CAPÍTULO 1

Introdução

1.1 - Fractais & Sistemas Dinâmicos

- Fractais estão em tudo. As mais simples expressões matemáticas resultam fractais quando interpretadas como sistema dinâmicos.
- As imagens geradas por fractais são muito interessantes e na maioria das vezes geradas por sistemas muito simples, como por exemplo as equações (presentes em modelos de diversas disciplinas):

$$z^2 + C \; ; \; e^z \; ; \; sinz$$

- O que é um sistema dinâmico ?

É um processo que envolve tempo. Sistemas dinâmicos estão presentes em tudo: padrões atmosféricos, padrões econômicos (flutuação do índice Dow Jones ou Nikei); evolução de planetas; reações químicas; crescimento de sistemas biológicos, etc. Nos sistemas dinâmicos, busca-se prever a evolução de um processo.

- Conhecendo-se todos os detalhes da história passada do processo, que evolui no tempo, pode-se prever seu comportamento futuro?

Algumas vezes sim, outras não. Alguns sistemas não podem, como as previsões do tempo ou as flutuações de mercado, serem previstos a longo tempo.

Quando os sistemas podem ser previsíveis? Quando involvem pouco parâmetros? Na realidade mesmo os sistemas mais simples podem ter comportamento randômico e serem imprevisíveis. A explicação disso está na noção de caos matemático que aparece mesmo nos sistemas dinâmicos mais simples.

1.2 - Exemplos de Sistemas Dinâmicos

Vejamos um sistema dinâmico simples, que é muito usado em ecologia: suponha uma colônia de seres vivos de apenas uma espécie cuja população cresce e decai no tempo de acordo com o meio-ambiente.

Um dos modelos mais simples, do comportamento destas populações, usado em ecologia é: suponha que se meça o número máximo de individuos a cada geração; se P_n descrever a percentagem da população no fim de cada geração n, como percentagem de um valor máximo, onde $0 \leq P_n \leq 1$, então a regra de crescimento desta população é dada pela equação logística:

$$P_{n+1} = kP_n(1 - P_n)$$

onde k é uma constante que depende de condições ecológicas como predadores e quantidade de comida presente etc... Assim, conhecendo-se a população atual a população na geração seguinte será apenas função da população na geração atual. A tabela que segue mostra o valor de P_n (segunda linha em diante) para valores variados de k (valores da primeira linha).

0.5	1.2	2.0	2.7	3.1	3.4	4.0	4.0
0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.4	0.5
0.125	0.3	0.5	0.75	0.775	0.85	0.96	1
0.055	0.252	0.5	0.563	0.540	0.434	0.154	0
0.026	0.226	0.5	0.738	0.770	0.835	0.520	0
0.013	0.210	0.5	0.580	0.549	0.469	0.998	0
0.006	0.199	0.5	0.731	0.768	0.847	0.006	0
0.003	0.191	0.5	0.590	0.553	0.441	0.025	0
0.002	0.186	0.5	0.726	0.766	0.838	0.099	0
0.001	0.181	0.5	0.597	0.555	0.461	0.358	0
0.000	0.178	0.5	0.722	0.766	0.845	0.919	0
0.000	0.176	0.5	0.603	0.556	0.446	0.298	0
0.000	0.174	0.5	0.718	0.765	0.840	0.837	0
0.000	0.172	0.5	0.607	0.557	0.457	0.547	0
0.000	0.171	0.5	0.716	0.765	0.844	0.991	0
0.000	0.170	0.5	0.610	0.557	0.448	0.035	0
0.000	0.170	0.5	0.713	0.765	0.841	0.135	0
0.000	0.169	0.5	0.613	0.557	0.455	0.466	0
0.000	0.168	0.5	0.711	0.765	0.843	0.996	0
0.000	0.168	0.5	0.616	0.557	0.450	0.018	0
0.000	0.168	0.5	0.710	0.765	0.851	0.070	0
0.000	0.168	0.5	0.618	0.557	0.455	0.261	0
0.000	0.168	0.5	0.708	0.765	0.843	0.773	0

Nota-se que:

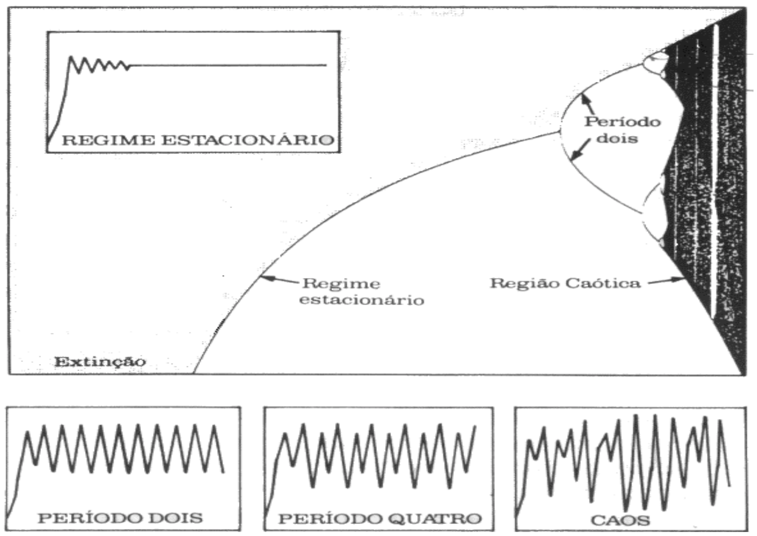
1) para pequenos k o destino da população é previsível (morte) ($k \leq 0.5$)

2) para $k = 1.2, 2.0$ ou 2.7 ela tende a se estabilizar alcançando um valor definido;

3) para $k > 3$, cada k produzirá um resultado. Se $k = 3.1$ ela oscila entre 2 limites (0.765 e 0.557). Para $k = 3.4$ ela oscila entre 4 valores (0.843 , 0.455, 0.851, 0.450). Para $k = 4$ não pode-se observar para onde ela oscila. Uma leve mudança na população inicial de 0.4 para 0.5 fará com que ela tenha um comportamento inteiramente randômico ou morra depois de 2 gerações.

4) pode-se dizer que a possibilidade de prever-se ou não o processo está ligada a constante k. Para certos valores o crescimento da população é previsível enquanto que para outros não.

Se for feito um gráfico, com eixo horizontal indicando o valor do parâmetro k, e o eixo vertical indicando a população final, pode-se ver melhor a influência de k no comportamento do sistema.



1.3 - Iteração

É o principal ingrediente dos sistemas dinâmicos. Como no caso do exemplo biológico, iteração significa repetição sucessiva do processo. O processo poderia ser escrito como:

$$F(x) = kx(1-x)$$

e sua repetição seria escrita como:

$$F(F(x)) = F(kx(1-x))$$

Cada iteração pode ser feita na sua calculadora de bolso. Considere uma função que usa só uma tecla na calculadora: ($x^2, \sqrt{x}, sen(x), e^x$ etc) se você botar um número qualquer e apertar $\sqrt{x}$, e repetir isso sucessivamente o que ocorrerá ? Se $S(x) = \sqrt{x}$, experimentando alguns valores iniciais teremos:

$$\begin{array}{lll}
S^{(1)}(256) = 16 & S^{(1)}(0.2) = 0.44 & S^{(1)}(200) = 14.14214 \\
S^{(2)}(256) = 4 & S^{(2)}(0.2) = 0.67 & S^{(2)}(200) = 3.760603 \\
S^{(3)}(256) = 2 & S^{(3)}(0.2) = 0.82 & S^{(3)}(200) = 1.939227 \\
\vdots & & \\
S^{(20)}(256) = 1.000005 & S^{(20)}(0.2) = 0.9999 & S^{(20)}(200) = 1.0005
\end{array}$$

O mesmo ocorrerrá para qualquer número (> 1 ou < 1 desde que $\neq 0$) que você bater como valor inicial na calculadora, o processo tenderá **sempre** para o número um , indica-se: $S^{(n)} \rightarrow \mathbf{1}$. Usa-se a notação $S^{(n)}(x)$, ou $S^n(x)$, para representar que estamos repetindo S pela n-ésima vez.

Para $T(x) = x^2$ o resultado seria diferente, para valor inicial $> 1, T^n(x) \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Para valores iniciais entre $0 < x < 1$, $T^n(x) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Para $x = 1$, $T^n(x) = 1$, para todos os valores de n, ($\forall_n$). Ou seja este processo iterativo tem **3**

comportamentos diferentes. Mas em ambos os processos $\sqrt{x}$ ou x^2 você pode **prever o destino** baseado no valor inicial.

1.4 - Órbitas

Chama-se órbitas a listas de **valores sucessivos** de um valor inicial em um processo iterativo: Se $S(x) = sin(x)$ (radianos), para o valor inicial 123, as órbitas tendem lentamente para zero.

$$\begin{aligned} S(123) &= -0.459 \ldots. \\ S^2(123) &= -0.443 \ldots. \\ &\vdots \\ S^{20}(123) &= -0.298 \ldots \\ &\vdots \\ S^{75}(123) &= -0.183 \ldots \\ &\vdots \\ S^{150}(123) &= -0.134 \ldots \\ &\vdots \\ S^{300}(123) &= -0.097 \ldots \end{aligned}$$

Assim $S^n(123) \to 0$ quando $n \to \infty$. Os números 123 ; -0.459 ; -0.443 ; . . . . . -0.097 são chamada de órbitas para $x = 123$. As órbitas de $sen(x)$ tendem assintoticamente para zero para qualquer x : $S^n(x) \to 0$ quando $n \to \infty \ \forall \ x$.

Prever um sistema é , então , prever suas órbitas. Uma órbita é **estável** se pequenas mudanças nos valores iniciais produzem resultados semelhantes. (Exemplos as órbitas de $sen(x), \sqrt{x}, x^2$) . Assim pequenos erros nas observações iniciais e erros de arrendondamento não afetarão muito o resultado.

1.5 - Sistemas Dinâmicos Caóticos

Infelizmente as órbitas não são sempre estáveis. Mesmo alguns sistemas muito simples têm órbitas que são instáveis. Se valores iniciais arbitrariamente próximos produzirão órbitas muito diferentes o sistema é dito SER INSTÁVEL. ÓRBITAS INSTÁVEIS podem ter qualquer aparência.

Ponto fixo de um processo iterativo é o ponto tal que $F(x) = x$. Por exemplo no sistema $T(x) = x^2$, a órbita de 1 será sempre 1 (que é um exemplo de PONTO FIXO) mas esta órbita é **instável**. Um pequeno erro na obtenção do valor inicial, de modo que $x \neq 1$, mas $x > 1$, fará com que $T^n(x) \to \infty$ e, enquanto que um erro tal que $x < 1$ fará $T^n(x) \to 0$, valores completamente diferentes.

Entender se as órbitas são **estáveis ou instáveis** afeta toda a pretenção de poder prever ou não o sistema. O conjunto de pontos cujas órbitas são instáveis são chamados de CONJUNTOS CAÓTICOS. Conhecer estes conjuntos caóticos é muito importante. Aí é que entram as fractais nos sistemas dinâmicos. FRACTAIS SÃO OS CONJUNTOS CAÓTICOS DOS SISTEMAS DINÂMICOS. Os conjuntos de Julia e Mandelbrot, são conjuntos caóticos das funções $z^2 + c$, onde z e c são números complexos

1.6 - Um exemplo de Conjunto Caótico no Plano

Todos os exemplos até aqui foram de sitemas dinâmicos em 1 direção. Vejamos um sistema 2D. Um sistema simples é o mapa de Hénon (astrônomo francês que o estudou em 1974). Este sistema envolve 2 variáveis na forma:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 + y_n - Ax_n^2 \\ y_{n+1} = Bx_n \end{cases}$$

onde A e B são parâmetros reais.

Se por exemplo $A = 1.4$ e $B = 0.3$:

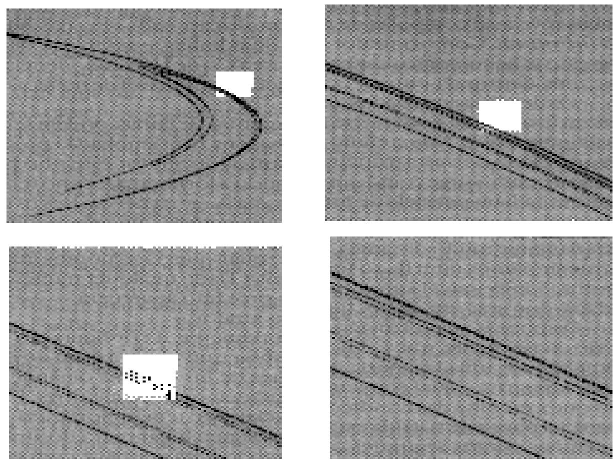
$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 + y_n - 1.4x_n^2 \\ y_{n+1} = 0.3x_n \end{cases}$$

este sistema tem um **atrator estranho**. Se você iteragir com o mapa de HÉNON para diversos valores iniciais (x_0, y_0) e plotar em um gráfico valores sucessivos, como por exemplo:

n	x	y
0	0	0
1	1	0
2	-0.4	0.3
3	1.076	-0.12
4	-0.74	0.328
5	0.556	-0.222

n	x	y
0	-1	0
1	-0.4	-0.3
2	0.476	-0.12
.....		
......		

Verá uma núvem de pontos que formam uma figura, vamos chamá-la de A. Plote as 100.000 órbitas (ITERAÇÕES) do valor inicial (0;0), de (-1;0) e de outros valores iniciais. E verá a mesma coisa para qualquer valor inicial. Esta figura é chamada de ATRATOR, e é dita ser um atrator estranho por não ser um objeto simples ou periódico A figura é de fato uma FRACTAL, com o atributo que uma fractal tem de não se simplificar com ampliações.



E **cade o caos?** O caos ocorre nos pontos do atrator A. Liste as 100 primeiras iterações que produzem a figura e você não chegará a conclusão nenhuma. Liste + 100 e não terão nada, umas a ver com as outras. As órbitas são distintas e completamente não relacionáveis. Os fractais formam os conjuntos de órbitas caóticas.

1.7 - O que é fractal? Quais são suas diferenças das formas Euclidianas usuais?

1) Fractais são decisivamente **invensões modernas**; (apesar da primeira curva ser da virada do século, só nos últimos **20 anos** foram reconhecidas de utilidade à ciência).

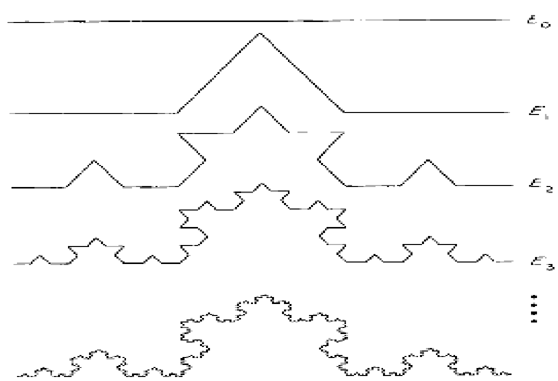
2) As **formas Euclidianas** têm uma ou poucas dimensões características (lado, raios, etc.) que podem ser reduzidas ou variadas por escalas. As formas fractais não têm dimensões características, independem de escala e, são sempre, auto-semelhantes.

3) A geometria Euclidiana oferece uma descrição concisa e adequada à objetos feitos pelo homem, mas inadequada à descrição de formas da natureza. Uma fábrica com máquinas é uma fábrica essencialmente Euclidiana: os objetos são facilmente contruidos e descritos. Os objetos fractais são complexos.

4) Formas Euclidianas tem fórmulas geométricas simples. Formas fractais são resultados de algorítmos recursivos de construção e necessitam de computadores para sua representação.

Um exemplo: Vamos ilustrar estas diferenças usando um dos primeiros **monstros** matemáticos; a curva "floco de neve" de Von Koch (proposta pela 1ª vez em 1904). A forma de construção da curva é a seguinte.

Desenhe uma linha e a divida em 3 partes iguais (cada pedaço de comprimento d é escalado da reta original de : $d = 1/3 * r$, sendo r seu comprimento inicial) . Depois faça o terço central da reta ser então substituido por 2 pedaços de tamanho idênticos. O processo deve ser repetido infinitamente: a cada novo estágio, cada desenho será acrescido de um pedaço que será 1/3 do anterior e teremos 4 destes novos pedaços.



Esta regra de construção identifica a figura e não sua fórmula, como no caso de formas Euclidianas. Esta curva tem a mesma forma em qualquer que seja a escala de observação (auto-semelhança). Qualquer pequeno detalhe quando ampliado irá reproduzir uma porção maior exatamente. A cada estágio da construção o comprimento da curva crescerá de 4/3 em relação ao comprimento anterior. No limite teremos um **comprimento infinito em uma área finita do plano sem qualquer interseção**. Embora sua forma de construção seja simples **não existe equação possível para determinar todos os seus pontos** .

1.8 - Dimensão

Uma das noções mais intuitivos de dimensão está associada a escala e auto-semelhança. Um objeto de dimensão 1, uma reta por exemplo, se dividida em N partes, cada parte será idêntica a anterior multiplicada pelo fator de escala de $r = 1/N$, e $N \times r^1$ reconstituirá o objeto.

Um objeto de duas dimensões, por exemplo um quadrado, pode ser dividido em N partes idênticas, cada uma será idênticas a original multiplicado por um fator de escala de $r = \sqrt{1/n}$ e $N \times R^2$ reconstitue o objeto.

Um exemplo 3D , se divido em N partes iguais, cada parte será igual a anterior multiplicado por $r =^3 \sqrt{1/N}$ e $N \times r^3$ reconstitue o objeto.

O número que deve-se elevar r para que, multiplicado por N tenha-se 1, é a dimensão, D, do objeto. Para os fractais, D é fracionário.

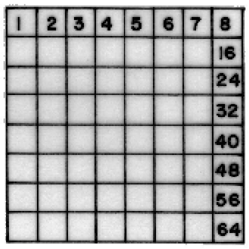
$$N \times (r)^D = 1$$

$$N = \frac{1}{rD} = \left(\frac{1}{r}\right)^D \Rightarrow logN = D \times \log\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\Rightarrow D = \frac{\log N}{\log(1/r)}$$

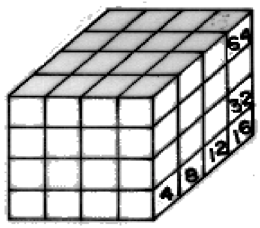
Uma reta se dividida em N partes, cada parte é igual a reta original escaldas de $r = \frac{1}{N}$. Reta original será reconstituida se $\rightarrow N \times (r)1 = 1$

$$se\ N = 64 \rightarrow\ r = 1/64, e\ N \times (r)^1 = 1$$



Um quadrado dividido em N partes, cada parte é igual ao quadrado original escalado de $r = \frac{1}{(N)^{1/2}}$. Quadrado original será reconstituido se $\rightarrow N \times (r)^2 = 1$.

Desde modo, se $N = 64 \rightarrow\ r = 1/\sqrt{64} = 1/8,\ e\ N \times (r)^2 = 1$.



Um cubo se dividido em N partes iguais, cada parte será igual a original escalada de $r = \frac{1}{(N)^{1/3}}$. O cubo original será reconstituido se $\rightarrow\ N \times (r)^3 = 1$

Desde modo, se $se\ N = 64 \rightarrow\ r = 1/\sqrt[3]{64} = \frac{1}{4},\ e\ N \times (r)^3 = 1$.

Assim a dimensão D deve ser tal que: $N \times r^D = 1$

$$N = \left(\frac{1}{r}\right)^D \rightarrow \log N = D \log \frac{1}{r} \rightarrow \quad D = \frac{\log N}{\log\left(1/r\right)}$$

$$D = \frac{\log N}{\log\left(1/r\right)}$$

$N\ \rightarrow$ número de partes para reconstruir a figura original

$r \rightarrow$ escalamento da figura original.

Para a fractal, "floco de neve" (ou "triadic de Koch", descrita na seção enterior) temos que a figura original é escalada de $r = 1/3$ e 4 partes, $N = 4$, reconstituem a figura, logo:

$$D = \frac{\log N}{\log 1/4} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.26$$

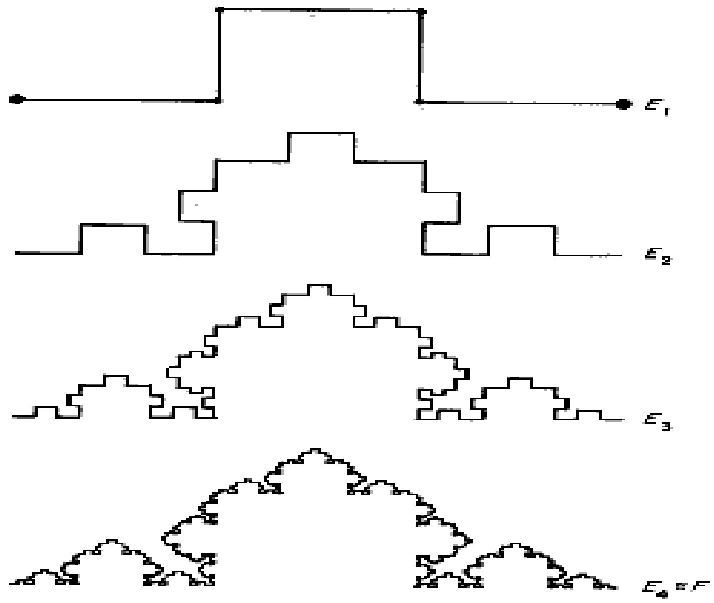
Na factal "dragon", cada parte de uma reta é substituido pelos dois lados de um triângulo isósceles retângulo de base igual à da parte reta que substituem, a dimensão desta figura será:

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad N = 2 \quad e \quad D = \frac{\log 2}{\log \sqrt{2}} = 2$$

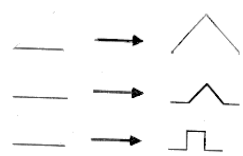
A fratal "quadric de Kock" é semelhante à fractal bloco de neve, mas o terço médio de uma reta é substituindo pelos 3 lados de um quadrado de mesma base. Para esta fractal tem-se:

$$r = 1/3 \quad , \quad N = 5 \quad e \quad D = \frac{\log 5}{\log 3} = 1.47$$

Quádrica de Kock:



A regra de subdivisão e substituição destas fractais ("dragon, triadic ou quadric de Koch") é fundamental para o cálculo de suas dimensões.



Quando mais próximo de 2, o valor da dimensão de uma fractal, maior a área da superfície que a fractal deve ocupar. A construção abaixo, chamada curva de Peano tem:

$$r = \frac{1}{2} \quad , \quad N = 4 \quad e \quad 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2=D} = 1$$

$$D = \frac{\log 4}{\log 2} = 2$$

Curva de Peano: