Curso de Computação Gráfica (CG) 2014/2- Cap 2 – parte 1
Transformações no plano

Gabarito do Trabalho 3 (individual) - Entrega: segunda 01/09

1- Como se calcula a distância entre os pontos P = (1,1,1) e Q = (2,3,1) ?
(valor 1,0)
É possível usar direto a fórmula de distância Euclidiana entre pontos estendida para 3D

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \text{ (Euclidean metric)}$$

Ou calcular o comprimento do vetor *u*= (2,3,1) - (1,1,1) = (1,2,0).
Ou ainda o comprimento do vetor - *u*= (1,1,1) - (2,3,1) = (-1,-2,0).
Pela nossa "intuição" ambos têm mesmo comprimento, do mesmo modo que a distância entre QP é a mesma de PQ.
Ou ainda a norma de (1,2,0) ou (-1,-2,0):
||*u*|| = |*u*| = (*u* .*u*)½ = ((1,2,0) . (1,2,0))½

Onde o produto interno de u com u é dado por: 1x1+2x2+0.0 = 1+4+0=5

Assim a distância entre os pontos P e Q é o comprimento do vetor subtração entre eles ou a norma deste vetor, ou ainda raiz quadrada do produto interno do vetor subtração entre os pontos, com ele próprio.
||*u*|| = |*u*| =√5

Repare que a distância entre dois pontos é sempre comutativa!

2 - Vendo os pontos da pergunta 1 como vetores, como eles são transformados em vetores unitários? Indique os vetores unitários correspondentes.
(valor 0,8)

Normalizando eles, ou seja, calculando seus comprimentos e dividindo suas coordenadas por ele.
Um vetor de comprimento unitário é dado por: *u* / ||*u*||
0P = (1,1,1) e 0Q = (2,3,1)

Logo (1/√3, 1/√3, 1/√3) e (2/√14, 3/√14, 1/√14)

3 - Que o ângulo os vetores: *u*=(1,0,0), *v*=(0,1,0), *w*=(0,0,1) , *t*=(1,1,1) e *q*=(2,3,1) fazem entre si?
(valor 1,0)

O ângulo entre os vetores pode ser obtido das duas definições de produto interno.
Ou seja: arco cosseno de = (u .v) / |*u*| |*v*|

Assim o ângulo entre os 3 primeiros é 90 graus , pois o produto interno entre eles é zero!
$u \angle v = u \angle w = v \angle w =$ 90°

O ângulo os vetores *u*, *v* e *w* com *t* é sempre igual pois o produto interno entre eles é idêntico = 1!
A norma de *t* é √3 , assim o ângulo entre *t* e todos os 3 primeiros vetores é: 54,75° (ou seja arco cosseno de √3/3)
(Esse é o ângulo que a diagonal principal de um cubo faz com suas arestas)

Para obter o ângulo entre os 3 primeiros e q , devemos primeiro calculas o produto interno entre eles:
u.q= 2 , *v.q*= 3 *w.q*= 1 assim o cosseno $u \angle q = 2/\sqrt{14}$, o cosseno $v \angle q = 3/\sqrt{14}$ e o cosseno $w \angle q = 1/\sqrt{14}$, e
o ângulo $u \angle q = 57{,}69°$, o ângulo $v \angle q = 36{,}7°$ e o ângulo $w \angle q = 74{,}5°$

Finalmente o ângulo entre *q* e *t* é tal que seu cosseno é = ((1,1,1) . (2,3,1)) / |(1,1,1) | |(2,3,1) | = 6 / (√3√14)= 22,21°

4 - Quais dos vetores da pergunta 3 são vetores unitários? Só os 3 primeiros!
(valor 0,2)

5 - Projete o vetor (2,3,1) na direção de (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) , (1,1,1) e (1,0,0) - (0,1,0).

(valor 1)

2 é a projeção de (2,3,1) na direção de (1,0,0)
3 é a projeção de (2,3,1) na direção de (0,1,0) e
1 é a projeção de (2,3,1) na direção de (0,0,1).

Projetar (2,3,1) na direção de (1,1,1) é o mesmo de fazer o produto interno entre (2,3,1) e $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = 6/\sqrt{3}$

Projetar (2,3,1) na direção de (1,-1,0), equivale ao produto interno entre (2,3,1) e um vetor unitário na direção de (1,-1,0) : ou seja entre (2,3,1) e $(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}, 0)$, logo é $-1/\sqrt{2}$! (valor negativo!) (ou tem comprimento $1/\sqrt{2}$ e direção oposta ao vetor que vai do ponto (0,1,0) para o ponto (1,0,0))

6 - Dado 3 vetores *u* , *v* e *w* . Em que caso dois deles, por exemplo, *w e u* são ortogonais ao terceiro vetor *v*.
(valor 0,1)
Quando seus produtos internos forem zero!

7- (Para simplificar passaremos ao R^2 em coordenadas homogêneas)
As 4 bases da figura 1 são ortonormais em relação a elas próprias e em relação a base canônica do R^2?
(valor 0,2)
Todas são ortonormais a elas mesmas. Se considerarmos como unitário as 1 e 2 essas serão normais em relação a base canônica do R^2
Alguém poderia supor que a unitária seria a 3. Neste caso as 3 e 4 seriam normais.

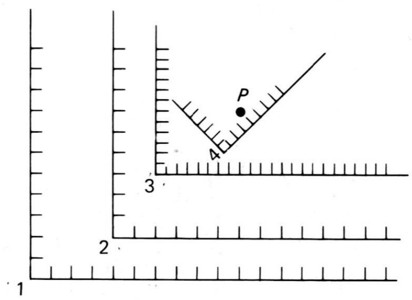

Figura 1 – O mesmo ponto descrito em 4 bases: $P=(10,8)^1=(6,6)^2=(8,6)^3=(4,2)^4$

8 - Dado um ponto em um sistema de eixos, diga: Como se pode representá-lo em outro sistema qualquer?
Descobrindo a transformação que pode levar quaisquer pontos de um no outro. Essa transformação por ser descrita como uma matriz de transição entre os sistemas os eixos.
(valor 0,2)

9 – As matrizes de transição ou de mudança de sistemas de eixos devem ser inversíveis (ou invertíveis). (Para simplificar passaremos ao R^2 em coordenadas homogêneas) Mostre que a matriz abaixo leva pontos descritos na base 2 para a 3 : M2->3.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$$

E que a transição da base 3 para a 2 é dada pela matriz M3->2 . Ou seja, ela permite escrever pontos definidos na base 3 em termos do sistema de eixos da base 2.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{0{,}5} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0{,}5} & \mathbf{3} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Verifique se realmente elas são a inversa uma da outra. (M2->3 M 3 ->2 = I = M 3 ->2 M2->3)
(valor 0,5)

Vê-se que a origem do sistema de eixos 3 é descrita como (2,3) no sistema de eixos 2. O origem de 2 é descrito como (-4, -6) no sistema 3.
Ainda que os vetores unitários de 3 passam a ser os vetores (2;0) (2,5; 0) e (0 ; 3)(0 ; 3,5). Enquanto os vetores unitários de 2 seriam (-4, 0) (-2 , 0) e (0, -6) (0,-4) de 3.

10 – Considerando que a origem do sistema 4 da figura 1, está no ponto (6,7 ; 1,8) do sistema 3, quais seriam as matrizes de transição de 4 para 3 e de 3 para 4 ($M_{4\text{->}3}$, $M_{3\text{->}4}$) ? (valor 3)
Finalmente descubra as matrizes de transição do sistema 1 para o 4 e vice versa ($M_{1\text{->}4}$ $M_{4\text{->}1}$?) (valor 2)

Como no casos anteriores essas ainda podem ser obtidas pelas combinações das matrizes elementares que levam um sistema no outro. Isto é a matriz de transição do sistema 4 para 3 pode ser vista como a translação de (6,7 ; 1,8) combinada com a rotação do eixos de 45 graus. O que resulta na matriz:

$$\begin{vmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 6{,}7 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 1{,}8 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Repare que essa leva o ponto $(0,0,1)^4$ em $(6{,}7 ; 1{,}8 ; 1)^3$, o ponto $(4, 2 , 1)^4$ em $(8 ; 6 ; 1)^3$; o ponto $(1,0,1)^4$ em $(7{,}4 ; 2{,}5 ; 1)^3$ e o ponto $(0,1,1)^4$ em $(6 ; 1{,}5 ; 1)^3$

Para definir a transição de 3 para 4 ($M_{3\text{->}4}$) como não foi dado dica sobre a origem, o mais correto será inverter a matriz anteriormente achada**.** No entanto como a inversa da matriz de rotação seria uma matriz de rotação com mesmo angulo em sentido oposto , e como cos θ = cos (-θ) e sen (-θ) = - sen (θ) . A inversa da matriz de rotação é a sua transposta. **Ou seja as duas matrizes abaixo quando multiplicadas resultam na identidade.**

$$\begin{matrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Assim a inversa da matriz anteriormente calculada deve ser algo como

$$\begin{vmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & e \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Onde os valores de ***e*** e ***f*** deve ser tais que , ao se multiplicarem as 2 matrizes se tenha a identidade.

$$\begin{vmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & e \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 6{,}7 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 1{,}8 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

O resulta $e = -(1,8+6,7)\sqrt{2}/2 = -8,5\sqrt{2}/2 = -6,01$ e $f = (6,7 - 1,8)\sqrt{2}/2 = 4,9\sqrt{2}/2 = 3,465$. Assim a matriz de transição do sistema 3 para o 4 é dada por:

$$\begin{vmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & -6,01 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 3,47 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Mas tambem podemos escolher 3 pontos de coordenadas 2d conhecidas em ambos para resolver o sistema de equações, que nos permite identificar as 6 incognitas que resolvem as transformações Afins que levam um sistema no outro isto é em: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = Ax + t$.

Essa ultima forma é mais generica e especialmnete ultima para casos onde as mudaças nos eixos não forem relacionadas as matrizes elementares, de translação, rotação, mudança de escala.

Finalmente para descobrir as matrizes de transição do sistema 1 para o 4 e do 4 para o 1 ($M_{1\text{->}4}$ $M_{4\text{->}1}$) podemos multiplicar todas as matrizes já encontradas (concatena-las) . Como todas já foram dadas no material de sala de aula basta sair multiplicando as mesmas na ordem correta