

By Flavio Viola

FILTRAGEM NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Pode-se entender filtragem de uma imagem, como sendo técnicas de transformações aplicadas a cada *pixel* da imagem, levando em conta os níveis de cinza de uma região vizinha de cada pixel desta imagem.

As técnicas de filtragem podem ser divididas em dois tipos: filtragem no domínio **espacial** e filtragem no **domínio da frequência**.

A filtragem no **domínio espacial** refere-se ao conjunto de *pixels* que compõem uma imagem e um conjunto de valores que operam diretamente sobre esses *pixels*, podendo ser expressa como:

$$g(x, y) = T[f(x, y)] \quad (1)$$

onde $f(x, y)$ é a imagem de entrada; $g(x, y)$ é a imagem processada e T é um operador sobre f , definido sobre alguns *pixels* vizinhos ao *pixel* (x, y) .

A filtragem no **domínio espacial** baseia-se na utilização de **máscaras**. Essas máscaras são pequenas matrizes bidimensionais e os valores de seus coeficientes determinam o objetivo a ser alcançado durante o processamento (GONZALEZ e WOODS, 2000).

Na filtragem no **domínio da frequência**, o principal objetivo deste texto, tem suas técnicas fundamentadas no **teorema da convolução**, que é uma das propriedades da transformada de Fourier e será descrito mais a frente.

Portanto, o **processamento de imagens no domínio da frequência** é realizado, usualmente através de **três passos** conforme o esquema da figura 1:

- 1- a imagem é **transformada do domínio espacial para o da frequência**, usando a transformada de Fourier;
- 2- operações são realizadas nessa imagem;
- 3- e para que a imagem possa ser exibida e vista por olhos humanas, ocorre o processo inverso, onde a imagem no domínio da frequência é **transformada para o domínio espacial**.

Este último passo será realizado através da **transformada inversa de Fourier**. Assim, seguir será descrita a transformada de Fourier, devido a sua importância e grande aplicação no processamento de imagens.

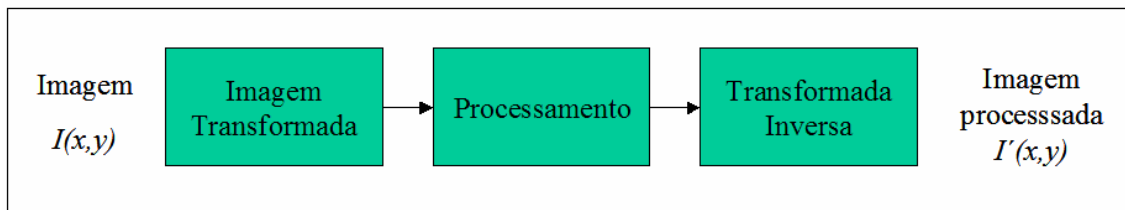


Figura 1 - Esquema de processamento no domínio da frequência usando a transformada de imagens

TRANSFORMADA DE FOURIER

A transformada de Fourier (desenvolvida pelo matemático francês Jean Baptiste Joseph Fourier, que viveu de 1768 a 1830) é uma ferramenta matemática fundamental na solução de problemas de processamento de imagens digitais.

A utilização de suas formas Discreta (DFT – *Discrete Fourier Transform*) e Rápida (FFT - *Fast Fourier Transform*) e o entendimento de suas propriedades são muito importante, pois, a mudança de domínio do espaço (x,y) para o domínio da frequência (u,v) e vice-versa, ocorre através dessas transformadas.

Na transformada de Fourier, **não há perda de informação durante a mudança de domínios**, apenas a informação visual da imagem está representada de uma outra forma, no domínio da frequência.

A princípio parece difícil entender a visualização da imagem, pois, um ponto de uma imagem representada no domínio Fourier (ou da frequência) pode conter informações sobre toda a imagem no domínio espacial (figura 2), indicando quanto desta frequência há na imagem (WATT e POLICARPO, 1998).

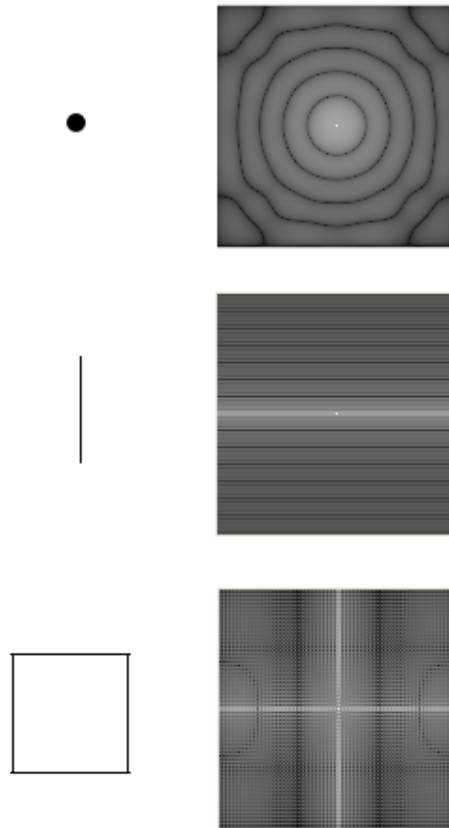


Figura 2- Algumas funções bidimensionais e seus espectros de Fourier

A **transformada de Fourier** de uma função contínua $f(x)$ de uma variável real x é definida como sendo

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp[-j2\pi ux] dx, \text{ onde } j = \sqrt{-1} \quad (2)$$

e a partir de $F(u)$, pode-se obter $f(x)$ através da transformada **inversa de Fourier**

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \exp[j2\pi ux] du \quad (3)$$

Essas duas equações são chamadas de **par de transformada de Fourier** e podem existir se forem integráveis e se $f(x)$ for contínua.

Por exemplo, a transformada de Fourier da Função Gaussiana 1D:

$$g(x) = \exp(-\pi x^2)$$

É (verifiquem!!!! Será?) :

$$G(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp[-j2\pi ux] dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\pi x^2) \exp[-j2\pi ux] dx = \frac{\exp[-u^2/4\pi]}{2\pi}$$

A transformada de Fourier de uma função $f(x)$ é uma função complexa e pode ser expressa pela soma de suas **componentes real e imaginária**, representados por R e I , respectivamente, ou seja,

$$F(u) = R(u) + jI(u) \quad (4)$$

Freqüentemente, para obter-se o espectro de Fourier e o ângulo de fase da função $f(x)$, faz-se necessário expressar a equação 4 na forma exponencial:

$$F(u) = |F(u)| e^{j\theta(u)} \quad (5)$$

Com isso obtêm-se o **espectro de Fourier**:

$$|F(u)| = [R^2(u) + I^2(u)]^{1/2} \quad (6)$$

e o **ângulo de fase**

$$\phi(u) = \tan^{-1}[I(u)/R(u)] \quad (7)$$

Além disso, pode-se obter o **espectro de potência da função**, elevando-se o espectro da função ao quadrado:

$$P(u) = R^2(u) + I^2(u) \quad (8)$$

A figura 2, mostra os espectro de Fourier de alguma imagens simples: um ponto, um segmento de reta vertical e quatro segmentos de reta. Repare que como já comentado, um ponto no espaço foi representado em todo o domínio da frequência.

A variável u que está presente na transformada de Fourier é chamada de variável de frequência, derivada do termo exponencial, $\exp[-j2\pi ux]$ e pela fórmula de Euler obtêm-se:

$$\exp[-j2\pi ux] = \cos 2\pi ux - j \sin 2\pi ux \quad (9)$$

Portanto, uma função pode ser decomposta pelo somatório de **senos e co-senos** e a transformada de Fourier computa a distribuição (amplitudes, frequências e fases) desses senos e co-senos (GONZALEZ e WOODS, 2000).

A transformada de Fourier de uma função unidimensional pode ser entendida para uma **função bidimensional** $f(x, y)$. E assim tem-se o seguinte par de transformadas de Fourier:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-j2\pi(ux + vy)] dx dy \quad (10)$$

e a partir de $F(u, v)$, pode-se obter $f(x, y)$ através da transformada inversa de Fourier

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) \exp[j2\pi(ux + vy)] du dv \quad (11)$$

A transformada de Fourier **bidimensional** de uma função de $f(x, y)$ é uma função complexa e pode ser expressa pela soma de componentes real e imaginário, representados por R e I , respectivamente, ou seja,

$$F(u, v) = R(u, v) + jI(u, v) \quad (12)$$

Como no caso unidimensional, o **espectro de Fourier**, o **ângulo fase** e o **espectro da potência** podem ser representados, respectivamente, conforme as equações seguir:

$$|F(u, v)| = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2} \quad (13)$$

$$\phi(u, v) = \tan^{-1}[I(u, v) / R(u, v)] \quad (14)$$

$$P(u, v) = R^2(u, v) + I^2(u, v) \quad (15)$$

O objetivo neste momento é a utilização da transformada de Fourier aplicada ao processamento de imagens.

Uma imagem pode ser representada através de uma **função bidimensional**, por exemplo, $I(x, y)$ e esta pode ser transformada em um conjunto de freqüências espaciais $|F(u, v)|$. Neste caso a visualização em 2D do espectro de Fourier é uma superfície senoidal bidimensional. Um único ponto $|F(u, v)|$, representa quanto de freqüência espacial é contida pela imagem, no domínio de freqüências (WATT e POLICARPO, 1998).

A figura 3. mostra o espectro de Fourier da função seno, uma única senóide, cuja representação do espectro de Fourier é somente um par de pontos simetricamente dispostos sobre a origem no domínio da freqüência.

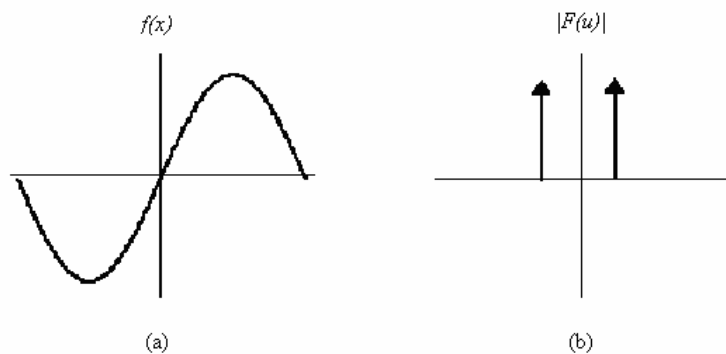


Figura 3 Função seno(x): (a) domínio do espaço e (b) seu espectro de Fourier

TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

Imagine que uma função contínua assuma a seguinte seqüência discreta:

$\{f(x_0), f(x_0 + \Delta x), f(x_0 + 2\Delta x), \dots, f(x_0 + [N-1]\Delta x)\}$, com um número finito de pontos.

Neste exemplo, N são amostras separadas em intervalos de Δx unidades. Para utilizar x como uma variável discreta, defini-se: $f(x) = f(x_0 + n \Delta x)$, com n assumindo os valores discretos $(0, 1, 2, \dots, N-1)$.

Com isso, pode-se denotar amostragens de N valores com intervalos uniformemente espaçados de uma função contínua através da seqüência: $\{f(0), f(1), f(2), \dots, f(N-1)\}$. Com base na transformada de Fourier de funções contínuas e a partir desta “discretização” de x , pode-se definir o par de **transformadas discretas de Fourier** como sendo uma soma finita de exponenciais complexas. Considerando o domínio da frequência também discreto e representado por $u = (0, \Delta u, 2\Delta u, \dots, (N-1)\Delta u)$, onde $\Delta u = 1/N\Delta x$. A transformada discreta se obtém através de:

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \exp[-j2\pi ux/N] \quad (16)$$

e sua inversa por:

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} F(u) \exp[j2\pi ux/N] \quad (17)$$

Considerando a partir daqui x uma “discretização”, para $x = (0, 1, 2, \dots, N-1)$.

Aplicando estas equações para uma função bidimensional, o par de transformadas discretas de Fourier passa a ser:

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp\left[-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right] \quad (18)$$

para u e v , “discretizados” com $u = (0, 1, 2, \dots, M-1)$ e $v = (0, 1, 2, \dots, N-1)$ e a inversa

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp\left[j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right] \quad (19)$$

para x e y assumindo valores discretos, isto é: $x = (0, 1, 2, \dots, M-1)$ e $y = (0, 1, 2, \dots, N-1)$.

Onde $\Delta u = 1/M\Delta x$ e $\Delta v = 1/N\Delta y$

Na prática, em aplicações de processamento de imagens, as transformadas discretas de Fourier são sempre calculadas utilizando o algoritmo da **transformada rápida de Fourier** (FFT - *Fast Fourier Transform*) que devido as suas características de implementação fazem com que a **complexidade** caia de N^2 para $N \log_2 N$ operações. Representando assim, uma

significativa economia computacional, particularmente quando o valor de N é muito grande, conforme apresentado em GONZALEZ e WOODS (2000).

A transformada de Fourier possui algumas **propriedades** que facilitam a sua utilização em aplicações computacionais, tais como: separabilidade, translação, periodicidade e simetria conjugada, rotação, distributividade, mudança de escala, valor médio, laplaciano, convolução, correlação e amostragem. Dentre essas, a propriedade da **convolução** é de fundamental importância para a compreensão das técnicas de processamento de imagens baseadas na transformada de Fourier (GONZALEZ e WOODS, 2000) e será apresentada a seguir.

TEOREMA DA CONVOLUÇÃO

De uma forma geral a **convolução de uma imagem** $f(x, y)$ com uma **outra imagem** $h(x, y)$ gera uma terceira imagem $g(x, y)$. Estando os valores de x e y compreendidos no intervalo $[0, M-1]$ e $[0, N-1]$ respectivamente. Sendo M e N a quantidade de linhas e colunas dessas imagens e $*$ o **operador** que indica a **convolução**. Podem-se escrever as seguintes equações:

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) \quad (20)$$

$$g(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) h(x - m, y - n) \quad (21)$$

O sinal negativo $(-m)$ e $(-n)$ significa que a função no processo de cálculo da convolução é espelhada sobre a origem (GONZALEZ e WOODS, 2000, p.72). No caso de função 1D ou mesmo sinais, uma ótima dica para entender esta operação é “brincar no site”: <http://www.jhu.edu/~signals/convolve/index.html> para entender a convolução de funções contínuas, e no site: <http://www.jhu.edu/~signals/discreteconv2/index.html> para funções discretas.

Pode-se entender a equação 21 do seguinte modo:

- faz um espelhamento da função $h(x, y)$ sobre a origem;

- desloca-se esta função $h(x,y)$ com respeito à $f(x,y)$ pelo incremento dos valores de (m,n) e
- calcula-se a soma dos produtos sobre todos os valores de m e n , para cada deslocamento. Os deslocamentos (m,n) são incrementos inteiros que param quando as funções não mais se sobrepõem.

Como $F(u,v)$ e $H(u,v)$ são as transformadas de Fourier de $f(x,y)$ e $h(x,y)$, respectivamente, **o teorema da convolução** diz que $f(x,y)*h(x,y)$ e $F(u,v)H(u,v)$ constituem um par de transformadas de Fourier. Então, a partir do teorema da convolução obtém-se a seguinte relação no domínio da frequência:

$$f(x,y)*h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)H(u,v) \quad (3.22)$$

$$f(x,y)h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)*H(u,v) \quad (3.23)$$

Esta relação indica que a convolução pode ser obtida pela transformada de Fourier inversa do produto $F(u,v)H(u,v)$

Portanto, a convolução entre duas funções **no domínio espacial tem como transformada a multiplicação das transformadas das duas funções no domínio da frequência**, e vice versa.

PROCESSAMENTO DE IMAGENS NO DOMÍNIO DE FOURIER

Após serem apresentados os conceitos da transformada de Fourier, da transformada discreta de Fourier e do teorema da convolução, será mais simples entender como ocorre o **processamento de imagens no domínio de Fourier**.

A idéia básica para o processamento neste domínio pode ser observada no esquema apresentado na figura 4. Em um primeiro passo, a imagem $I(x,y)$ é transformada para o **domínio de Fourier**, através da sua transformada discreta, utilizando o algoritmo FFT. A imagem no domínio de Fourier é representada por $F(u,v)$ e esta é convoluída com o filtro $H(u,v)$. Ao produto $F(u,v)H(u,v)$ é aplicada a inversa da transformada de Fourier para retornar ao domínio espacial, onde se tem a imagem processada $I'(x,y)$.

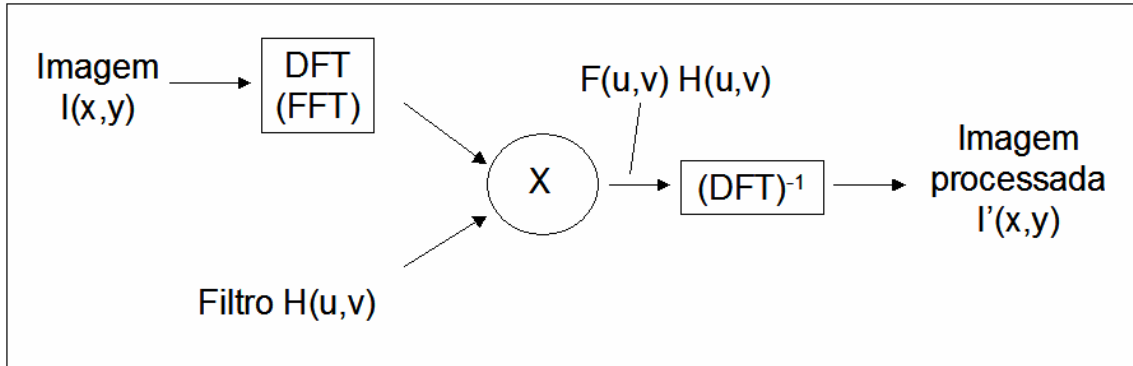


Figura 4 Esquema ilustrando os passos da filtragem no domínio de Fourier

A maioria das imagens no domínio de freqüências possui como amplitude característica, picos no centro $(0,0)$ do domínio. Segundo WATT e POLICARPO (1998), neste ponto a imagem atinge o seu maior valor, pois nele é computada justamente a menor freqüência presente na imagem e pode-se deduzir que este é o valor médio da imagem. Analisando a **imagem no espectro de Fourier** pode-se observar que diferentes categorias de imagens podem apresentar diferentes categorias de espectros de Fourier. Em WATT e POLICARPO (1998), é apresentado um exemplo de uma imagem da natureza, uma imagem de uma construção feita pelo homem e uma imagem com textura criada pelo homem, conforme as figuras 5 a 7. Os testes realizados para exemplificar a filtragem por Fourier e gerar as imagens do espectro de Fourier foram feitos com o aplicativo “*2D Fast Fourier Transform*” do CD que acompanha o livro (WATT e POLICARPO, 1998).

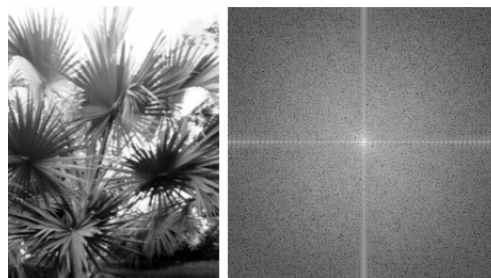


Figura 5 Imagem Palmeiras (elementos da natureza) e seu espectro de Fourier

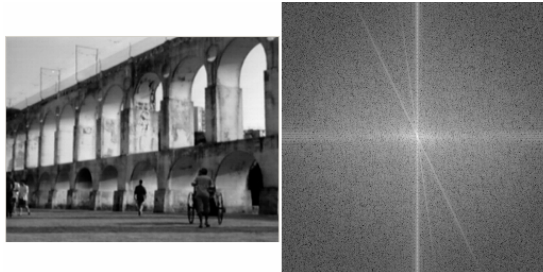


Figura 6 Imagem Arcos da Lapa (uma construção, elemento artificial) e seu espectro de Fourier

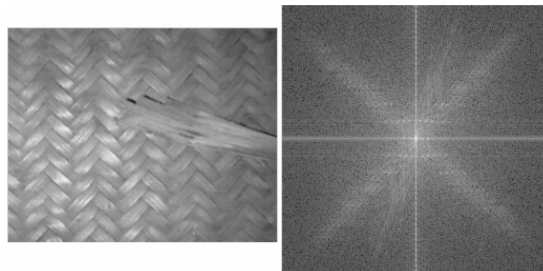


Figura 7 Imagem Palha, de uma textura natural e seu espectro de Fourier

Observando essas figuras, percebe-se que a imagem da cena natural, figura 5, tem uma tendência a não apresentar estruturas características no espectro de Fourier.

Na figura 6, observa-se que há uma representação de muitas linhas repetidas e paralelas. No espectro de Fourier isto vai ficar caracterizado. Primeiro há uma repetição de linhas gerada pela “cerca da linha do trem” no topo dos arcos. Existe também uma descontinuidade entre os arcos de cima (linhas também verticais) e os de baixo que provocam o aparecimento de linhas no espectro de Fourier. Há também duas estruturas representadas como linhas diagonais ao longo do eixo u , no espectro de Fourier, que caracterizam os lados dos arcos. Há ainda coerência em relação ao sentido vertical, no espectro de Fourier, devido às descontinuidades horizontais manifestadas pelas sombras.

Na figura 7, a relação entre as texturas da imagem e as estruturas apresentadas no espectro de Fourier é bastante evidente. As texturas são caracterizadas pelas estruturas que se parecem com uma linha diagonal borrada. E a “folha de palha isolada” é representada pela outra estrutura diagonal mais fina.

A importância de entender a representação da imagem do espectro de Fourier é que a partir desse entendimento, torna-se mais simples e intuitivo determinar um filtro apropriado a ser aplicado à imagem. Através das informações geradas pela imagem do espectro de Fourier

pode-se realçar (manter) ou reter (eliminar) os coeficientes das componentes de determinadas frequências.

Uma outra informação muito importante que se pode obter do espectro de Fourier é a **informação da força da imagem** (*image power*). Através desta informação, observa-se que a força da imagem, a partir do seu centro no espectro de Fourier, está concentrada nas componentes de baixas frequências. A figura 8 apresenta uma imagem no domínio de Fourier, com círculos de diferentes raios. Os círculos representam uma proporção de quanto da informação da imagem está contida em cada círculo. Calculando-se a proporção da soma total de $|F(u,v)|^2$ sobre cada círculo, encontra-se a relação exibida na figura 8. Esta informação é bastante relevante na hora de determinar um filtro a ser aplicado a imagem. Sendo possível determinar, aproximadamente, a percentagem da imagem que será retida ou atenuada.

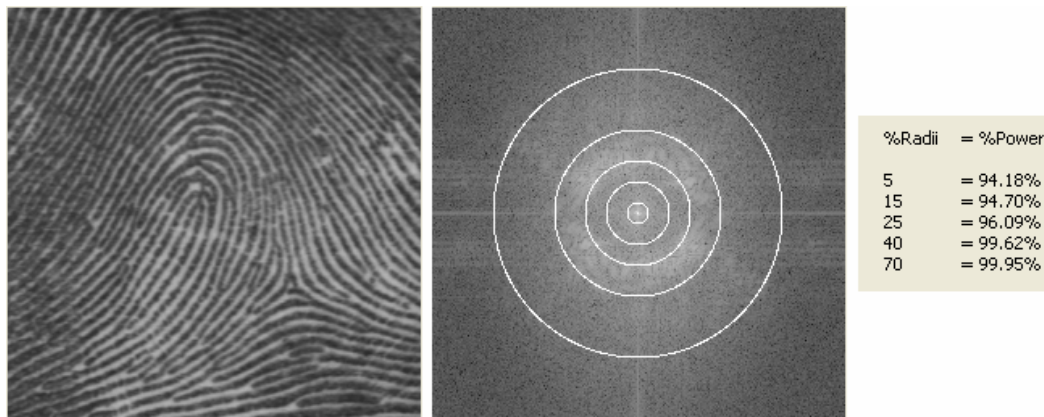


Figura 8 Imagem de impressão digital, seu espectro de Fourier com círculos indicando a força da imagem

Neste momento, podem-se entender os tipos de filtros e como utilizá-los no processamento de imagens. A filtragem mais simples e mais utilizada é realizada através de um **filtro passa faixa**, ou do tipo de filtragem **passa banda** que remove regiões selecionadas de frequências entre altas e baixas frequências. Quando esta faixa está próxima à origem, o filtro é chamado de **passa baixa**. Quando está afastada, o filtro é chamado de **passa alta**. A figura 9 exemplifica esses três tipos de filtro.

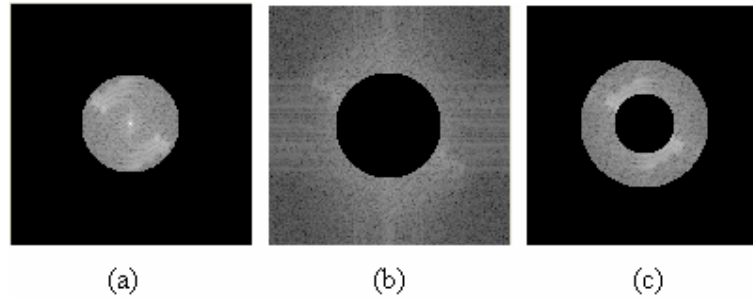


Figura 9 (a) Filtro passa baixa, (b) Filtro passa alta e (c) Filtro passa banda

As imagens de fundo apresentadas na figura 9, $F(u,v)$, são as transformadas de Fourier de uma imagem a ser filtrada. A dificuldade é escolher a função de transferência do filtro $H(u,v)$, que é a filtragem desejada. Essas funções de transferência afetam as partes real e imaginária de $F(u,v)$, exatamente da mesma forma, sem alterar a fase da transformada. Esses filtros são chamados de *filtros de deslocamento de fase zero*. Para realizar essas filtrações utilizamos um filtro circular simétrico.

FILTRAGEM PASSA BAIXA

Como dito anteriormente **a maior força de uma imagem quase sempre** está concentrada nas componentes de **baixa frequência**. Conseqüentemente, as componentes de alta frequência representam pouca força da imagem. Isto é simples de entender, pois são os **detalhes da imagem que geram essas altas frequências**. Detalhes da imagem são, por exemplo, **bordas, lados e outras transições abruptas de nível de cinza**. Portanto, utilizando um filtro passa baixa obtém-se uma imagem menos nítida, “blurred” ou suavizada, ou seja, ocorre uma perda de detalhes que são os componentes de altas frequências.

Nas figuras 10a e 10b, é apresentada uma imagem de impressão digital de boa qualidade, sem apresentar ruído, e seu espectro de Fourier. Nas figuras 10c e 10d, é apresentada a mesma imagem da figura 10a, só que agora com ruídos do tipo “*salt and pepper*” e seu novo espectro de Fourier. Este tipo de ruído é freqüentemente gerado dentro de equipamento eletrônico, pela sua transmissão, e se manifestam numa imagem como manchinhas pretas em regiões brancas ou manchinhas brancas em áreas escuras.

Observando o espectro de Fourier das duas imagens é fácil perceber a presença dos ruídos representados pelas altas frequências na imagem, ou seja, as informações que estão

mais afastadas da origem. Este é um exemplo clássico em que a utilização de um filtro **passa baixa** melhora a qualidade da imagem. Neste caso, as baixas frequências serão mantidas e as altas frequências, fora do círculo de raio r , presentes na transformada da imagem, $F(u,v)$ serão removidas, conforme a filtragem mostrada na figura 11.

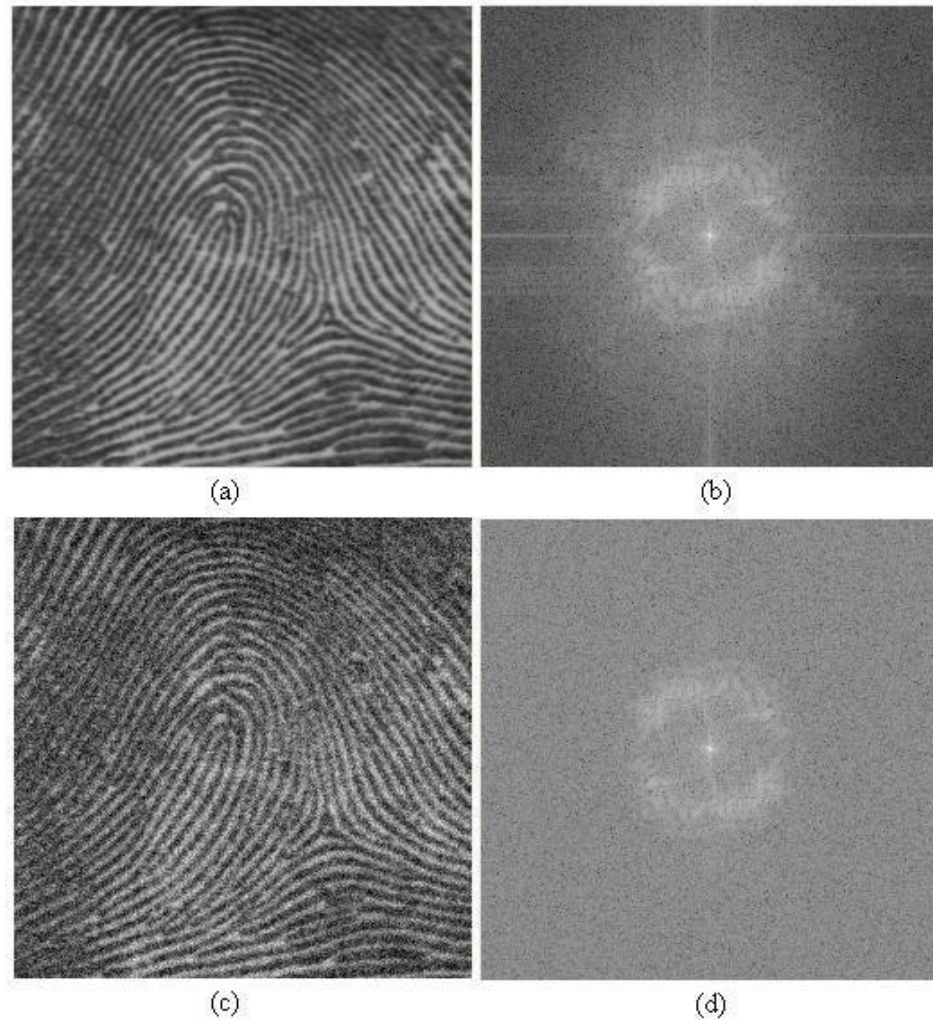


Figura 1 Comparação do espectro de Fourier de imagens de impressão digital sem ruído e com ruído

Portanto, se $\sqrt{u^2 + v^2} > r$ então $F(u,v) := 0$. De forma equivalente pode-se especificar um filtro $H(u,v)$, da seguinte forma:

$$H(u,v) = 1 \text{ se } u^2 + v^2 < r^2$$

$$H(u,v) = 0 \text{ se } u^2 + v^2 \geq r^2$$

Esse filtro é chamado de **passa baixa ideal**, pois todas as frequências, dentro do círculo de raio r , são passadas sem atenuação e todas as fora do círculo são retidas completamente. O ponto de transição entre $H(u,v) = 1$ e $H(u,v) = 0$, r , é chamado de frequência de corte.

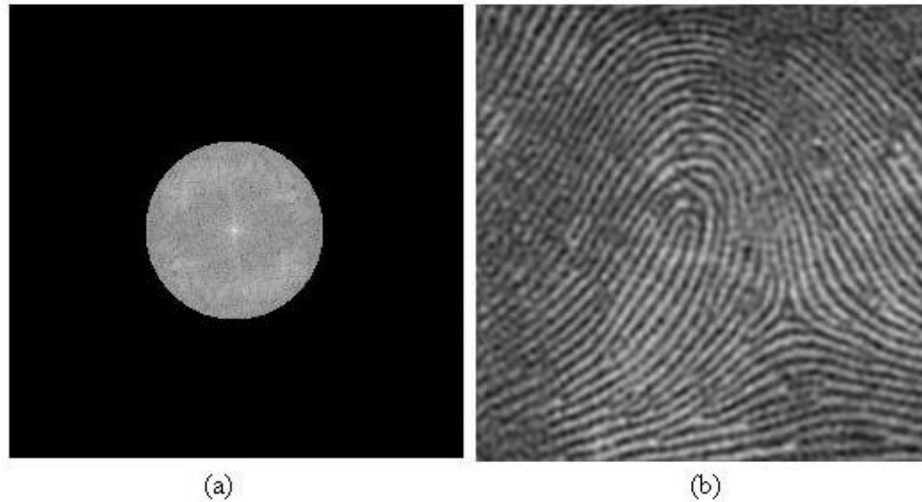


Figura 11. Resultado da filtragem passa baixa

FILTRAGEM PASSA ALTA

Pode-se entender a filtragem **passa alta** como uma operação contrária à filtragem passa baixa. Na filtragem passa altos, os componentes de alta frequência da transformada de Fourier não são alterados, enquanto os de baixa frequência são removidos. Isto faz com que os detalhes finos da imagem sejam enfatizados.

Neste caso, as baixas frequências serão removidas e as altas frequências, fora do círculo de raio r , presentes na transformada da imagem, $F(u,v)$ serão mantidas, conforme a filtragem mostrada na figura 12.

Portanto, se $\sqrt{u^2 + v^2} < r$ então $F(u,v) := 0$. De forma equivalente pode-se especificar um filtro $H(u,v)$, da seguinte forma:

$$H(u,v) = 0 \text{ se } u^2 + v^2 < r^2$$

$$H(u,v) = 1 \text{ se } u^2 + v^2 \geq r^2$$

Esse filtro é chamado de passa alta ideal, pois todas as frequências, fora do círculo de raio r , são passadas sem atenuação e todas as dentro do círculo são retidas completamente.

Um exemplo de filtragem passa alta em imagem de impressão digital é mostrado na figura 12. As figuras 12a, 12b e 12c, apresentam, respectivamente, a imagem original, o filtro passa alta utilizado e a imagem com detalhes finos após a filtragem.

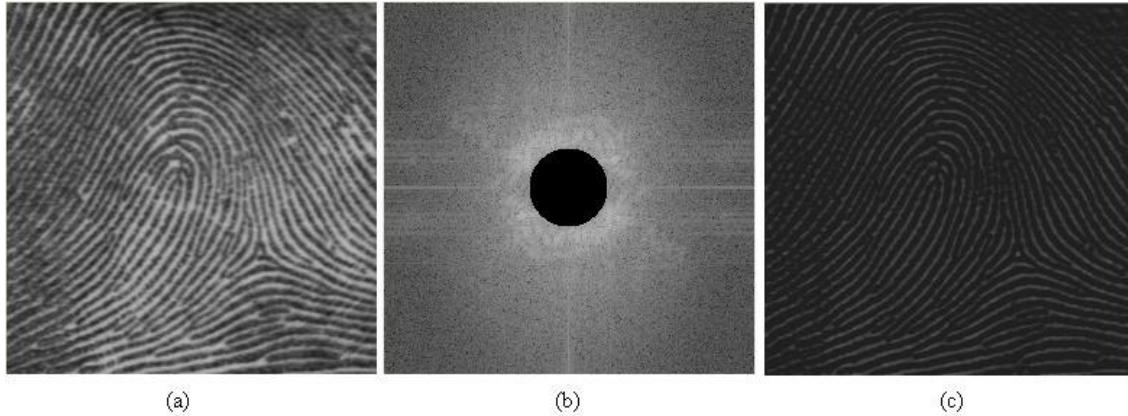


Figura 12 Resultado da filtragem passa alta

FILTRAGEM POR UM VALOR DE CORTE

Neste tipo de filtragem um determinado valor percentual é informado e os coeficientes cuja intensidade de $|F(u,v)|$ está abaixo desse valor são “zerados”, ou seja, são retirados da imagem. No caso de imagens de impressão digital, isto representa, dependendo da definição do valor uma melhora na qualidade da imagem, ocorrendo uma suavização da mesma.

A seguir para exemplificar este filtro, será utilizada uma imagem de impressão digital na qual deseja-se localizar o núcleo e o delta. Esta localização é realizada pelo aplicativo apresentado desenvolvido na dissertação de mestrado de F. Viola, 2006, disponível no site de dissertações do IC/UFF: http://www.ic.uff.br/PosGraduacao/lista_dissertacao.php?ano=2006.

A figura 13a, apresenta o espectro de Fourier da imagem da figura 13b e a figura 13c apresenta o resultado do processamento desta imagem. Cabe ressaltar que a imagem da figura 13b não sofreu nenhum pré-processamento. Nesta imagem, foram encontrados o núcleo (quadrado branco) e o delta (quadrado preto), mas também foram encontrados falsos núcleos e deltas. Com objetivo de melhorar a imagem a ser processada, pelo aplicativo, foram aplicados a ela filtros com valor de corte de 30% , 20%, 15% e 12%. Estes valores foram arbitrados, baseado em testes e observações dos resultados. O resultado pode ser observado nas figuras 14 a 17. Estas figuras mostram a imagem da figura 13b, após a filtragem, seu espectro de Fourier e o resultado da localização, pelo aplicativo. Na tabela 1 são apresentados

o percentual dos coeficientes da FFT removidos das imagem, após a filtragem, de acordo com o valor de corte utilizado.

Com o valor de 12% a imagem apresentou um melhor resultado tanto visual quanto ao ser processada pelo programa que localiza núcleos e deltas nas impressões digitais. Após a filtragem, com este valor, só foram encontrados o núcleo e o delta que realmente existem na imagem, conforme a figura 16. Embora este valor de 12% tenha sido o melhor resultado encontrado nas imagens testadas, esses testes não possibilitaram definir um valor de corte ideal a ser utilizado em todas as imagens.

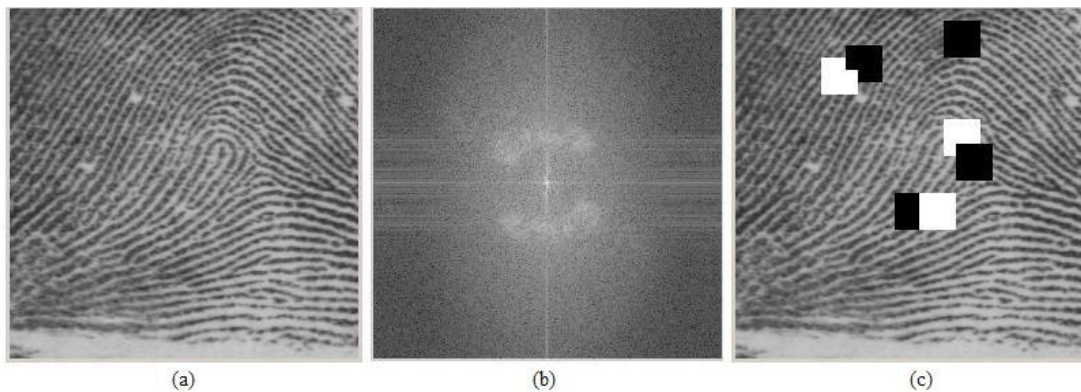


Figura 13 Localização de núcleo e delta antes da filtragem

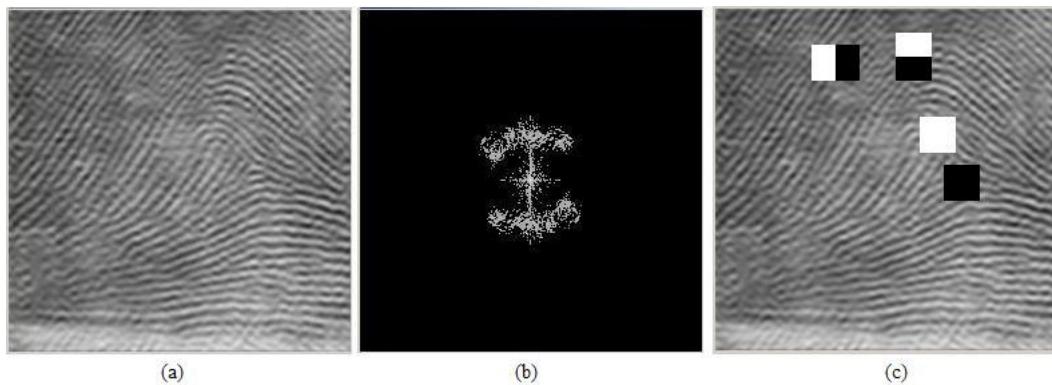


Figura 14 Localização de núcleo e delta após filtragem com valor de corte de 30%

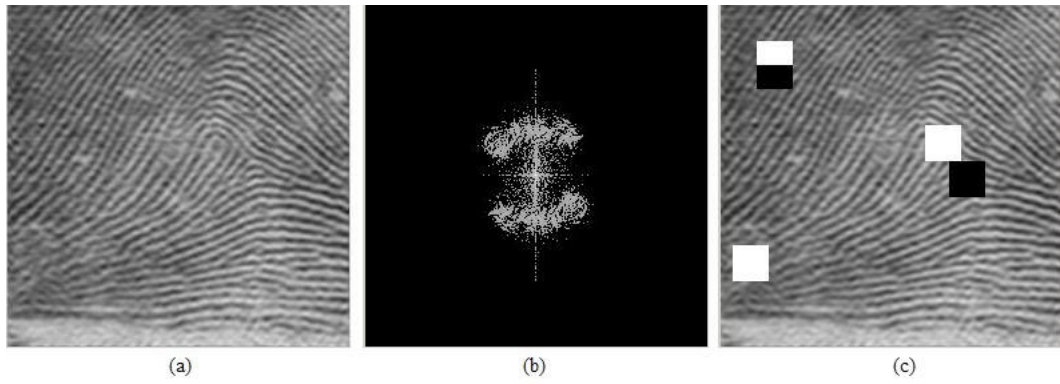


Figura 15 Localização de núcleo e delta após filtragem com valor de corte de 20%

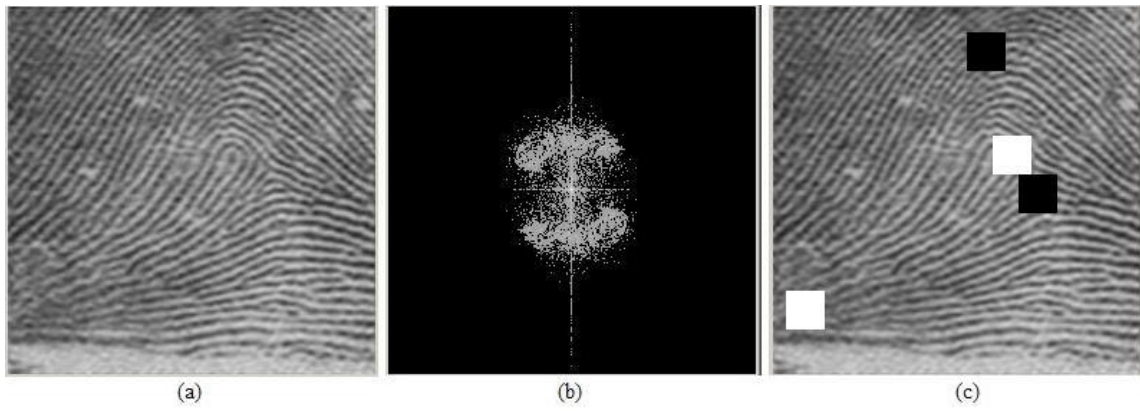


Figura 16 Localização de núcleo e delta após filtragem com valor de corte de 15%

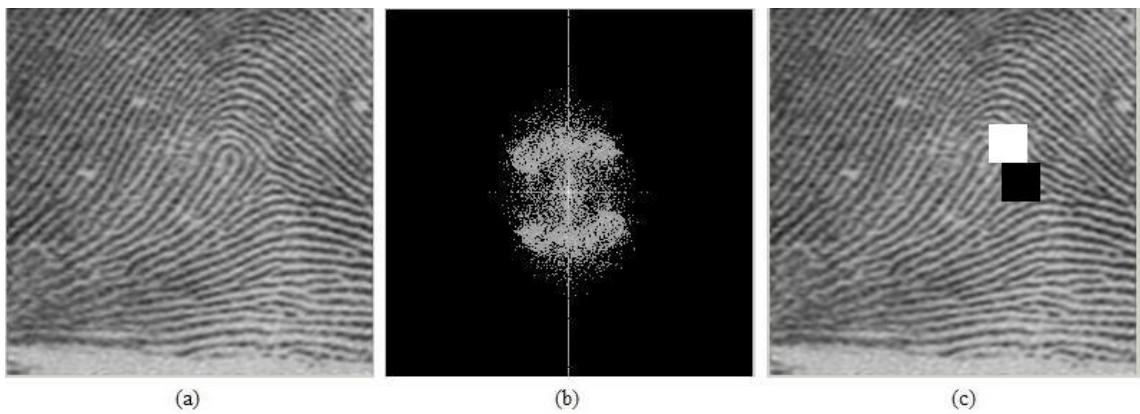


Figura 17 Localização de núcleo e delta após filtragem com valor de corte de 12%

Valor de corte	Coefficientes da FFT removidos
30%	97,66%
20%	95,72%
15%	93,88%
12%	92,30%

Tabela 1 Percentual de coeficientes da FFT removidos após a filtragem

Além dos filtros apresentados anteriormente, existem outros que podem ser aplicados às imagens no domínio de Fourier, dependendo do efeito que se deseja alcançar. Em SCURI (1994) e WATT e POLICARPO (1998), além dos filtros circulares (passa baixa, passa alta e passa banda), são apresentados filtros retangulares horizontais (isolar frequências verticais) e verticais (isolar frequências horizontais).

Outro tipo de filtro apresentado é chamado de “circular não centrado na origem”, utilizado quando se deseja isolar as frequências que se manifestam através de pontos brilhantes no domínio da frequência, apresentado nas figuras 18 e 19. Há ainda, um filtro chamado de “*fan*” (setor angular) aplicado a imagens com frequências distribuídas ao longo de uma direção inclinada. Este último filtro é bastante utilizado em imagens com ruídos com uma frequência periódica, como por exemplo, as linhas diagonais da imagem, como apresentado na figura 20. As imagens utilizadas para os testes mostrados nas figuras que seguem foram adquiridas em “<http://www.eneate.freemove.co.uk>”.

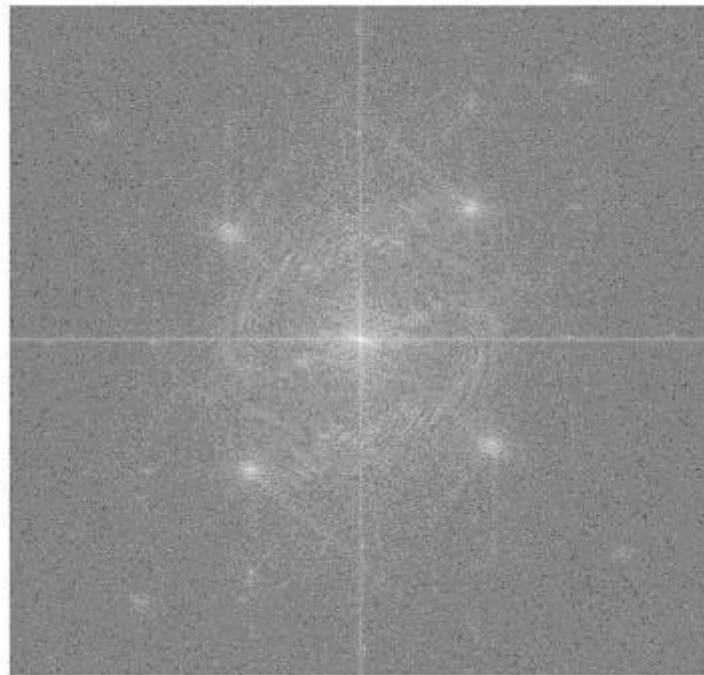


Figura 18 Espectro de Fourier da imagem

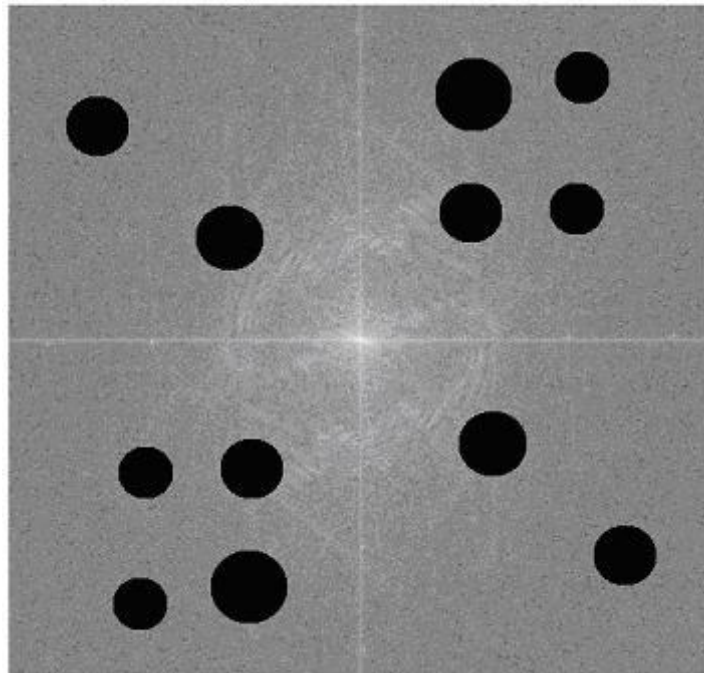


Figura 19 Resultado da filtragem utilizando filtro circular não centrado na origem

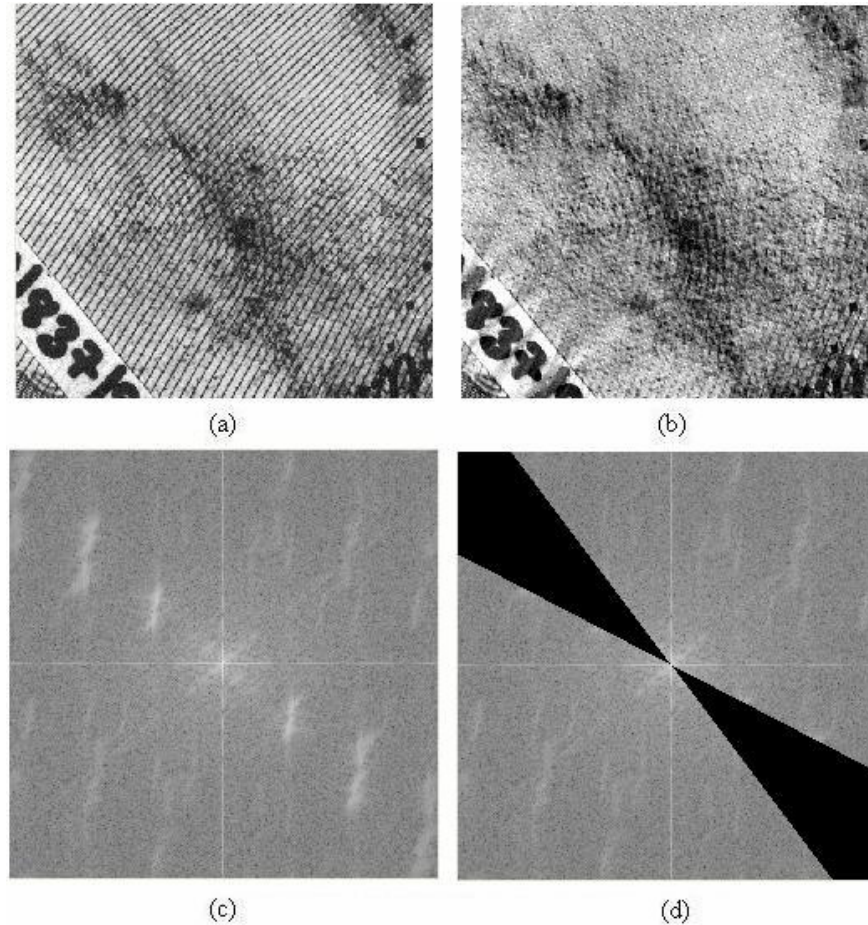


Figura 2 Resultado da filtragem utilizando filtro setor angular

IMAGENS DE IMPRESSÃO DIGITAL NO DOMÍNIO FOURIER

Até o momento, as filtragens foram aplicadas nas imagens como um todo, retirando ruídos, suavizando e enfatizando detalhes finos das mesmas. Porém no caso de impressões digitais podem ser realizadas melhorias em partes da imagem. Para isso faz-se necessário um melhor entendimento das características dessas impressões digitais no domínio de Fourier.

Segundo JAIN e PANKANTI (1997), uma impressão digital é formada por linhas que possuem largura aproximadamente constante, e ao se analisar um fragmento pequeno da impressão, observa-se que ele tem um comportamento semelhante a uma função senoidal bidimensional, conforme mostra a figura 21.

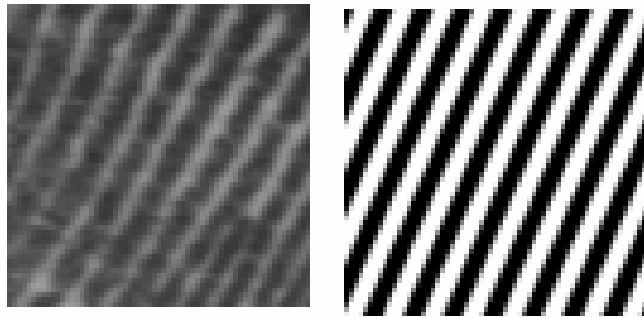


Figura 3 Fragmento de uma impressão digital e a imagem de uma senóide bidimensional com a mesma direção

Como dito anteriormente e observando a figura 22, uma parte pequena de impressão digital se assemelha a uma senóide, e com isso, seu espectro de Fourier é bem parecido com o espectro de uma senóide, que são dois impulsos simetricamente posicionados em relação à origem.

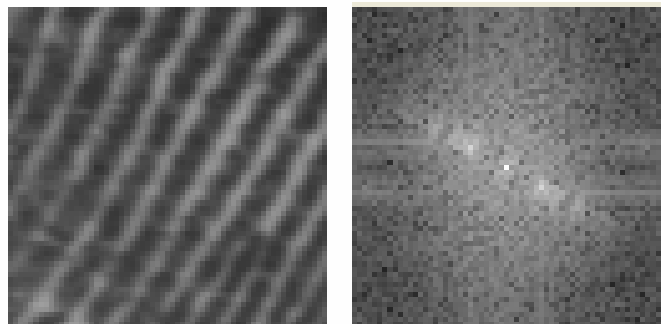


Figura 22 Fragmento de uma impressão digital e seu espectro de Fourier

Ao se analisar o espectro de Fourier de uma impressão digital, como um todo, percebe-se um acúmulo de energia em torno de um anel, devido ao fato das cristas se comportarem como senóides, apresentando freqüências bem definidas. Como as linhas de uma impressão digital podem ocorrer em várias direções diferentes, e como a freqüência no domínio da transformada de Fourier bidimensional é calculada pela distância do ponto ao centro do gráfico, verifica-se que a imagem de uma impressão digital é formada por várias senóides, com freqüências bem definidas em diferentes direções (THOMÉ e MARQUES, 2005), conforme pode ser observado na figura 23.

Dependendo do tamanho da região da impressão digital, por exemplo, 64×64 pixels, suas cristas apresentam características semelhantes quanto à direção e frequência. Isto pode ser observado na figura 23, onde é apresentada uma impressão digital, quatro fragmentos desta e seus espectros de Fourier. Nos espectros de Fourier, dos fragmentos desta imagem, aparecem dois picos de intensidade simétricos, em relação à origem. De acordo com a localização desses picos, no domínio de Fourier, duas características da impressão digital podem ser observadas: a distância e a direção das cristas na região. A frequência é indicada pela distância entre esses picos e a direção das cristas é indicada pela direção de uma linha “perpendicular imaginária” à “linha” que conecta esses pontos (RATHA e BOLLE, 2004).

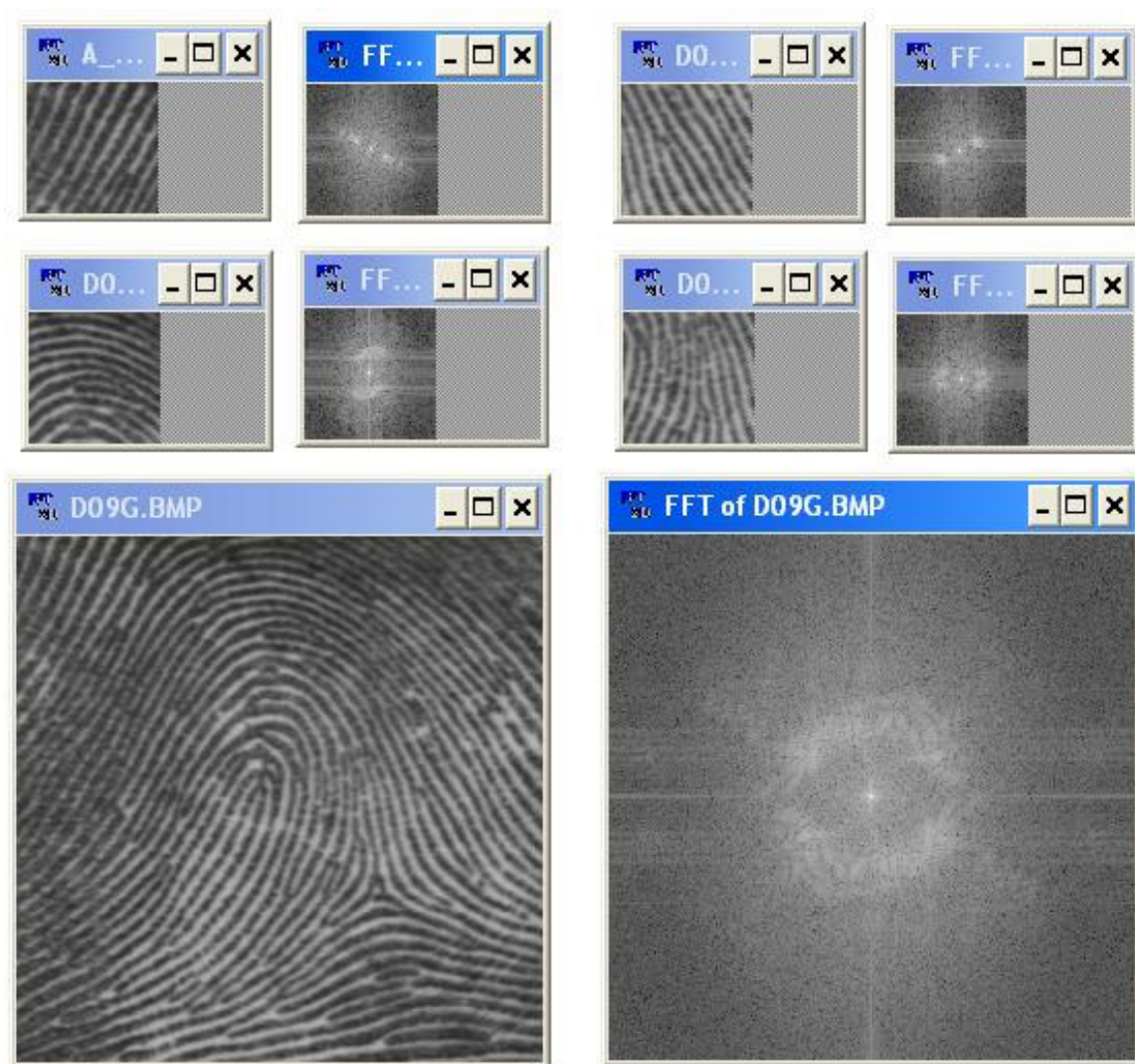


Figura 23 Fragmentos de uma impressão digital e seus espectros de Fourier

A figura 24 mostra duas imagens sintéticas, semelhantes a fragmentos de uma impressão digital, com inclinação das cristas de 45 graus e suas espessuras com 5 (figura 24a) e 9 (figura 24c) *pixels*, respectivamente. As figuras 24b e 24d apresentam o espectro de Fourier das figuras 24a e 24c, respectivamente. Ainda na figura 24b e 24d, está desenhada uma linha vermelha indicando a direção e uma outra amarela indicando a distância. Vale destacar que a direção representada no espectro de Fourier é a mesma nas duas figuras, enquanto a distância é menor na figura cuja espessura das cristas é menor.

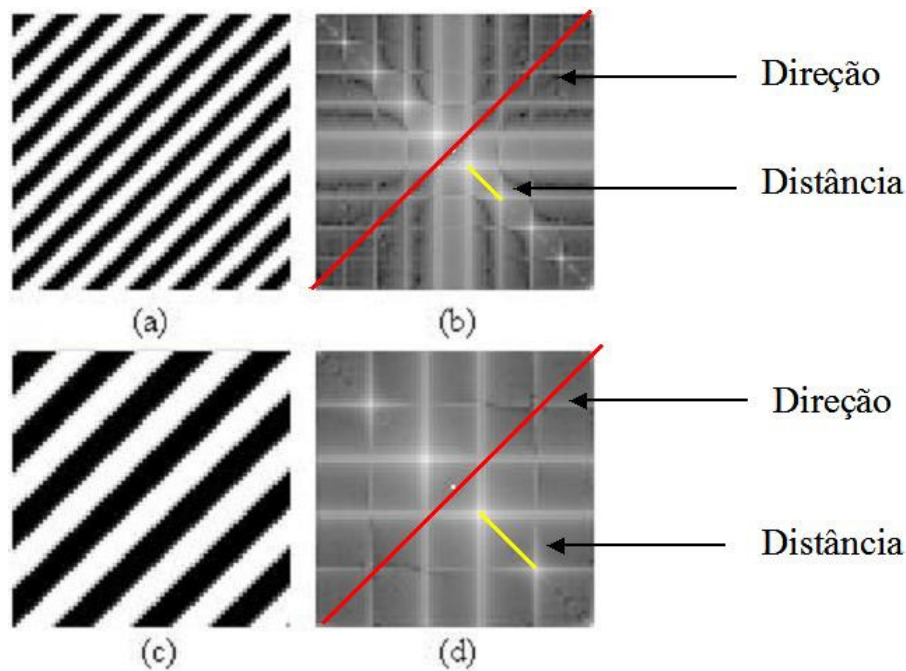


Figura 24 Imagens sintéticas representando um fragmento de impressão digital e seus espectros de Fourier

Como já apresentado na definição da transformada de Fourier, cada elemento do espectro de Fourier contém um valor proporcional à amplitude de uma senóide, cuja frequência é proporcional à distância deste elemento ao centro do espectro. Por exemplo, seja $F(u, v)$ a transformada de Fourier de uma função $f(x, y)$, onde u e v representam as frequências horizontal e vertical respectivamente. Se o elemento $F(u_0, v_0)$ for igual a A_0 , sabe-se que a senóide de frequência $\sqrt{u_0^2 + v_0^2}$ e direção θ , dada por $\theta = \arctan(v_0/u_0)$, possui amplitude, ou energia, proporcional a A_0 .

Pode-se concluir então, que a transformada de Fourier varia com a rotação, ou seja, apresenta resultados distintos para fragmentos de impressões digitais

cujos fluxos das cristas estejam orientados em direções diferentes, conforme se pode visualizar na figura 25, onde é apresentado um conjunto de imagens sintéticas, caracterizando partes de impressões digitais, com a inclinação das cristas variando de 0 a 157,5 graus e com intervalos de 22,5 graus e seus espectros de Fourier, caracterizando a direção e a distância dessas cristas. Observa-se que a distância é a mesma em todas as imagens, pois as espessuras das cristas são iguais, enquanto as direções se modificam conforme o ângulo de inclinação das cristas.

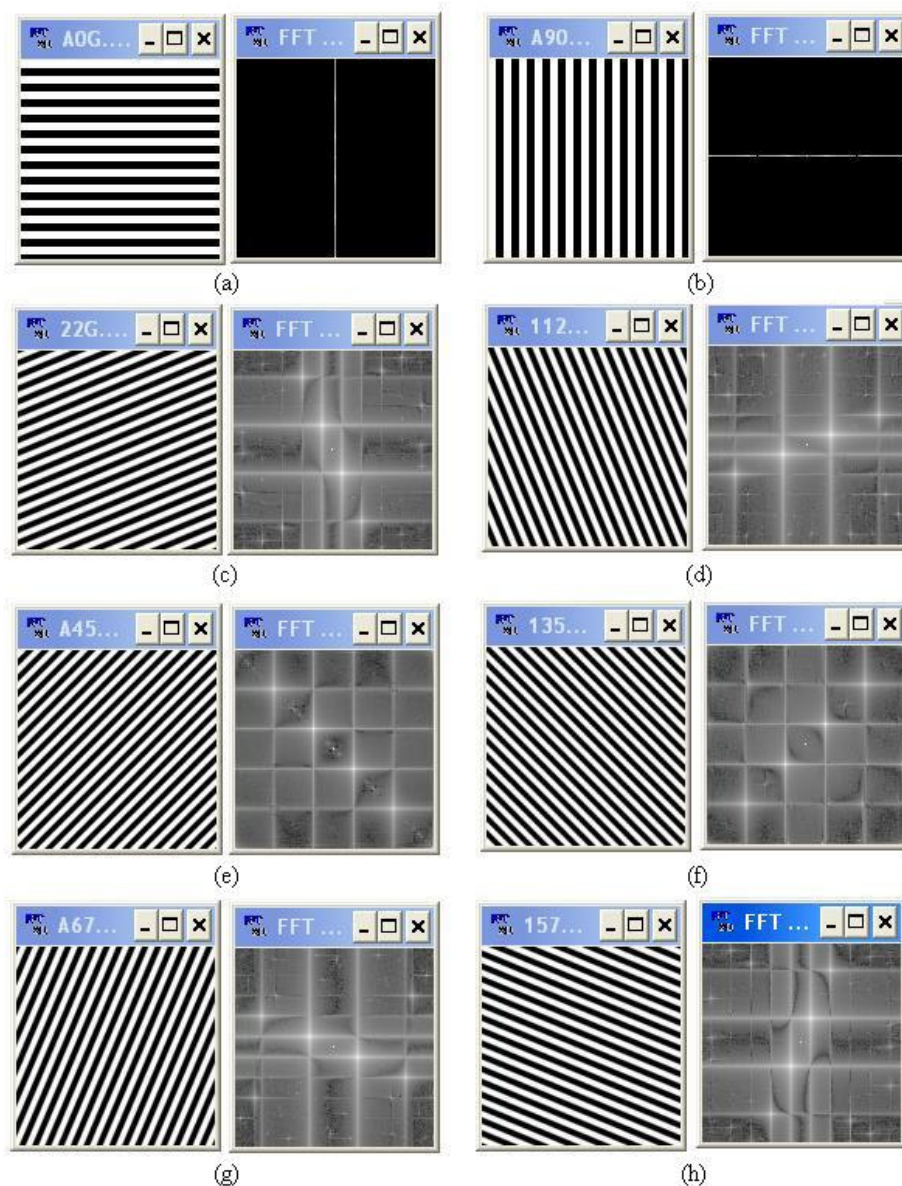


Figura 25 Imagens sintéticas com listras inclinadas e seus espectros de Fourier

Com base na informação da distância (frequência) e da direção, obtidas através do espectro de Fourier das imagens, pode-se definir filtros e procedimentos para melhorar a qualidade dessas imagens. A utilização da transformada discreta de Fourier está presente em vários trabalhos, tais como: SHERLOCK et al (1994), KAMEI e MIZOGUCHI (1995) e (ROSS et al, 2003), que realizam melhoramentos na imagem através de filtros direcionais por Fourier; PARK e PARK (2005), que apresentam um método para classificação de imagens utilizando a transformada rápida de Fourier. Por fim o trabalho de THOMÉ e MARQUES (2005) que utiliza informações da frequência e direção obtidas pelo espectro de Fourier, para segmentação de imagens de impressão digital.

(Para as referências bibliográficas aqui citadas que não constam da pagina do curso veja o original da dissertação de mestrado de Flavio Viola em: http://www.ic.uff.br/PosGraduacao/lista_dissertacao.php?ano=2006)