beta/2*(1, 0, 0) \rangle$ faz o mesmo efeito de rotação em torno de x ao ser multiplicado pelos pontos dos 2 blocos que serão movidos na animação.

(d) **Valor 0,4**. Esses pontos devem ser transformados em quaternios como $p = \langle 0, x, y, z \rangle$ onde x, y, z serão as coordenadas de cada ponto dos cubos a serem girados. A rotação de cada ponto p será realizada pela multiplicação dos 3 quaternios $q p \tilde{q}$. Assim ao se dar aos poucos o ângulo Beta final (B) se terá uma visão dos blocos sendo girados (desde que as coordenadas anteriores sejam apagadas à medida que novas sejam desenhadas). Vamos considera que $\beta=B/50$, Pelo uso da equação,

$$= \langle \cos\beta/2, \sin\beta/2, 0, 0 \rangle * \langle 0, x, y, z \rangle * \langle \cos\beta/2, -\sin\beta/2, 0, 0 \rangle \text{ ou}$$

$$= \langle \cos\beta/2, \sin\beta/2i \rangle * \langle x, y, z \rangle * \langle \cos\beta/2, -\sin\beta/2i \rangle$$

que pode ser simplificada considerando os produtos dos vetores complexos i,j,k .

No final esses ângulos somados deve ser de 45 graus

Desenvolvendo (daqui para frente não foi pedido, apenas curiosidade para se lembrar das regras de multiplicação) e para mostrar que se chega à mesma expressão acima.

$$\begin{aligned} &= \{ \cos\beta/2 \langle x, y, z \rangle + \sin\beta/2i \langle x, y, z \rangle \} * \langle \cos\beta/2, -\sin\beta/2i \rangle = \{ \cos\beta/2 \langle x, y, z \rangle + \sin\beta/2 \langle -x, yk, \\ &-zj \rangle \} * \langle \cos\beta/2, -\sin\beta/2i \rangle = \{ -x \sin\beta/2, x \cos\beta/2i, (\cos\beta/2 y - \sin\beta/2 z) j, (\cos\beta/2 z + \sin\beta/2 y) k \} * \\ &\langle \cos\beta/2, -\sin\beta/2i \rangle = \{ -x \sin\beta/2 \cos\beta/2, x \cos\beta/2 \cos\beta/2i, \cos\beta/2 (\cos\beta/2 y - \sin\beta/2 z) j, \cos\beta/2 (\cos\beta/2 \\ &z + \sin\beta/2 y) k \} - \sin\beta/2i \{ -x \sin\beta/2, x \cos\beta/2i, (\cos\beta/2 y - \sin\beta/2 z) j, (\cos\beta/2 z + \sin\beta/2 y) k \} \end{aligned}$$

que pode ser simplificada considerando os produtos complexos