Este texto corresponde ao capítulo 3 da tese de mestrado: "Um algoritmo de cálculo da dimensão fractal de imagens" , escrita por **Claudenize Francisca Japiassu Campos,** defendida no Dep. De Engenharia Mec., PUC-Rio, orientador : Aura Conci - em 02/04/96 .

DIMENSÃO FRACTAL DE OBJETOS REAIS

A geometria fractal tem sido usada para caracterizar o comportamento de sistemas caóticos, para revelar novos critérios matemáticos, para definir modelos de objetos naturais, e para sugerir modelos nas ciências.

Um conjunto é chamado de conjunto fractal se sua dimensão de Hausdorff-Besicovitch for estritamente maior do que sua dimensão topológica. Mandelbrot foi o primeiro a usar o termo *fractal* (do latin *fractus*, que significa segmentos irregulares).

Em geometria fractal estamos interessados na geometria de conjuntos e na maneira como eles "parecem" quando representados por figuras. Os números associados às fractais que podem ser usados para compará-las são chamados de *DIMENSÃO FRACTAL.* Eles buscam quantificar a densidade das fractais no espaço métrico em que são definidos.

A dimensão fractal pode ser obtida através de experimentações. Pode-se obter dimensões de nuvens, árvores, penas, neurônios, poeiras, roupas, frequência de ondas, radiação de cores, superfícies do mar, etc. Uma fractal exibe as mesmas características de complexidade em todos os níveis de resolução. Quanto maior a sua dimensão, mais a fractal "preenche" o seu espaço subjacente. A dimensão fractal tem servido como veículo para segmentação de imagens (Lohmannm, 1995) que significa, separar a imagem em suas partes constituintes e rotulá-las.

O termo *Dimensão Fractal* é geralmente usado de uma maneira genérica. Mandelbrot desenvolveu um cálculo de *Dimensão Fractal (DF)* aproximado apartir da estimativa do comprimento de um contorno. Considerando todos os pontos com distâncias ao contorno de não mais do que $\in$, verifica-se que esses pontos formam uma faixa de largura $2 \in$ e o comprimento sugerido $L(\in)$ do contorno é a área da faixa dividida por $2\in$. Enquanto

$\in$ diminui, $L(\in)$ aumenta. Mandelbrot (1982) considerou que para muitos contornos a seguinte fórmula poderia ser usada:

$$L(\in) = F\in^{1-D} \tag{3.1}$$

Onde F e D são constantes para um contorno específico. Ele chamou D de dimensão fractal (*DF*) da linha. D pode ser derivada por ajuste de mínimos quadrados em um gráfico log-log de $L(\in)$ e $\in$. Se D é o declive da linha ajustada, então a *DF* da curva (contorno) será $1 - D$. Note que D é sempre negativo.

Apesar da base matemática das fractais ser bem conhecida (Falconer, 1990), a relação precisa entre o cálculo de uma dimensão fractal e o conceito matemático de dimensão, tais como a dimensão Hausdorff-Besikovitch ou a dimensão Minkowski-Bouligand (Dubuc et al, 1989), é conhecido apenas sob resoluções infinitas. Diversos tipos de dimensões fractais têm sido mencionados na literatura. As condições sob as quais os vários conceitos de dimensão fractal são equivalentes e a conexão exata entre as definições de dimensão fractal e a dimensão Hausdorff-Besikovitch muitas vezes não são claras na prática. Uma outra fonte de confusão é a tendência de definir a dimensão fractal como uma quantidade sendo computada por um algorítmo, então vários algorítmos para dimensão fractal podem não estar estimando totalmente a mesma quantidade.

3.1 - Formas de Medir Teoricamente a Dimensão de Figuras

Para uma definição mais precisa de *DF,* alguns conceitos da teoria dos operadores lineares precisam ser introduzidos.

Um ESPAÇO MÉTRICO (X, d) é um espaço X com uma função de valores reais, $d : X \times X \to R$, que mede a distância entre dois pontos. d é chamada MÉTRICA, se satisfizer (Naylor e Sell, 1971):

1 - $0 < d(x, y) < \infty, \quad \forall x, y \in X$ (a métrica deve ser positiva e não infinita para todos os pontos do espaço);

2 - $d(x, y) = 0$ Se $x = y$ (a distância de um ponto a ele mesmo for nulo);

3 - $d(x, y) = d(y, x)$ (a distância entre dois pontos independente de qual dos dois é considerado o ponto inicial).;

4 - $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (desiqualdade do triângulo).

Uma sequência (X, d) em um espaço métrico (X, d) é dita ser de CAUCHY, se para cada $\varepsilon > 0$, existe um N tal que $d(X_n, X_m) \leq \varepsilon$ para uma escolha de n, $m > N$.

Um espaço métrico (X, d) é dito ser COMPLETO se cada sequência de Cauchy em (X, d) é uma sequência convergente em (X, d).

Um subconjunto de R^n, onde R representa o conjunto dos reais, X é COMPACTO se for fechado e limitado. O símbolo $H(X)$ será usado para denotar o espaço dos pontos que são subconjuntos compactos de X.

Se x for um ponto do espaço em estudo e B for um conjunto compacto, ($x \in X$ e $B \in H(X)$), define-se a distância de x a B como:

$$d(x, B) = \min \{ d(x, y) : y \in B \}$$

Se dois conjuntos compactos forem considerados, (A e $B \in H(X)$), a distância de dois elementos de H será definida como:

$$d(A, B) = \max \{ d(x, B) : x \in A \}$$

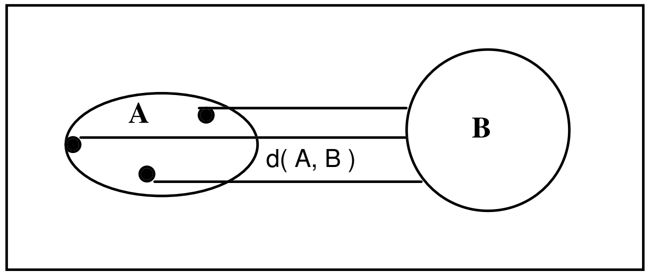

Figura 3.1 - Distância do conjunto A ao B.

Usando a notação $x \vee y$ para expressar "o máximo entre dois números reais x e y ", a distância de Hausdorff entre dois números será definida como:

$$h(\ A,\ B\ ) = d(\ A,\ B) \quad \vee \quad d(\ B,\ a\ )$$

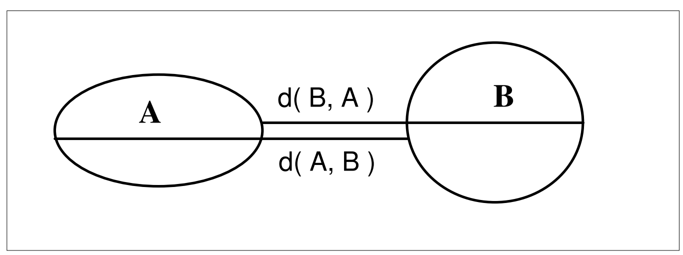

Figura 3.2 - Não existe comutatividade na distância entre 2 conjuntos.

É importante observar que $d(A,\ B)$ não é uma métrica para o espaço $H(X)$, enquanto que $h(A,\ B)$ pode ser considerado métrica.

O espaço ($H(X)$, $h(d)$) acima definido é completo (todas sequências de Cauchy, convergem para valores pertencentes a $H(X)$). Este espaço será chamado de espaço das fractais, (segundo Barnsley (1988) qualquer subconjunto de $H(X)$ é uma fractal).

Seja $(X,\ d)$ um espaço métrico completo, e $A \in H\ (X)$ um conjunto não vazio. Considerando um número $\in$ positivo $(\in\ >\ 0\ )$, então $B(\ x,\in\ )$ é definido como uma bola fechada de raio $\in$ centrada em um ponto de x. Usa-se a notação $N\ \ (\ A,\in\ )$ para o menor número de bolas fechadas de raio $\in$ necessárias para cobrir A.

Exemplo3.1.1:

Se o conjunto A for o triângulo de Sierpinski, a figura abaixo ajuda a ver que:

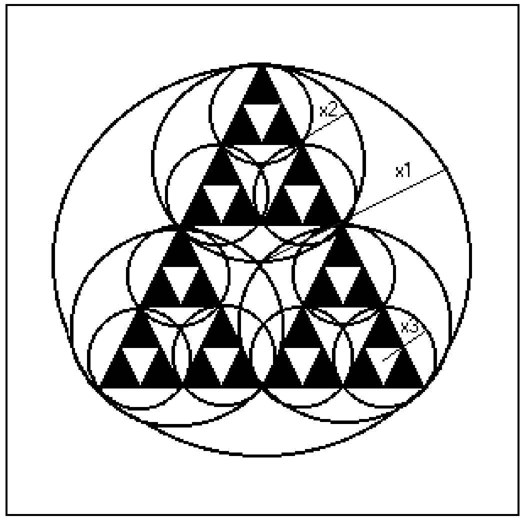

Figura 3.3 - Aproximação em 3 iterações do triângulo de Sierpinski.

$$\in = x_1, \quad N\ (A, \in) = 1$$

$$\in = x_2, \quad N\ (A, \in) = 3$$

$$\in = x_3, \quad N\ (A, \in) = 9$$

Então o conjunto A terá "intuitivamente" uma dimensão D se:

$$N(A, \in) \cong C \in^{-D} \qquad \textit{para algum C constante positivo.}$$

Nos trabalhos de Mandelbrot (1982, 1988) e Voss (1988), $C = 1$. Resolvendo a Dimensão Fractal *(DF)*, temos:

$$D \approx \frac{\ln N\ (A, \in) - \ln C}{\ln(1/\ \in)} \tag{3.2}$$

Note-se que ($\ln C / \ln(1/\in)$) se aproxima de zero quando $\in \rightarrow 0$.

Se, $D \approx \dfrac{lnN\ (A, \in) - lnC}{ln(1/\ \in)}$ existe, então D é chamado de Dimensão Fractal do conjunto A, denotado $D(A)$. Para qualquer figura em qualquer espaço.

Exemplo 3.1.2:

Se o conjunto X for o R^2 com a métrica Euclidiana:

$(R^2, d_E), a \in R^2$ *e* $A = \{ a \}$

$(d(x, y), d_E = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2})$

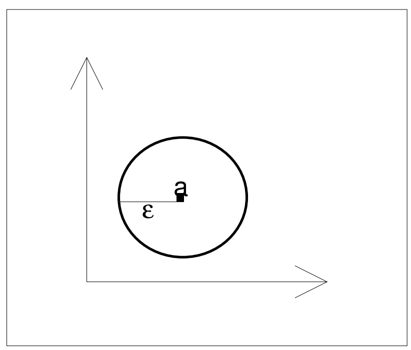

Figura 3.4 - Bola fechada de raio $\in$ *centrada em a.*

Para qualquer raio da bola fechada $\in > 0$ *, o número de bolas fechadas que cobrem o conjunto será:* $N\ (A, \in) = 1$*, assim:*

$$D = \lim_{\in \to 0} \frac{1}{1/ \in} \qquad D(A) = 0, \quad \text{ou seja ,}$$

A Dimensão Fractal de um ponto é zero

Exemplo 3.1.3:

Se o conjunto X for o R^2 com qualquer métrica, (X,d), e o conjunto A for 3 pontos qualquer do R^2, A = {a, b, c}. Então o número de bolas fechadas necessárias para cobrir A será sempre 3.

$N\ (A,\in) = 3\ \forall\in$, *logo a dimensão fractal de 3 pontos será:*

$$D = \lim_{\in\to 0} \frac{3}{1/\in} = 0 \qquad D(A) = 0$$

Exemplo 3.1.4:

Mudando a métrica do espaço acima para:

$$d(x,\ y)\ =\ \left|(x_1 - y_1)\right| + \left|(x_2 - y_2)\right|$$

(esta métrica é denominada métrica Manhatan) teremos um novo espaço métrico: (R^2, Manhattan), considerado o conjunto A o segmento de reta entre 0 e 1, A = [0,1]. Os raios das bolas fechadas se relacionaram com o número de bolas fechadas pelos valores expressos abaixo:

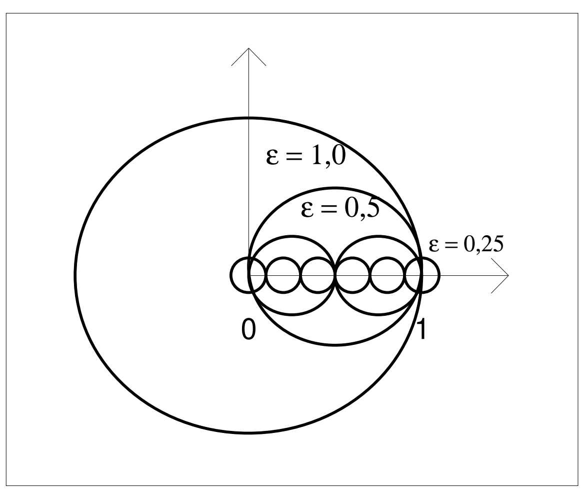

Figura 3.5 - Bolas fechadas cobrindo o intervalo real [0, 1].

$\in = 1{,}0 \qquad N\ (A,\in) = 1 = 1/\in;$

$\in = 0{,}5 \qquad N\ (A,\in) = 1 = 1/\in - C(\in);$

$\in = 0{,}25 \qquad N\ (A,\in) = 2 = 1/\in - C(\in);$

.

.

.

$\in = 0{,}1 \qquad N\ (A,\in) = 6 = 1/\in - C(\in);$

Ou seja: $D = \lim_{\in \to 0} \dfrac{1/\in}{1/\in} = 1$ *e a dimensão fractal de A :* $D(A) = 1.$

3.1.1 -- Teorema da Contagem dos "Cubos"

(Box Counting Theorem) - Teorema da Contagem dos Cubos.

Seja $A \in H(R^m)$ e $d = d_E$ · (ou seja, A é um elemento no espaço Hausdorff definido no espaço dos reais de dimensão m). A é um conjunto fechado e limitado no R^m. "Cobrindo" R^m por "cubos", que apenas se toquem de lado = $(1/2^n)$. Se $N_n(A)$ indica o número de "cubos" de lados $(1/2^n)$ que tem interseção não nula com A, então:

$$D = \lim_{n \to \infty} \frac{ln(N_n(A))}{ln(2^n)}$$ representa a dimensão fractal de A.

Exemplo3.1.1.1:

• $\subset R^2$, *onde* • $= \{ (x, y)$ *tal que* $x, y \in [0, 1] \}$

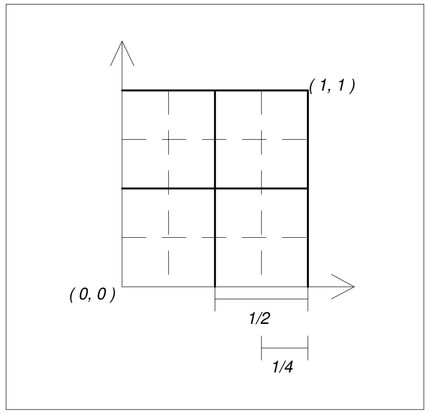

Figura 3.6 - Cobrindo o espaço [0, 1]×[0, 1] com cubos.

se $n = 1$, lado $1/2$, $N_1(\bullet) = 4$

se $n = 2$, lado $1/2^2 = 1/4$, $N_2(\bullet) = 16$

se $n = 3$, lado $1/2^3 = 1/8$, $N_3(\bullet) = 64$

ou seja $N_n(\bullet) = 4^n$, assim :

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{ln(4^n)}{ln(2^n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{nln4}{nln2} = 2$$

Exemplo3.1.1.2:

Se A = { Triângulo de Sierpinski com centro (0,0) (0,1) (1,0) }, (R^2, Euclidiana):

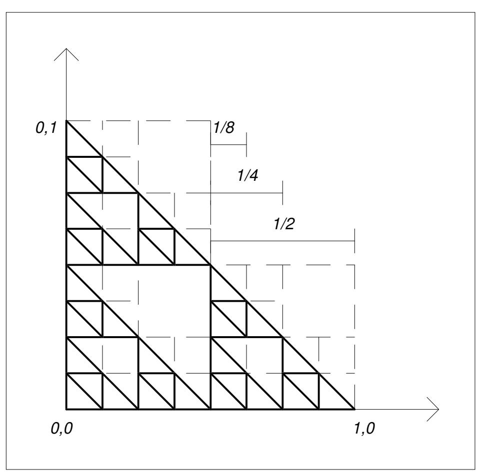

Figura 3.7 - Cobrindo uma aproximação do triângulo de Sierpinski com "cubos".

$$n = 1, \quad \text{lado } 1/2, \quad N_1(A) = 3 = 3^1$$

$$n = 2, \quad \text{lado } 1/2^2 = 1/4, \quad N_2(A) = 9 = 3^2$$

$$n = 3, \quad \text{lado } 1/2^3 = 1/8, \quad N_3(A) = 27 = 3^3$$

ou seja, $N_n(A) = 3^n$, *logo a dimensão fractal do triângulo de Sierpinski é :*

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(3^n)}{\ln(2^n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\ln 3}{n\ln 2} = 1{,}585$$

3.2 - Formas de Medir Experimentalmente a Dimensão Fractal

Considerando a determinação experimental da *dimensão fractal* em exemplos do mundo físico, o melhor modelamento possível do espaço subjacente é considerado como subconjunto de (R^2, *Euclidiana*) ou (R^3, *Euclidiana*). Baseado na definição da *DF* e algumas vezes utilizando as definições precedentes, ou o teorema da contagem dos cubos, exemplifica-se formas de prover uma *DF* para objetos do mundo real (Barnsley, 1988). Nos exemplos a seguir mostra-se que quando a *DF* de um cenário físico é cotada, alguma indicação de como foi calculada deve também ser provida, pois ainda não existe um único modo amplamente aceito de associar uma *DF* com um cenário de dados experimentais.

Exemplo 3.2.1:

Existe uma nuvem de pontos (conjunto de partículas de pó, fumaça, gases, etc.) no entalhe de madeira (figura 3.8). Estimando sua DF pela definição representada pela equação 3.2, começou-se por cobrir a nuvem de pontos com bolas fechadas de raio $\in$*, para uma variação de* $\in$ *estimado de* $\in$*=3cm decrescendo até* $\in$*=0,3cm. Para cada raio foi contado o número de bolas necessárias para cobrir a nuvem. O resultado é o conjunto de* *valores aproximados para $N(A, \in)$ dado na tabela 3.1 e mostrado no formato log-log na tabela 3.2.*

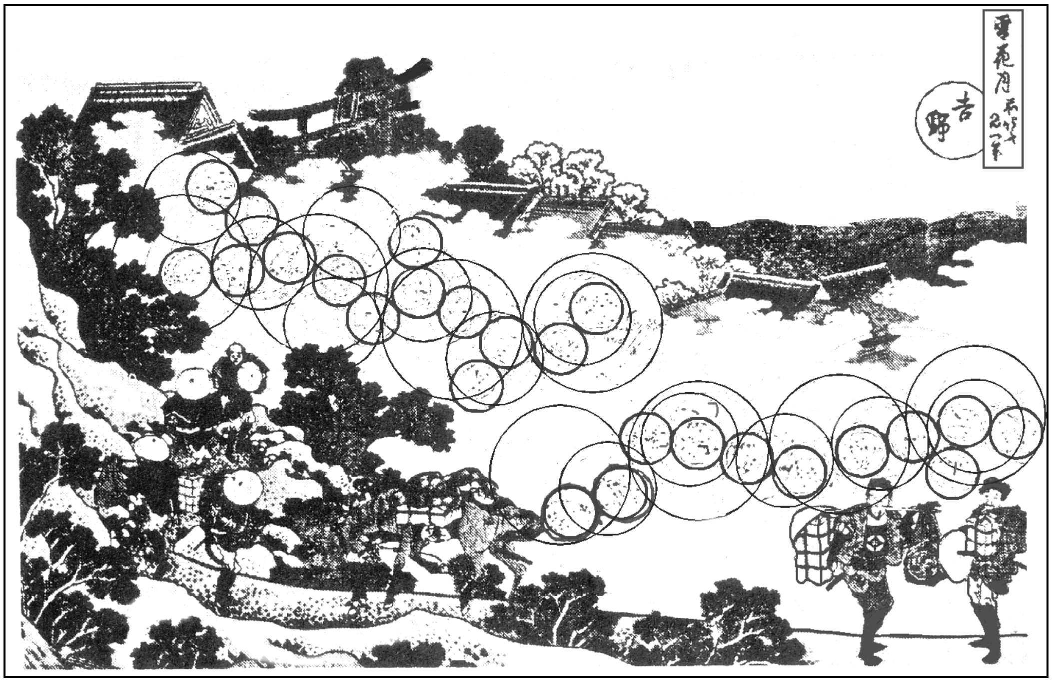

Figura 3.8 - Entalhe de Madeira (Barnsley, 1988).

Tabela 3.1

Número mínimo de bolas fechadas de raios variados necessárias para cobrir a nuvem de poeira no entalhe de madeira da figura 3.8.

$\in$	$N(A, \in)$
3,0 cm	2
2,0 cm	3
1,5 cm	4
1,2 cm	6
1,0 cm	7
0,75 cm	10
0,5 cm	16
0,4 cm	23
0,3 cm	31
0,015 cm	267

Tabela 3.2

Dados da tabela 3.1 tabulados na forma log-log. Valores usados para obter a dimensão fractal.

ln(1/∈)	*ln(N(A, ∈))*
-1,1 cm	0,69
-0,69 cm	1,09
-0,405 cm	1,39
-0,182 cm	1,79
0 cm	1,95
0,29 cm	2,30
0,693 cm	2,77
0,916 cm	3,13
1,204 cm	3,43
4,2 cm	5,59

Os dados da tabela 3.2 são plotados na figura 3.9. É traçada uma reta que passa aproximadamente através dos pontos. A aproximação da DF da nuvem de pontos vista na figura 3.8 é dada pela inclinação dessa reta.

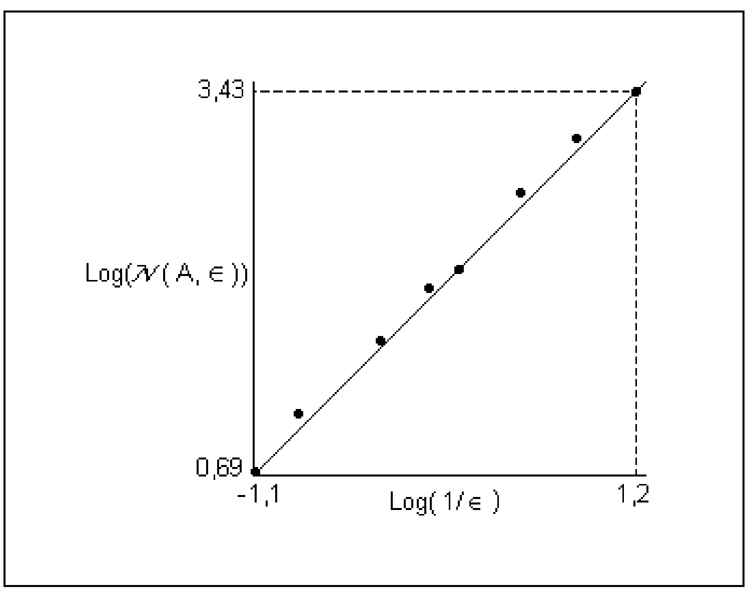

Figura 3.9 - Gráfico de log(N(A, $\in$)) $\times$ log(1/$\in$).

A inclinação da reta na figura acima dá D(A) ≈ 1,2, ***estimativa I****, no limite de 0,3 cm à 3,0 cm. Onde A é o conjunto de pontos cuja dimensão foi aproximada. Para se ter consistência nos resultados experimentais, a reta deve ser estimada pelo método dos mínimos quadrados.*

No procedimento por aproximação direta para utilização da definição 3.1, as estimativas de N(A, $\in$) precisam ser feitas com muito cuidado. Deve-se ter conciência de que N(A, $\in$) é realmente o menor número de bolas de raio $\in$ necessários. É importante especificar os limites das escalas usadas: não faz sentido pela estrutura dos pontos da figura 3.8, usar $\in$ com valores menores que, 0.015 cm. O próprio número experimental N(A, 0,015cm) não é muito correto e foi excluído na plotagem da figura 3.9. Além disso, indiferente à quantos dados experimentais se tenha e indiferente à quantas escalas de observação são disponíveis, sempre se terminará estimando a inclinação da reta correspondente à um limite finito de escalas. (Se o ponto (0,015cm, 267) for incluído na estimativa, obter-se-á D(A) ≈ 0,9, ***estimativa II****, nos limites da escala de 0,015cm à 3cm).*

Observe a diferença entre a estimativa I (D(A) ≈ 1,2) e a estimativa II (D(A) ≈ 0,9). Se o cálculo for restringido aos limites das escalas em I, haverá pouca informação presente nos dados para distinguir a nuvem de pontos de uma curva irregular. Entretanto os dados usados para obter II contém valores para N(A, $\in$) para alguns valores de $\in$ de tal modo que as coberturas correspondentes de A são "desconectadas". Isso reduziu o valor determinado experimental de D.

Exemplo 3.2.2:

Neste exemplo será considerado o conjunto físico indicado por A na figura 3.10. Onde A pode ser visto como uma aproximação do conjunto clássico de Cantor. Para este caso foi feito uma estimativa experimental da DF, baseada no teorema da contagem dos cubos (Box Counting Theorem). Um sistema de coordenadas cartesianas é montado, será feito uma contagem do número de cubos de área N_n(A) de lado ($1/2^n$) o qual "cobre" A.

Pode-se obter valores satisfatoriamente exatos de $N_n(A)$ *para n = 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Esses valores dependem da escolha do sistema de coordenadas e estão presentes na tabela 3.3.*

A análise de dados é feita da mesma maneira que no exemplo 3.2.1, porém os valores de $N_n(A)$ *são mais fáceis de medir do que os valores de* $N(A, \in)$*. Obtém-se* $D(A) \approx 0{,}8$*, em uma variação nos limites dos lados entre 1 e de 1/64 unidades.*

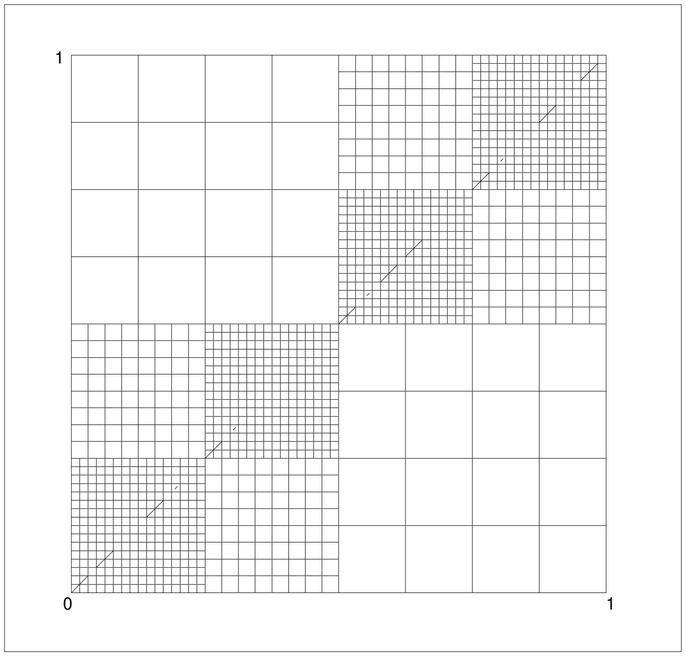

Figura 3.10 - Imagem do conjunto analisado no exemplo 3.2.2 (Barnsley, 1988).

Tabela 3.3

Dados determinados do cálculo experimental da DF de um conjunto físico.

n	$N_n(A)$	$\ln N_n(A)$	$n \ln 2$
0	1	0	0
1	2	0,69	0,69
2	4	1,39	1,38
3	7	1,95	2,08
4	13	2,56	2,77
5	21	3,04	3,46
6	33	3,50	4,16

3 .3 - Avaliadores da Dimensão Fractal de Imagens

Resultados de análise de textura usando técnicas fractais são reportados por Nguyen e Quinqueton (1982), e Pentland (1983). Enquanto Nguyen e Quinqueton usam somente a análise de fractais de dimensão 1 ao longo de curvas *space filling*, Pentland faz a análise completa bidimensional. Pentland usou estatísticas das diferenças dos níveis de cinza entre pares de *pixels* a distâncias variáveis como indicadores das propriedades fractais da textura., Ele obteve bons resultados das classificações baseados na dimensão fractal computada. Usando este procedimento, as texturas são fractais para determinadas escalas. Um trabalho relacionado à análise de textura em múltiplas escalas usando estruturas piramidais é relatado por Larkin e Burt (1983). Discussões gerais da análise de textura podem ser encontrada em Laws (1980), Pratt *et al* (1981) e Haralick *et al* (1973).

Uma das propriedades importantes dos objetos fractais é a sua superfície. A medição da superfície em uma imagem em tons de cinza é baseada em métodos sugeridos por Mandelbrot (1982) para as medições do comprimento de curva. Peleg *et al*. (1984) adotou a idéia de Mandelbrot e estendeu-a para o cálculo de superfícies. Nessa extensão, a imagem pode ser vista como um terreno, de superfície acidentada, cuja altura do solo é proporcional ao tom de cinza da imagem.

3.3.1 - Medindo o Comprimento de Uma Curva

Os métodos seguintes são descritos por Mandelbrot para medir o comprimento de linhas costeiras irregulares.

1 - Dado um padrão de comprimento $\in$, ande com ele ao longo da costa. O número de passos multiplicado por $\in$ é uma distância aproximada de $L(\in)$ da linha costeira. Para uma linha costeira, quando $\in$ se torna menor, o comprimento $L(\in)$

observado aumenta sem limite. Este método é baseado na aproximação da curva com um polígono feito de segmentos de comprimento $\in$.

2 - O menor caminho na terra que não é mais distante do que $\in$ da água pode ser visto como uma distância aproximada $L(\in)$ da costa. Este método discrimina entre terra e água uma propriedade considerada indesejável. Entretanto, esta discriminação entre lados das curvas e superfícies são úteis para algumas propriedades da textura.

3 - Considere todos os pontos distantes não mais do que $\in$ da “linha costeira”. Esses pontos formam faixas de largura $2\in$, e a distância da costa sugerida $L(\in)$ é a área da faixa dividida por $2\in$. Aqui também, quando $\in$ diminue $L(\in)$ aumenta.

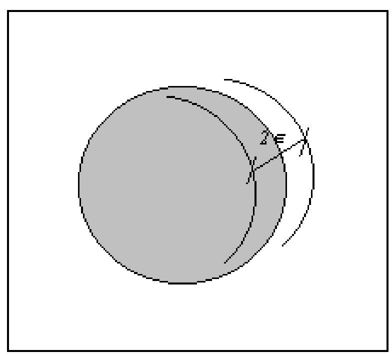

Figura 3.11 - Faixa a $2\in$ da “linha costeira”.

4 - Cubra a linha costeira com o número mínimo de bolas de raio $\in$, não necessariamente centrados na linha costeira. Seja $L(\in)$ a área total dessas bolas dividido por $2\in$.

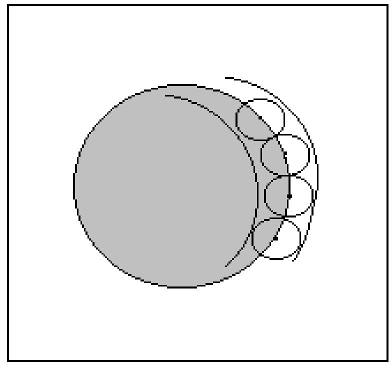

Figura 3.12 - Cobrindo a "linha costeira" com bolas de raio $\in$.

Os estudos de Mandelbrot mostram que para muitas linhas costeiras:

$$L(\in) \approx F\in^{1 - D} \tag{3.1}$$

onde *F* e *D* são constantes para uma linha costeira específica. Ele chamou *D* da *"dimensão fractal"* da linha. Note que para uma linha reta $D = 1$ e *F* é o comprimento verdadeiro da linha. Para curvas fractais, *D* é independente de $\in$, e quando plota-se $L(\in)$ versus $\in$ numa escala *log-log* consegue-se uma linha reta com inclinação $1 - D$. Quando *D* varia com $\in$ e não é uma constante, a área acima não será uma linha reta.

3.3.2 - Medindo a Área de Uma Superfície

Para computar a área de uma superfície, a aproximação 3 acima, foi adotada já que a sua extensão para superfícies parece ser eficiente. Nesta extensão de curva para superfície, todos os pontos no espaço tridimensional, a distância $\in$ da superfície, foram considerados, cobrindo a superfície com um "cobertor" de espessura $2\in$. A área da superfície é então o volume ocupado pelo cobertor dividido por $2\in$. A espessura do cobertor é definida por sua superfície superior $u_\in$ e a superfície inferior $b_\in$.

Inicialmente, dado a função do nível de cinza $g(i, j)$, a superfície superior e inferior na interação zero, que corresponde a um cobertor de espessura zero serão:

$u_o(i, j) = b_o(i, j) = g(i, j)$. Para outros valores de espessura do cobertor, $\in$ = 1, 2, 3, ..., as superfícies cobertas inferiormente e superiormente são definidas por:

$$u_{\in}(i, j) = \max \{ u_{\in - 1}(i, j) + 1, \max_{d((m, n), (i, j)) \leq 1} u_{\in - 1}(m, n) \} \tag{3.3}$$

$$b_{\in}(i, j) = \min \{ b_{\in - 1}(i, j) - 1, \min_{d((m, n), (i, j)) \leq 1} b_{\in - 1}(m, n) \} \tag{3.4}$$

Onde $d((m, n), (i, j))$ é a distância entre os *pixels* (m, n) de uma imagem, seus vizinhos (i, j) que distam de (m, n) no máximo 1.Esses *pixels* são tomados como os quatro vizinhos mais próximos de (i, j). Existem expressões semelhantes quando oito vizinhos são desejados. Será incluído no cobertor um ponto (x, y, f) por $\in$ quando $b_{\in} (x, y) < f \leq u_{\in} (x, y)$.

Essa definição usa o fato de que o cobertor de uma superfície para o raio $\in$ inclue todos os pontos do cobertor para o raio $\in - 1$, junto com todos os pontos dentro do raio *1* das superfícies deste cobertor. A expressão (3.3), por exemplo, assegura que uma nova superfície superior $u_{\in}$ é maior do que $u_{\in - 1}$ em pelo menos *1*, e também a distância de pelo menos *1* de $u_{\in - 1}$ nas direções horizontal e vertical.

O volume do cobertor é computado de $u_{\in}$ e $b_{\in}$ por:

$$v_{\in} = \sum_{i,j} (u_{\in}(i, j) - b_{\in}(i, j)) \tag{3.5}$$

Uma ilustração unidimensional do processo de expansão é mostrada na figura abaixo.

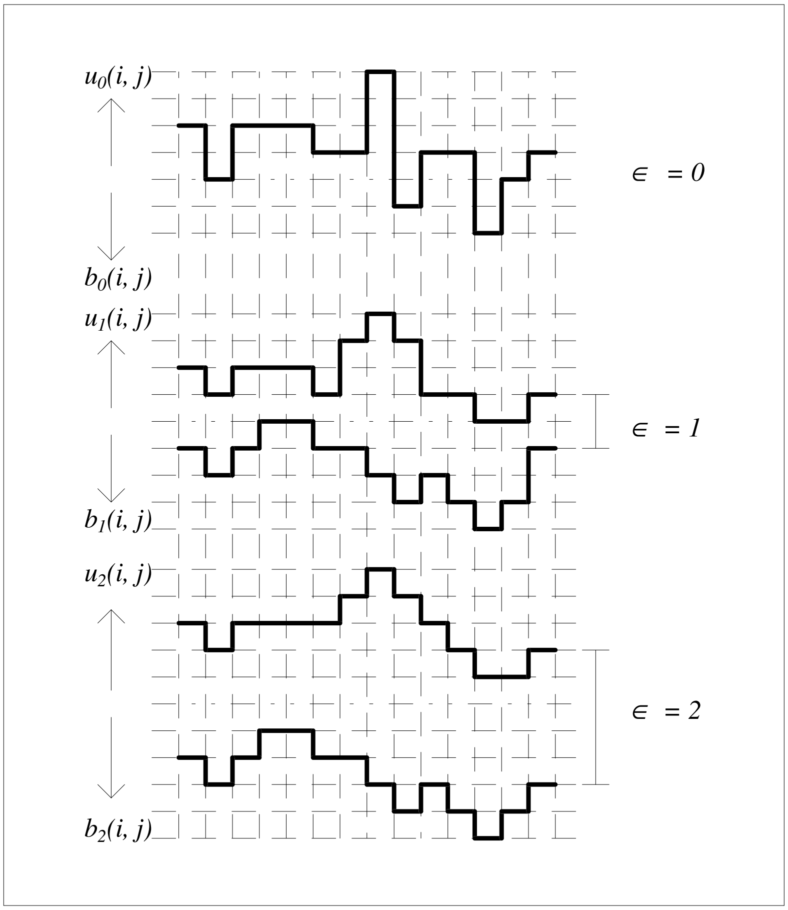

Figura 3.13 - Exemplificação dos limites superiores e inferiores do cobertor.

Com a área da superfície medida, com o raio $\in$ toma-se o volume da camada adicionada pelo raio $\in$ - *1*, dividido por *2* para considerar ambas camadas (a superior e a inferior):

$$A(\in) = \frac{(v_{\in} - v_{\in-1})}{2} \tag{3.6}$$

A área da superfície fractal se comporta de acordo com a expressão: (Mandelbrot, 1982).

$$A(\in) = F\in^{2-D} \tag{3.7}$$

A dimensão fractal pode ser obtida através do ajuste de mínimos quadrados linear no gráfico de $A(\in)$ versus $\in$ numa escala *log-log* plotado apartir da equação acima, obtendo-se uma linha com inclinação *2 - D*.