P1 2025 -1 Nome ______________________________ Numero Matricula__________________

1 - (1,5) Você sabe que a raiz quadrada de 2 pode ser aproximada por ±1,4142135624 (considerando 10 casas depois da virgula ou decimais). Veja que o calculo de uma aproximação desta raiz pode ser transformada em descobrir os zeros da função: ***$F(x) = x^2 - 2 = 0$***

Use o **Método da Bisseção** para aproximar a raiz **negativa** de 2 se seu numero de matricula for **impar** ou a **positiva** se for par numero de matricula. Considere a precisão de **2 casas decimais**. Ou seja, se houver erro esse deve ser menor que 0,01. No calculo deste erro considere o truncamento dos valores. Para fazer isto complete a tabela abaixo.

Iteração	ai	F(ai)	bi	F(bi)	xi = 0,5(bi+ai) (metade do intervalo)	F(xi) = xi^2 - 2 F(xi) < 0,01?	Erro = $\lvert$(xi) - raiz desejada$\rvert$ < 0,01?	Obs. Lado tem troca de sinal da função?	Obs. xi substitui qual limite?

Resolução

Para o lado negativo iniciando de -1. E ai=-1,5 . bi=-1 e sendo a raiz buscada = -1,4142135624. E a solução para o lado positivo iniciando de 1. E ai=1. bi=1,5 e sendo a raiz buscada = 1,4142135624

Ite- ra= ção	ai	F(ai) = ai^2 - 2	bi	F(bi) = bi^2 - 2	xi = me-tade do intervalo	F(xi) = xi^2 - 2 F(xi) < 0,01 ?	Erro=$\lvert$ (xi) - raiz negativa $\rvert$ < 0,01?	obs. que lado tem troca de sinal da função?	Xi substitui qual limite?
0	-1,5	0,25	-1,0	-1,0	-1,25	-0,4375	0,1652135624	ai e xi	bi
1	-1,5	0,25	-1,25	-0,4375	-1,375	-0,109375	0,0392135624	ai e xi	bi
2	-1,5	0,25	-1,375	-0,109375	-1,4375	0,06640625	0,0232864376	bi e xi	ai
3	-1,4375	0,066406	-1,375	-0,109375	-1,40625	-0,0224609	0,0079635624	ai e xi	bi
4	-1,4375	0,066406	-1,40625	-0,0224609	-1,421875	0,0217285	0,0076614376		

A aproximação da raiz pedida é -1,40625

(O aluno precisa responder a pergunta feita e ter calculado o erro. Menos 0,5 se esses itens não foram feitos, para cada 1 deles.) Alunos que não consideram erro em valor absoluto, na resolução tem Zero pois mostram que não entenderam nada de erro. Erro deve ser sempre em modulo.

2 - (1,0) Sabendo que o Método de Newton-Raphson para resolver equações as substitui por uma função iterativa na forma

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Resolva por esse método a equação anterior, isto é: ***F(x) = x²* - *2 = 0***. Mas agora: (1) Considere a precisão de 3 casas decimais. Ou seja, um erro menor que 0,001. (2) Troque a raiz a aproximar de acordo com o seu numero ser impar/par. Ou seja, procure aproximar a raiz negativa de 2 se seu numero de matricula for par ou a positiva se for impar (numero de matricula). (3) E você deve resolver considerando as iterações descritas na tabela que segue, iniciando de um numero positivo ou negativo dependendo da que quiser aproximar.

iteração	Xi	(xi+1)	Erro= |(xi) - raiz desejada| < 0,001 ?	Obs Convergiu ?

Resolução

O sistema iterativo agora ficara: $x_{i+1} = (x_i^2 + 2) / 2\, x_i$

iteração	Xi	(xi+1)	Erro=| (xi) - raiz desejada | < 0,001 ?	Obs Convergiu ?
0	-1,5	-1,41666666	0,0024531043	Já convergiria na precisão anterior, mas faremos mais uma vez
1	-1,41666666	-1,414215693	0,0000021306	Convergiu !
iteração	Xi	(xi+1)	Erro= (xi) - raiz desejada < 0,001 ?	Obs Convergiu ?
0	1,5	1,41666666	0,0024531043	Já convergiria na precisão anterior, mas faremos mais uma vez
1	1,41666666	1,414215693	0,0000021306	Convergiu !

Alunos tem que fornecer o sistema iterativo a ser computado, sem esse ZERO. Os que não consideram erro em valor absoluto, na resolução tem Zero pois não entenderam nada do Tema de erros, que indica que ele deve ser sempre em modulo.

3 – (1,0) Seja um Sistema de Equações Lineares definido por uma matriz ***A*** , o vetor ***B*** e o vetor ***X*** na forma *AX* = *B* . Considerando a regra de Cramer, cuja formula geral é hvhv

$$x_1 = \frac{D_{x1}}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_{x2}}{D}, \qquad x_3 = \frac{D_{x3}}{D}, \qquad \dots \qquad , x_n = \frac{D_{xn}}{D}$$

sendo *D* o determinante da matriz ***A***, e D_{x1}, D_{x2}, D_{x3}, ..., D_{xn} os determinantes das matrizes obtidas trocando cada coluna dos coeficientes de ***A*** pela coluna dos termos independentes, ***B***, respectivamente. Resolva o sistema de equações lineares da direita se seu numero de matricula for par ou o da esquerda se for impar.

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ 99x & + & 100y & = & 99.5 \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ 99.4x & + & 99.9y & = & 99.2 \end{array} \right.$$

Resposta : Calculando 3 determinantes 2x2; D= 1 Dx=0,5 e Dy=0,5 para o sistema da direita. ; D= 0,4 Dx=0,7 e Dy=-0,2 para o sistema da direita. Usando as expressões acima, temos que o primeiro sistema tem solução (0,5 ; 0,5) e o segundo tem solução única e exata : x = 1.4, y = −0.4.

Os sistemas devem ser resolvidos pelo calculo dos 3 determinantes do lado par ou impar. Se não feito como pedido não recebe nada na questão. Mesmo se fez corretamente, mas usou o sistema errado, por ser par ou ímpar seu número de matrícula.

4 - (1,0) Considere o sistema abaixo

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & + & \frac{1}{3}x_3 & = & 1 \\ \frac{1}{2}x_1 & + & \frac{1}{3}x_2 & + & \frac{1}{4}x_3 & = & 1 \\ \frac{1}{3}x_1 & + & \frac{1}{4}x_2 & + & \frac{1}{5}x_3 & = & 1 \end{array}$$

Verifique se com alguma troca de linha ou colunas ele converge, por algum critério que garanta a convergência por um método indireto ou iterativo. Reescreva o sistema na forma matricial para a melhor configuração possível (para os métodos indiretos ou iterativos). Ou seja, diga como seria a Matriz ***A*** , o vetor ***B*** e o vetor ***X*** na forma ***AX = B*** . Indique como seriam as iterações desse sistema, para ser resolvido pelo método de Gauss-Seidel.

Solução- Depende de como o aluno organizar as linhas e colunas. Mas ele não satisfaz nem o critério das linhas nem das colunas em quaisquer disposições. E preciso mencionar os dois critérios, das linhas e o de Sassenfeld

Apenas escrever na forma ***AX = B*** (já ganha ou perde 0,1) e escrever a ordens das iterações de cada linha pela diagonal principal de acordo com a melhor forma possível encontrada pelo aluno (com isto recebe ou perde 0,5).

Não é pedido para se resolver o sistema por qualquer método direto. Se isso for feito a nota é Zero na questão.

(Curiosidade: Neste sistema é muito mal condicionado, mas tem solução pelos métodos exatos. No entanto, Dependendo do numero de casa decimais que for aproximado, se terá uma resposta. Fazendo contas com frações exatas a resposta é: (3, −24, 30). Mas se usar dois algarismos significativos $(3)^{-1}$= ⅓ = 0.33, por exemplo) e seguir exatamente o mesmo procedimento, obtém-se (0.9, −11, 17). Com três algarismos significativos $(3)^{-1}$= ⅓ =0.333, chegaremos em (2.64, −21.8, 27.8), mas não foi pedido para você resolver nada).

5 - (1,5) Indique como seria o sistema iterativo pelo Método de Newton-Raphson, cuja expressão é:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Que resolveria os sistemas abaixo. Se seu numero de matricula for par considere o segundo. Se for impar use o primeiro. (1) $x^5 + 3x^2 - x + 1 = 0$ (2) $x^5 + 2x^3 - x + 1 = 0$. Como você faria uma tabela para resolver esse sistema. Não é preciso resolver até a convergência, mas na tabela faça pelo menos as iterações iniciais.

Solução: $x_k - [5x_k^4 + 6x_k - 1 / (x_k^5 + 3x_k^2 - x_k + 1)]$

E $x_k - [5x_k^4 + 6x_k^2 - 1 / (x_k^5 + 3x_k - x_k + 1)]$

A tabela que resolveria seria como a da questão 2.

Para o primeiro iniciando de $x_0=0$, se teria: $x_1=1$, $x_2=-1,5$ e para o segundo $x_0=0$, se teria: $x_1=1$, $x_2=-7/3$

Importante aqui as explicações dos alunos, indicar na forma de Tabela, como pedido e verificar se a convergência se aproxima devido ao chute inicial dado pelo aluno.

6 – (4,0) Considere **4 números decimais** formados, cada um **agrupando 2 dígitos de sua matricula, iniciando pelas extremidades e desprezando o central.** Por exemplo, se seu número o fosse: 319005112 . Esses seriam na base decimal $(31)_{10}$, $(90)_{10}$, $(51)_{10}$ e $(12)_{10}$

Represente esses números na forma normalizada de pontos flutuantes, na base decimal mesmo. Indicando qual é a mantissa, quantos são os números de algarismos da mantissa e o expoente de cada um deles.

Suponha que a máquina que você está usando considera apenas **2 algarismos** significativos na **mantissa** nas operações, com **truncamento** dos demais e com **expoentes** de **-4 a 4: F(10, 2, -4, 4).** ***Com essas considerações*** **some o primeiro** numero **com o segundo.** O resultado **subtraia do terceiro somado ao quarto** usando a regra de soma e subtração dos números de ponto flutuantes e **nesta ordem.** Verifique se o resultado foi o mesmo de **somar o primeiro com o segundo e esse resultado subtrair do terceiro, e resultado subtrair do quarto.**

Transforme esses números pra binários. Indique qual é a mantissa, quantos são os números de algarismos da mantissa e o expoente de cada um deles em binário. Agora, suponha que a máquina que você está usando **considera o sistema de ponto flutuante** denotado por **F(b; n; e1; e2)= F(2, 8, -6, 6); i.e. 8 algarismos significativos na** mantissa nas operações binárias, com truncamento dos demais **e com expoentes de -6 a 6. Faça as mesmas operações com esse sistema, e verifique se os resultados satisfazem a regras de associatividade das somas e subtrações.**

- Resolvendo considerando o exemplo dado para o exemplo dado:

  0,31 x102 0,90 x102 0,51 x102 0,12 x102

  As mantissas são: 0,31 ; 0,90 ; 0,51 e 0,12 , a base de todos é 10, eles têm t=2 algarismos na mantissa e o expoente de todos e´ 2

  (31)10= (00011111)2 (90)10 = (01011010)2 (51)10 = (00110011)2 (12)10 = (00001100)2

  0,5 ponto escrevendo eles normalizados adequadamente em cada base total 1,0

  0,5 transformações demonstradas de como foi para binário de decimais

  0,5 se foi verificando adequadamente as somas e subtrações na base 10 e o mesmo na base binaria com os truncamentos adequados: total 2,0

  0,5 para as respostas e a verificação de se atendem as associatividades e distributividades.