CAPÍTULO 4

Dimensão Fractal

Qual o tamanho de uma fractal? Quando duas fractais são semelhantes? Que medidas experimentais podemos fazer para verificar se duas fractais diferentes são equivalentes? Que assemelha duas fractais?

Os números associados às fractais que podem ser usados para compará-las são chamados de **dimensão fractal**. Estes números buscam quantificar sua densidade no espaço métrico em que "residem". As dimensões fractais proporcionam, então, um meio objetivo de compará-las.

As dimensões fractais podem ser obtidas através de experimentações. Pode-se obter a dimensão de qualquer coisa: de núvens, árvores, penas, neurônios, poeiras, tecidos, frequência de ondas, radiação de cores, superfícies do mar, etc. Por exemplo a costa da Grã-Bretanha têm dimensão fractal em torno de 1.2.

A geometria fractal se interessa na geometria dos conjuntos e na maneira como eles "parecem" quando representados por figuras. A seguir, usamos a condição mais restritiva de "métricamente equivalentes" para começar a definir matemáticamente o que queremos dizer por 2 conjuntos "parecidos".

4.1 - Sistemas Dinâmicos Equivalentes

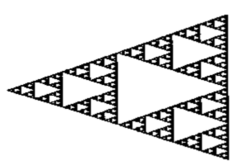
Definição 1 : Dois espaços métricos (X_1, d_1) e (X_2, d_2) são **topologicamente equivalentes** se existe um homeomorfismo (função inversível) $f : X_1 \longrightarrow X_2$ entre ambos. Dois sub-conjuntos $S_1 \subset X_1$ e $S_2 \subset X_2$ de espaços métricos são **topologicamente equivalentes, ou homeomorfos**, se os espaços métricos por eles formados (S_1, d_1) e (S_2, d_2) forem **topologicamente equivalente**.

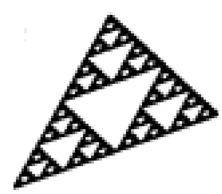
Exemplificando: com suas métricas naturais pode-se dizer que :

1) [0,1] é homeomorfo a [0,2] ;

2) $\square$ é homeomorfo a $\bigcirc$; e

3) Triângulos de Sierpinski com vértices em quaisquer 3 pontos (por exemplo: (0,0);(3,-1);(3,1) ou (0,0);(3,1);(2,3)) são sempre homeomorfos.





Definição 2 : Dois subconjuntos S_1 e S_2 são **métricamente equivalentes** se os espaços métricos (S_1, d_1) e (S_2, d_2) forem espaços métricos equivalentes. (Relembrando do capítulo 2: dois espaços métricos (X_1, d_1) e (X_2, d_2) são equivalentes se existir uma $f : X_1 \longrightarrow X_2$ inversível tal que $\tilde{d}(x, y) = d_2(f(x), f(y))$ seja equivalente a d_1) .

A noção de equivalência topológica (definição 1) é mais "liberal" que a de equivalência métrica (definição 2).

A seguir iremos definir uma quantidade chamada de **dimensão fractal**. A dimensão fractal de um subconjunto de um espaço métrico proporciona uma medida da complexidade do conjunto, ela mede o quanto o conjunto é "selvagem" ou "bem comportado" e pode ser usada para predizer sua complexidade. Mostraremos que dois conjuntos que são **metricamente equivalentes** têm mesma **dimensão fractal**. Se eles forem apenas **topologicamente equivalentes** suas dimensões fractais podem ser diferentes.

Em sistemas dinâmicos estamos com interesse principalmente no movimento, na maneira como os pontos se moverão, na existência de órbitas períodicas ou não. Neste caso a existência de homeomorfismo já é suficiente. E dois sistemas dinâmicos $\{X_1, f_1\}$ e $\{X_2, f_2\}$ são ditos equivalentes se existir um homeomorfismo $\theta : X_1 \rightarrow X_2$ tal que:

$$f_1(x_1) = \theta^{-1} \circ f_2 \circ \theta(x_1) \ , \quad x_1 \in X_1$$

e

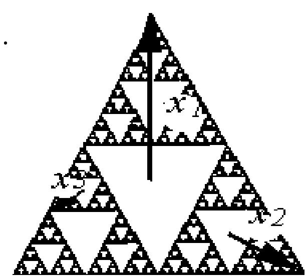
$$f_2(x_2) = \theta \circ f_1 \circ \theta^{-1}(x_2) \ , \quad x_2 \in X_2$$

4.2 - Formas de medir a dimensão fractal de figuras

Seja (X, d) um espaço métrico completo, e um conjunto $A \in \mathcal{H}(X)$ não vazio. Se $\epsilon > 0$ então $B(x, \epsilon)$ será a bola fechada de raio ϵ centrada em x (como definido no capítulo 2). Vamos chamar $\mathcal{N}(A, \epsilon)$ o **menor número de bolas fechadas** de raio ϵ necessárias para cobrir A. O conjunto A terá "intuitivamente" uma dimensão D se $\mathcal{N}\ (A, \epsilon) \cong \mathrm{C}^{-D}$ para alguns C positivo. Resolvendo em D temos:

$$D \cong \frac{\ell n\ \mathcal{N}(A, \epsilon) - \ell n C}{\ell n(1/\epsilon)}$$

Note-se que $\ell n C / \ell n(1/\epsilon)$ se aproxima de zero quando $\epsilon \rightarrow 0$.



Para exemplificar , vejamos como calcular $\mathcal{N}(A, \epsilon)$ para o triângulo de Sierpinski. O número de bolas nescessárias para cobrir o triângulo de Sierpinski, depende do raio das bolas:

$\epsilon = x_1, \quad \mathcal{N}(A, \epsilon) = 1$
$\epsilon = x_2, \quad \mathcal{N}(A, \epsilon) = 3$
$\epsilon = x_3, \quad \mathcal{N}(A, \epsilon) = 9$

Definição 1: Se $D = \lim\limits_{\epsilon \rightarrow 0} \dfrac{\ell n \mathcal{N}(A, \epsilon)}{\ell n(1/\epsilon)}$ existe, então D é chamado de **dimensão fractal de** $A : D(A)$.

Esta fórmula é interessante para propósitos experimentais pois o limite de D pode ser estimado pelo gradiente em um gráfico $\log - \log$ e plotado para uma variação adequada de ϵ.

Exemplo 1: Considere o plano real com sua métrica usual: ($I\!R^2$, Euclidiana), $a \in I\!R^2$ e $A = \{a\}$. Qual a dimensão de a ?

Resp.: Para qualquer $\epsilon > 0$, tem-se que: $\mathcal{N}(A, \epsilon) = 1$, assim:

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{1/\epsilon} = 0 \quad \Rightarrow \quad D(A) = 0$$

(ou seja a dimensão fractal de um ponto é .....)

Exemplo 2: Se agora: ($I\!R^2$, Manhattan) e $A = [0,1]$. Qual será $D(A) =$? Para responder vamos calcular o número de bolas nescessárias para cobrir o conjunto, considerando diversos raios:

$$\epsilon = 1 \quad , \quad \mathcal{N}(A,\epsilon) = 1 = 1/\epsilon$$

$$\epsilon = \frac{1}{2} \quad , \quad \mathcal{N}(A,\epsilon) = 2 = 1/\epsilon$$

$$\epsilon = \frac{1}{10} \quad , \quad \mathbf{N}(A,\epsilon) = 10 = 1/\epsilon$$

$$\Rightarrow D = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1/\epsilon}{1/\epsilon} = 1 \;\; D(A) = 1$$

Exemplo 3: $(X,d), X = \{a,b,c\}$ e $A = \{a,b,c\}$, então:

$$\mathcal{N}(A,\epsilon) = 3 \;\forall\;\; \epsilon$$

e

$$D = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{3}{1/\epsilon} = 0 \;\Rightarrow\; D(A) = 0$$

Teorema 1: Seja $A \in \mathcal{H}(X)$ onde (X,d) é um espaço métrico. Considere uma sequência de raios indexados: $\epsilon_n = Cr^n$ associado a um número real $0 < r < 1$ por um parâmetro $C > 0$ e inteiros $n = 1, 2, 3, \ldots$. Se existe D tal que:

$$D = \lim_{n \to \infty} \frac{ln(\mathcal{N}_n(A,\epsilon_n)}{ln(1/\epsilon_n)}$$

então A tem dimensão D.

Teorema 2: (Box Counting Theorem) Seja $A \in \mathcal{H}(I\!R^m)$ e $d = d_E$. "Cubra" $I\!R^m$ por "quadrados", que apenas se toquem de lado: $(1/2^n)$. Se $\mathcal{N}_n(A)$ indicar o número de "quadrados" de lados $(1/2^n)$ que têm interseção não nula com A, então

$$D = \lim_{n \to \infty} \frac{ln(\mathcal{N}_n(A))}{ln(2^n)}$$

representa a **dimensão fractal** de A.(Repare que se fosse considerada a métrica de Manhattan, esta dimensão seria idêntica a anterior com os raios indexados iguais a $1/2^{n+1}$.)

Exemplo 4: Considere um quadrado unitário, $\square \subset I\!R^2$, que dimensão êle tem?

$$\begin{array}{llll} \text{se } n = 1, & \text{lado do quadrado}: & 1/2 & \Rightarrow \mathcal{N}_1(\square) = \;\; 4 = 4^1 \\ \text{se } n = 2, & \text{lado do quadrado}: & 1/2^2 = 1/4 & \Rightarrow \mathcal{N}_2(\square) = 16 = 4^2 \\ \text{se } n = 3, & \text{lado do quadrado}: & 1/2^3 = 1/8 & \Rightarrow \mathcal{N}_3(\square) = 64 = 4^3 \end{array}$$

ou seja $\mathcal{N}_n(\square) = 4^n$

$$\text{assim } D = \lim_{n\to\infty} \frac{\ell n(4^n)}{\ell n(2^n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \times \ell n4}{n \times \ell n2} = 2$$

Exemplo 5: Se ($\mathbb{R}^2$, Euclidiana) e $A = \triangle$ de Sierpinski com centro (0,0) (0,1) (1,0) ; qual $D(A)$?

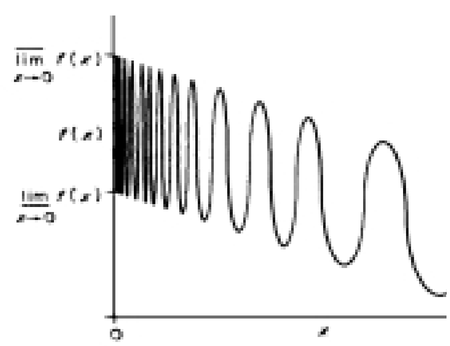
Usando a mesma construção do exemplo anterior:
$n = 1$, lado do quadrado : $1/2$, $\mathcal{N}_1(A) = 3 = 3^1$
$n = 2$, lado do quadrado : $1/4$, $\mathcal{N}_2(A) = 9 = 3^2$
$n = 3$, lado do quadrado : $1/8$, $\mathcal{N}_3(A) = 27 = 3^3$

ou seja : $\mathcal{N}_n(A) = 3^n$

logo $D = \lim_{n\to\infty} \frac{n\ \ell n3}{n\ \ell n2} = \frac{\ell n3}{\ell n2} = 1.585$

A "box-counting" ou "box dimension" é uma das mais usadas dimensões. Sua grande popularidade se deve a sua facilidade de uso em cálculos matemáticos e em estimativas experimentais. Sua definição foi introduzida em torno de 1930, e tem tido várias denominações: dimensão de entropia, entropia de Kolmogorov, dimensão métrica, densidade logarítimica, dimensão de informação, dimensão de Minkowski dentre outras. É também apresentada na forma de limites superiores e inferiores, como veremos a seguir, depois de relembrarmos a definição de limites.

Suponha que $f : (\mathbb{R}^+) \to (\mathbb{R})$ seja uma função crescente a medida que x diminua, então $\lim_{x\to 0} f(x)$ pode existir tanto como um valor finito quanto como ∞. E, analogamente, se $f(x)$ decresce a medida que x também decresce, então $\lim_{x\to 0} f(x)$ pode existir tanto como um valor finito quanto como $-\infty$. Pode ocorrer que $f(x)$ flutue cada vez mais rápido para pequenos x, demodo que $f(x)$ não tenha limite, como na função da figura. Neste caso, usa-se limites superiores e inferiores para descrever esta flutuação. Define-se **limite superior** como:



$$\overline{\lim}_{x\to 0} f(x) \equiv \lim_{x\to 0} \Big(\sup \big\{ f(x) : 0 < x < \epsilon \big\} \Big)$$

e **limite inferior** como:

$$\underline{\lim}_{x\to 0} f(x) \equiv \lim_{x\to 0} \Big(\inf \big\{ f(x) : 0 < x < \epsilon \big\} \Big)$$

onde ϵ delimita uma vizinhança de x próxima de zero. Se $\overline{\lim}_{x\to 0} f(x) \equiv \underline{\lim}_{x\to 0} f(x)$ então o limite de $f(x)$ existe em $x = 0$ e é igual a este valor comum. Da mesma maneira é possível definir o limite superior e inferior para qualquer $x \to a$.

Os limites superiores e inferiores da dimensão box-counting são definidos como:

$$\underline{D} = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{ln(\mathcal{N}_n(A))}{ln(2^n)}$$

$$\overline{D} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{ln(\mathcal{N}_n(A))}{ln(2^n)}$$

se eles forem iguais, o valor comum representa a **dimensão fractal** de A. Se esta existe, todas as dimensões fractais vistas até aqui são equivalentes.

Teorema 3: Seja (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos equivalentes. Se θ: $X_1 \longrightarrow X_2$ é a função que transfoma X_1 e X_2 em espaços equivalentes e, se $A_1 \in X(x_2)$ tem dimensão fractal D , então $A_2 = \theta(A_2)$ também tem a mesma dimensão D.

Ou seja : $D(A_2) = D(\theta(A_2))$

`Baseado neste teorema, qual a` D `dos outros` $\triangle$ `de Sierpinski que já apareceram neste texto?`

Teorema 4: Seja $\{\mathbb{R}^m, w_1, w_2, ..., w_N\}$ uma IFS e seja A seu atrator. Se w_i é uma similitude com fator de escala s_i onde $i = 1, 2, ..., N$ então se a IFS "apenas se toca" ou é "desconectada" o atrator tem **dimensão fractal** $D(A) \in [0, m]$, dada por:

$$\sum_{i=1}^{N} |s_i|^{D(A)} = 1$$

Se a IFS "se sobrepõe" então $\bar{D} \in [0, \infty)$, limitante superior de sua $D(A)$ (isso é : $\bar{D} \geq D(A)$) é a solução da equação:

$$\sum_{i=1}^{N} |s_i|^{\bar{D}(A)} = 1$$

Exemplo 6: Usando o mesmo espaço, a mesma métrica e o mesmo conjunto do exemplo anterior, vemos que o triângulo de Sierpiski é o atrator de uma IFS que "apenas se toca", formada por 3 similitudes com fator de escala $\frac{1}{2}$ cada. Logo a dimensão desta fractal será a solução de :

$$(\frac{1}{2})^D + (\frac{1}{2})^D + (\frac{1}{2})^D = 1$$

ou seja : $3(1/2)^D = 1$

de onde tem-se : $D = \frac{l_n(1/3)}{l_n(1/2)} = \frac{l_n 3}{l_n 2}$

`Qual seria a dimensão fractal do conjunto de Cantor clássico?`

4.3 - Dimensão e medida de Hausdorff

Das diversas "dimensões fractais" em uso, a de Hausdorff é a mais antiga e possívelmente a mais importante. Para entender de geometria fractal seu entendimento é essencial. Uma vantagem desta dimensão é que é definida para qualquer conjunto. A maior desvantagem é ser sofisticada, e em muitos casos, de difícil estimativa por métodos numéricos. É mais difícil de ser utilizada que as anteriores e geralmente não usada para procedimentos experimentais. Alguns autores se referem a esta dimensão como **dimensão de Hausdorff-Besicovitch**.

Neste desenvolvimento estaremos trabalhando com o espaço métrico $(I\!R^n, d_E)$, onde n é um inteiro positivo, embora o que se dirá seja válido em espaços métricos genéricos.

Lembrando da definição do capítulo 2: se A for um subconjunto não vazio , $\neq \emptyset$, de um espaço real $n - dimensional$, isso é: $A \subset I\!R^n$, então o seu **diâmetro,** $|A|$ é a maior distância entre pares de pontos de A:

$$|A| = diam(A) = \sup \ \left\{ d(x,y) : x, y \in A \right\}$$

Se $\{A_i\}$ for uma coleção contável (ou finita) de conjunto de diâmetro máximo ϵ que "cobrem" A , ou seja: $A_i \subset A$, tal que $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ com $0 <\mid A_i \mid \leq \epsilon$ para cada i, diz-se que $\{A_i\}$ é uma **cobertura-**ϵ de A. Usando esta nomenclatura pode-se dizer que os conjuntos $\mathcal{N}_i$ do exemplo 5 da seção anterior são uma cobertura- $\epsilon = 1$ do triângulo de Sierpinski.

Supondo que p seja um número não-negativo. Para algum $\epsilon > 0$ definimos :

$$\mathcal{H}^p_\epsilon(A) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \mid A_i \mid^p$$

onde A_i é uma **cobertura-**$epsilon$ de A para $i = 1, 2, 3...$ e o infimo é considerando sobre todas as coberturas possíveis de A. Usa-se a convenção:

$$|A_i|^0 = \left(diam(A_i)\right)^0 = 0$$

quando A_i for vazio. Ainda para os conjuntos $\mathcal{N}_i$ do exemplo 5 da seção anterior, seus diâmetros e as somas de seus diâmetros para a cobertura-ϵ do triângulo de Sierpinski serão:
$n = 1$, $\mathcal{N}_1 = A_1$, $\mid A_1 \mid = 1 = \frac{1}{2^{n-1}}$, e só uma parte $= 3^{n-1}$ cobre A;
$n = 2$, $\mathcal{N}_2 = A_2$, $\mid A_2 \mid = 1/2 = \frac{1}{2^{n-1}}$, e $3 = 3^{n-1}$ partes cobrem A;
$n = 3$, $\mathcal{N}_3 = A_3$, $\mid A_3 \mid = 1/4 = \frac{1}{2^{n-1}}$, e $9 = 3^{n-1}$ partes cobrem A;
$n = 4$, $\mathcal{N}_4 = A_4$, $\mid A_4 \mid = 1/8 = \frac{1}{2^{n-1}}$, e $27 = 3^{n-1}$ partes cobrem A;

ou seja a somatória terá sempre: $3^{n-1} * \frac{1}{2^{n-1}}^p$, ou seja depende de $n = i$ e da potência p.

Assim estuda-se todas as coberturas de A por conjuntos de diâmetros máximo ϵ e procura-se minimizar a soma das potências p dos diâmetros. $\mathcal{H}^p_\epsilon(A)$ é um número que pode variar entre $[0,\infty]$, seu valor pode ser zero, finito ou infinito.

Quando ϵ decresce, a classe de coberturas possíveis de A na equação anterior se reduz. Portanto, o infimo de $\mathcal{H}^p_\epsilon(A)$ aumenta, e se aproxima de um limite quando $\epsilon \to 0$.

Para chegar a medida de Hausdorff de dimensão p, de A faz-se $\epsilon \to 0$ e define-se:

$$\mathcal{H}^p(A) = \lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{H}^p_\epsilon(A) = \sup \left\{ \mathcal{H}^p_\epsilon(A) : \epsilon > 0 \right\}$$

Então para cada $p \in [0,\infty]$ tem-se $\mathcal{H}^p(A) \in [0,\infty]$. Se este limite existe para algum subconjunto A, (mesmo que seja 0 ou ∞ , o que ocorre geralmente) então chama-se $\mathcal{H}^p(A)$ de **medida de Hausdorff** p**-dimensional** de A.

Considerando o exemplo de $A=$ Triângulo de Sierpinski que estamos desenvolvendo, observa-se que:

$$\mathcal{H}^0(A) = \lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{H}^0_\epsilon = \lim_{n \to \infty} 3^{n-1} * \frac{1}{(2^{n-1})^0} = \infty$$

e

$$\mathcal{H}^1(A) = \lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{H}^1_\epsilon = \lim_{n \to \infty} 3^{n-1} * \frac{1}{(2^{n-1})^1} = \infty$$

mas

$$\mathcal{H}^2(A) = \lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{H}^2_\epsilon = \lim_{n \to \infty} 3^{n-1} * \frac{1}{(2^{n-1})^2} = 0$$

qual será o valor de:

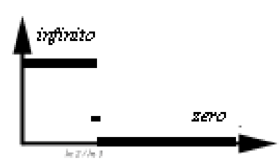
$$\mathcal{H}^{ln2/ln3}(A) = \lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{H}^{ln2/ln3}_\epsilon = \lim_{n \to \infty} 3^{n-1} * \frac{1}{(2^{n-1})^{ln2/ln3}} =?$$

Exemplo 1: Se A for o conjunto de 3 pontos distindos do $(I\!R^2, d_E)$, então $\mathcal{H}^0(A) = 3$ e $\mathcal{H}^p(A) = 0$ para $p > 0$.

Exemplo 2: Se $\mathcal{C}$ for o conjunto de Cantor clássico no intervalo [0,1]. Mostre que $\mathcal{H}^0(\mathcal{C}) = \infty$ e $\mathcal{H}^1\ (\mathcal{C}) = 0$. Qual seria o valor de $\mathcal{H}^{\frac{ln2}{ln3}}(\mathcal{C})$? Ao menos você poderia tentar se perguntar porque este valor seria interessante?

A medida de Hausdorff p-dimensional de A, $\mathcal{H}^p(A)$, se comporta de maneira típica. Seus valores possíveis consistem de um, dois ou três números: zero, um valor finito, ou infinito.

Na figura abaixo ilustra-se seu comportamento para $A = \{$conjunto de Cantor$\}$ (do exemplo anterior). Mostra-se, no gráfico, na vertical os valores de $\mathcal{H}^p(A)$, para diferentes potências p. O gráfico $\mathcal{H}^p(A)$ "versus" p mostra que existe um valor crítico de p para o qual $\mathcal{H}^p(A)$ "pula" de ∞ para 0. Este valor crítico é chamado **dimensão de Hausdorff de** A, e usa-se a notação: $\dim_H A$ ou $D_H(A)$.



Formalmente: $\dim_H A = D_H(A) = \inf \{p : \mathcal{H}^p(A) = 0\} = \sup \{p : \mathcal{H}^p(A) = \infty\}$

de modo que: $\mathcal{H}^p(A) = \begin{cases} \infty & if\ p < \dim_H(A) \\ 0 & if\ p > \dim_H(A) \end{cases}$

Se $p = \dim_H(A) = D_H(A)$ então $\mathcal{H}^p(A)$ pode ser zero, infinito ou ter um valor finito entre estes limites.

Teorema: 1 Seja n for um inteiro positivo e A um sub-conjunto de um espaço métrico $(I\!R^n, d_E)$. Se $D(A)$ representa a dimensão fractal de A e $D_H(A)$ a dimensão de Hausdorff de A, Então:

$$0 \leq D_H(A) \leq D(A) \leq n$$

Ou seja a dimensão de Hausdorff de um conjunto é sempre menor ou igual a sua dimensão fractal ou a sua dimensão topológica.

Teorema 2: Seja $\{\mathbb{R}^m, w_1, w_2, ..., w_N\}$ uma IFS e seja A seu atrator. Se w_i é uma similitude com fator de escala s_i onde $i = 1, 2, ..., N$ então se a IFS "apenas se toca" ou é "desconectada" a dimensão de Hausdorff do atrator, $D_H(A)$, é igual a sua dimensão fractal $D(A)$. De modo que $D_H(A) = D(A) = D$, sendo $D \in [0, m]$ a única solução da equação:

$$\sum_{n=1}^{N} |s_n|^{D(A)} = 1$$

Além disso se D for positiva, então a medida D-dimensional de Hausdorff de A , $\mathcal{H}^D(A)$, é um número real positivo.

No cálculo da dimensão de Hausdorff, atribui-se pesos diferentes , p, aos conjuntos de cobertura, enquanto que para as box-dimensions usa-se o mesmo peso para cada cobertura. Box-dimensions podem ser entendidas como um indicativo da eficiência com que um conjunto pode ser coberto por pequenos conjuntos de mesmo tamanho, enquanto que a dimensão de Hausdorff envolve coberturas por conjuntos pequenos, mas cujos lados podem variar muito. Como as box-dimensions são determinadas por "coberturas"por conjuntos de mesmo tamanho elas tendem a ser mais facilmene calculáveis que as dimensões de Hausdorff. A dimensão de Hausdorff pode ser usada para comparar fractais que tenham a mesma dimensão fractal.

4.4 - Características e Problemas com a Dimensão Box-Counting

Uma função f é chamada de **função de Lipschitz** se satisfizer a relação abaixo para alguma constante c.

$$| f(x) - f(y) | \leq c| x - y |$$

e é chamada de **função bi-Lipschitz** se

$$c_1| x - y | \leq| f(x) - f(y) | \leq c_2| x - y |$$

para constantes $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$.

A dimensão box-counting tem as seguintes propriedades (reflexos de propriedades semelhantes da dimensão de Hausdorff):

1)$\underline{D}$ e $\overline{D}$ são **invariantes no sentido de Lipschitz**. Isso quer dizer que se f for uma transformação bi-Lipschitz, então $D(A) = D(f(A))$.

2)Os limites superiores e inferiores da dimensão box-counting são **monotônicos** (isso quer dizer que se $A \subset B$ então $D(A) \leq D(B)$);

3) $\overline{D}$ é **estável finitamente**, isto é: $\overline{D}(E \cup F) = \max\{\overline{D}(E), \overline{D}(F)\}$, embora $\underline{D}$ não seja.

4) Se $\bar{A}$ denota o **fecho de** A (lembrando do cap. 2: $\bar{A}$ será o menor conjunto fechado do $\mathbb{R}^m$ que contenha A), então $\underline{D}(\bar{A}) = \underline{D}(A)$ e $\overline{D}(\bar{A}) = \overline{D}(A)$.

Uma consequência imediata desta propriedade é que se A for um subconjunto denso de uma região aberta do $\mathbb{R}^m$, então são iguais a m suas **dimensões fractais**: $\overline{D}(A) = \underline{D}(A) = m$.

Por exemplo, se A for o conjunto dos racionais entre 0 e 1, então $\bar{A}$ é o intervalo $[0,1]$, de modo que $\overline{D}(A) = \underline{D}(A) = 1$. No entanto a dimensão box-counting de cada número racional visto como um ponto isolado é claramente zero, mas sua união tem dimensão 1! Consequentemente não é sempre verdade que $D(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sup_i D(A_i)$ (propriedade chamada de "contable stability", e que a dimensão de Hausdorff possui). Essa característica limita a utilidade da dimensão box-counting pela possibilidade de que para conjuntos contáveis se comportem mal.

Uma forma de evitar esses problemas é restringir a utilização da dimensão box-counting a conjuntos fechados. Outra é tentar decompor A em um número contável de partes $A_1, A_2, ...$, de modo que a maior parte tenha a menor dimensão possível. Esta idéia leva a definição de **dimensão box-counting modificada**.

4.5 - Dimensão Box-Counting Modificada

Se A é um sub-conjunto do $\mathbb{R}^m$ e A_i for sua decomposição em um número contável de partes: $A_1, A_2, ...$, de tal modo que a maior parte tenha a menor dimensão possível. Então sua **dimensão box-counting modificada** é.

$$\underline{D}_{MB}(A) = \inf\big\{\sup_i \underline{D}(A_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big\}$$

$$\overline{D}_{MB}(A) = \inf\big\{\sup_i \overline{D}(A_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big\}$$

Sendo que em ambos os casos o infimo deve ser sobre todas as possíveis coberturas A_i de A. Pode-se mostrar que;

$$0 \leq D_H(A) \leq \underline{D}_{BM}(A) \leq \overline{D}_{BM}(A) \leq \overline{D}(A) \leq n$$