http://computacaografica.ic.uff.br/conteudocap2.html

Curso de CG 2018/2 – IC / UFF

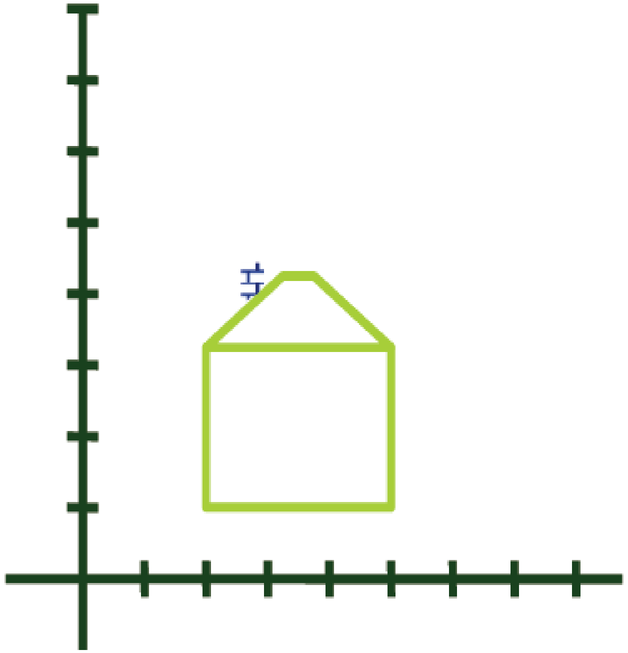
Transformações Geométricas no Plano e no Espaço

Esse material está no

Site do curso como :

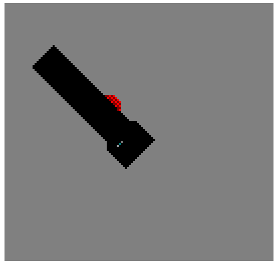
CG-Aula5-2017.pdf

CG-Aula8-2016.pdf



Definição

- **Transformações geométricas** são operações que podem ser utilizadas para **alterar** de algumas características como posição, orientação, forma ou tamanho do **objeto** a ser desenhado.



Operações com pontos ou vetores

Conceitos:

- multiplicação de vetores (*u* , *v* , *w*) e matrizes *T*
- soma de vetores. $x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}.$

- Vetores => (linha ou coluna) $(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
- Transposta (T^T i,j) = (T j,i)
  - $(AB)^T = B^T A^T$

- Vetor coluna (n x 1): T (u)
- Vetor linha (1 x n) : (u') T^T

Matrizes

- Para executar uma transformação podemos usar operações algébricas (caras computacionalmente).

- O uso de matrizes é mais interessante para esse objetivo

- As matrizes podem fazer as transformações e **combiná-las** de forma mais eficiente.

- Elas também são mais eficientes na **armazenagem** das figuras presentes no seu cenário

Pontos e matrizes

- Nos espaços **bidimensionais**, duas coordenadas caracterizam um ponto.

  – P = [21, 33]: ponto em **duas dimensões**.

Nos espaços **tridimensionais**, três coordenadas caracterizam um ponto.

– P = [20, 2, 10]: ponto em **três dimensões**.

Pontos e matrizes

- Uma matriz 1x2 ou 2x1 pode ser usada para descrever 1 ponto de um objeto **no plano**

- Uma matriz nx2 ou 2xn para **todos os n pontos** de um objeto no plano

- Uma matriz 1x3 ou 3x1 pode ser usada para descrever 1 ponto de um objeto **no espaço**.

- Uma matriz nx3 ou 3xn pode ser usada para descrever **n pontos de um objeto no espaço**

Aritmética de vetores e matrizes

- **Soma e subtração:** os dois operandos devem ter a mesma dimensão
- **Multiplicação por escalar**.
- Inversa
- **Transposta** de uma matriz
  - $[2,3]^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
- **Multiplicação de matrizes**
  - O número de linhas da primeira deve ser igual ao número de colunas da segunda:

n x 3 . 3 x n **3 x n . n x 3**

Transformações lineares

- São transformações aplicadas aos **pontos, objetos ou ao cenário** (universo) como um todo.
- Podem ser
  - Translação
  - Escala
  - Rotação
  - Reflexão
  - Cisalhamento

Transformações simples

- Definição

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$
2. $T(av) = a\, T(v)$

- u , v vetores de dimensão $n = 2$ ou 3 .

- T matriz quadradas n x n.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

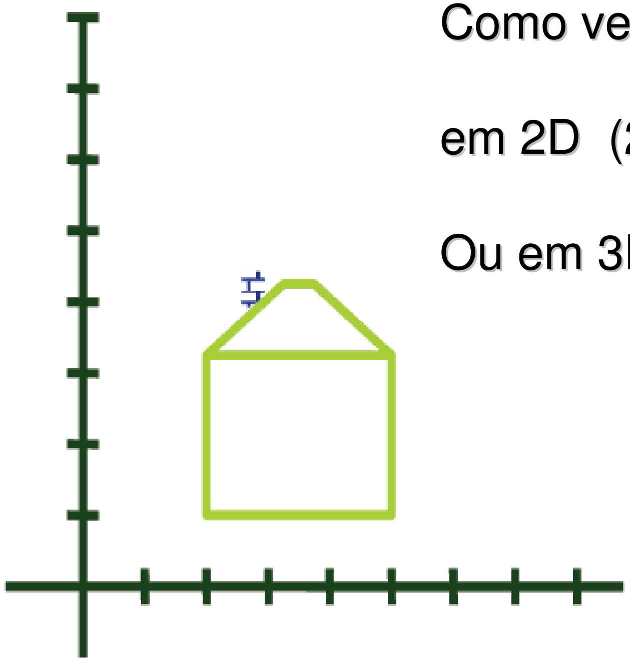
Um vetor ou um objeto

- em CG e´ definido pelo seu conjunto de pontos

Vendo os pontos
Como vetores linhas

em 2D (2,1) ,(5,1), (5,3), (2,3),....

Ou em 3D (2,1,1), (5,1,1), (5,3,1), (2,3,1) ...



Transformar um objeto

- É transformar seus pontos

$$T=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+cy \\ bx+dy \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}=Ax+t.$$

Transformações afins

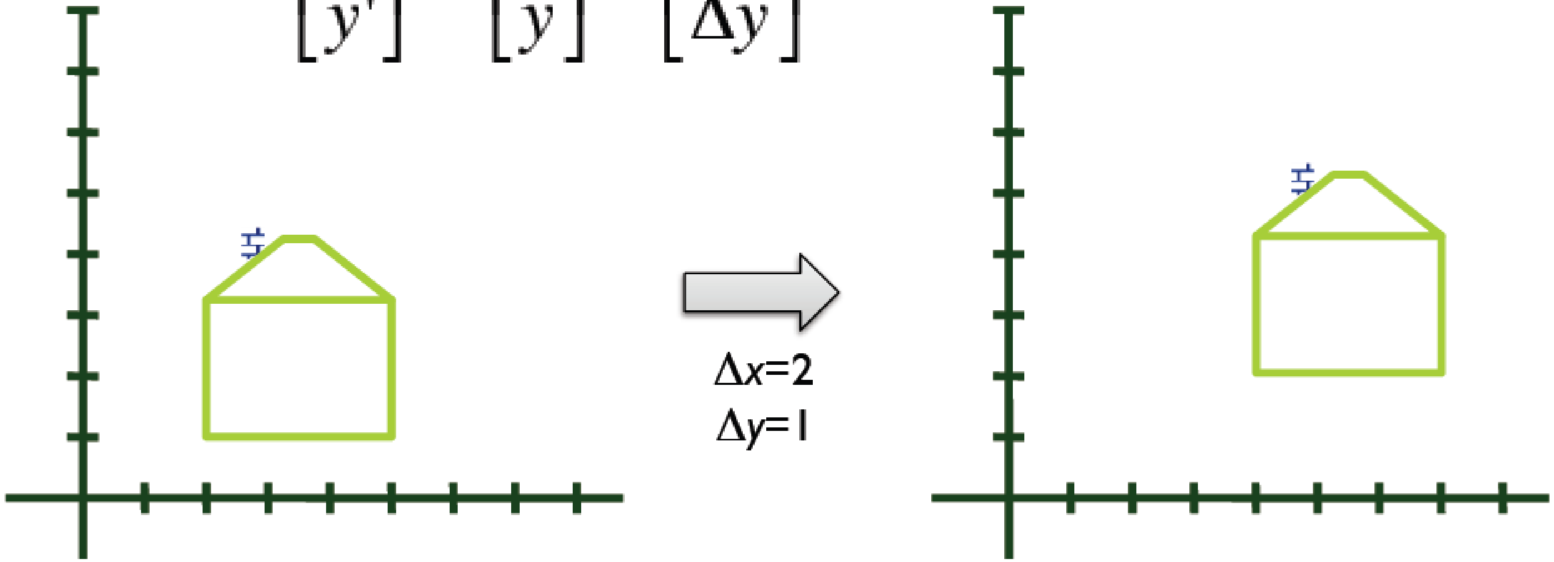
Translação

- Significa movimentar o objeto

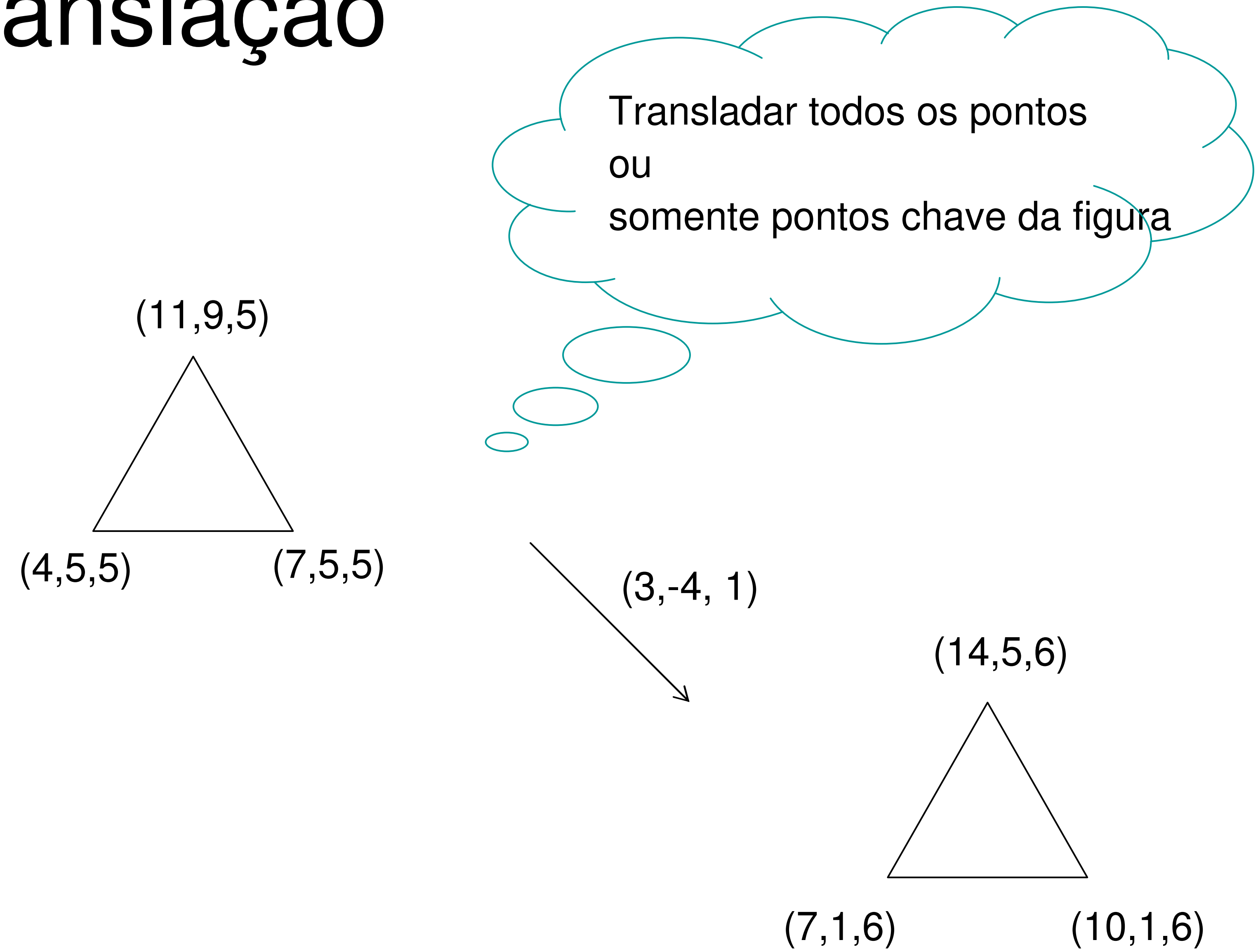
- Todos os pontos do objeto devem ser movidos para a nova posição.
  - Um ponto P (x,y,z) é movido para a posição P' (x',y',z').
  - Para isso somamos Tx , Ty e Tz às coordenadas de cada ponto a ser transladado.
  - $x' = x + Tx$
  - $y' = y + Ty$
  - $z' = z + Tz$
  - Ou usando um **vetor T de deslocamento**.
    $P' = P + T \rightarrow [x' , y' , z'] = [x , y , z] + [Tx , Ty , Tz]$

Translação dos vetores ou pontos do objeto

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$



Translação


Transladar todos os pontos
ou
somente pontos chave da figura
(11,9,5)
(4,5,5)
(7,5,5)
(3,-4, 1)
(14,5,6)
(7,1,6)
(10,1,6)

Escala

- Significa mudar o tamanho do Objeto

- Multiplica os valores das coordenadas por **constantes uniformes** ou não .

- Um ponto P (x,y,z) passa para a posição P' (x',y',z').

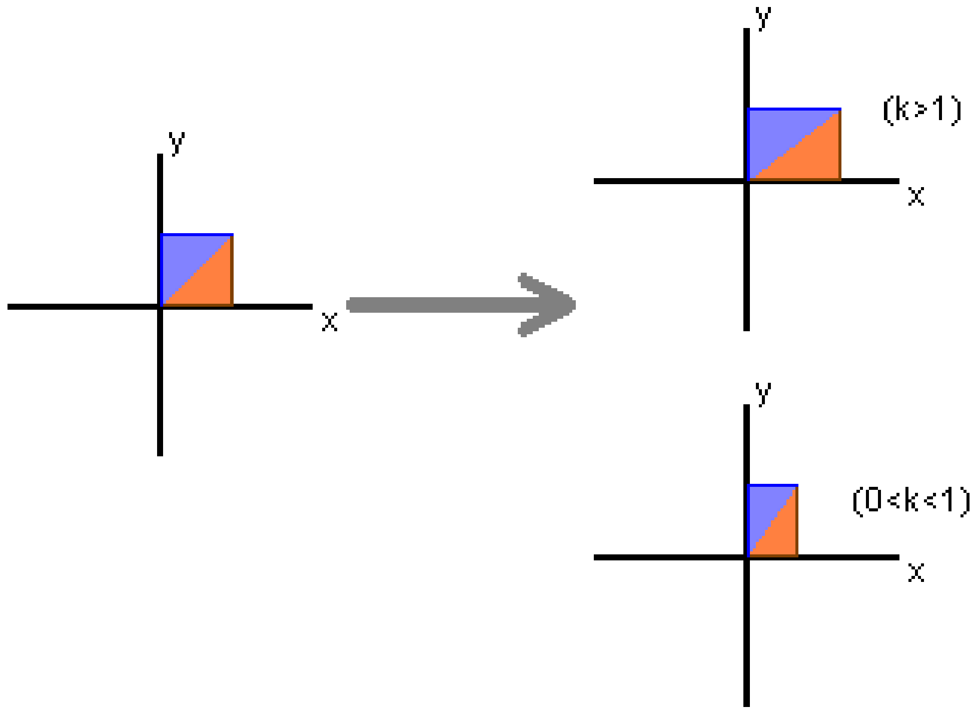
Quando aplicada em todos os n pontos de um objeto muda a sua proporção nas diversas direções

$x' = x.Sx$
$y' = y.Sy$
$z' = z.Sz$

ou

$$[x \;\; y \;\; z] \begin{pmatrix} Sx & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 \\ 0 & 0 & Sz \end{pmatrix} = [xSx \;\; ySy \;\; zSz]$$

Mudança de Escala em uma direção (horizontal)



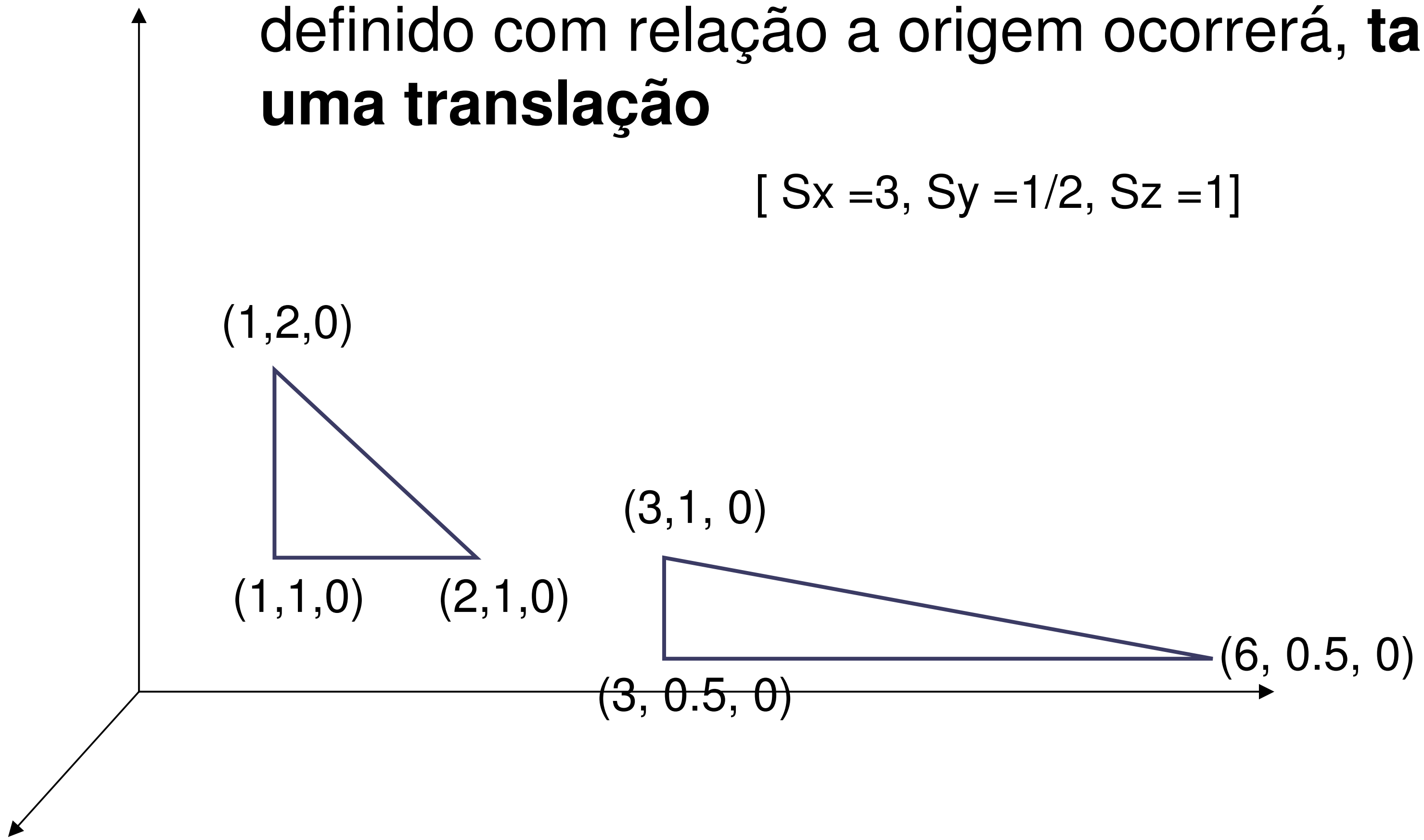
$$S_x = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Escala

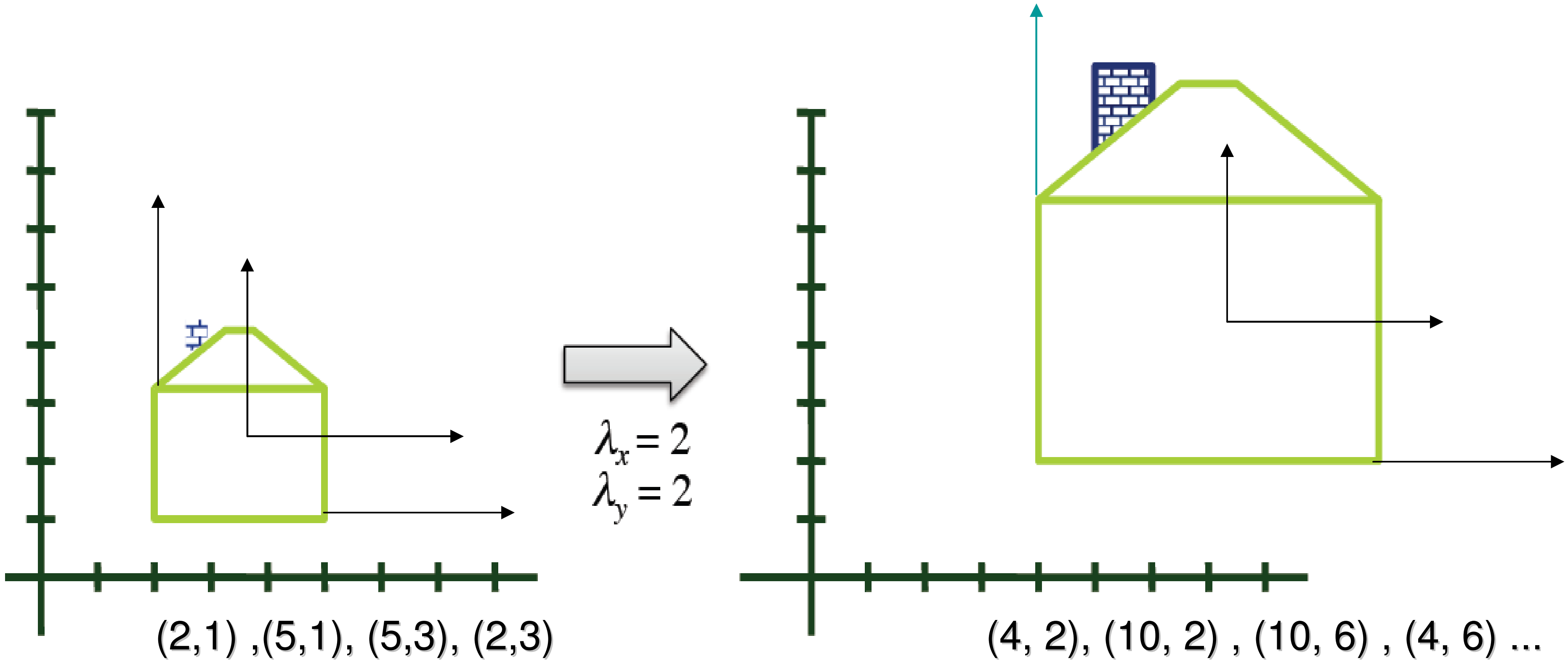
Quando aplicado em todos os n pontos de um objeto a sua proporção nas diversas direções

*Obs: se o objeto escalonado **não estiver** definido com relação a origem ocorrerá, **também, uma translação**

[Sx =3, Sy =1/2, Sz =1]

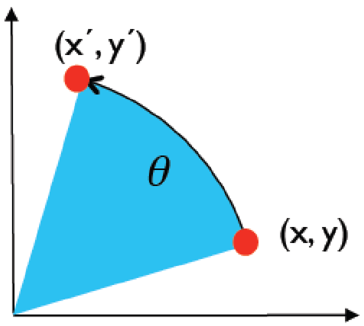


Mudança de escala

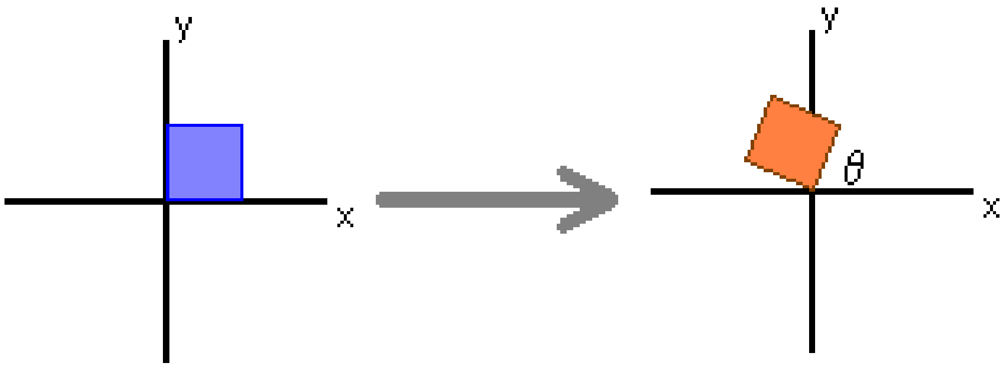


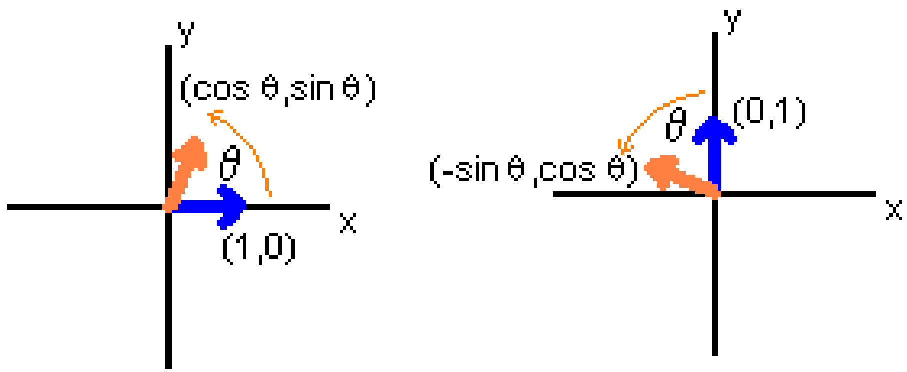
Quando o objeto está na origem do sistema de eixos, ai então, só muda a sua proporção nas diversas direções, mas se ele esta fora da origem....

Rotação em torno da origem



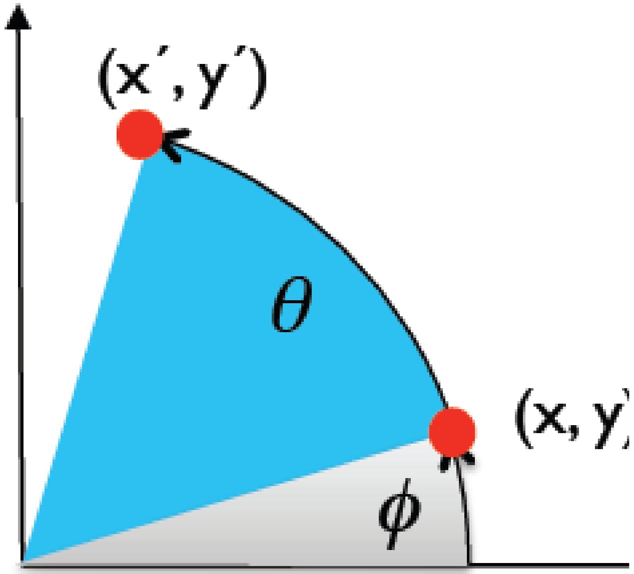
$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$





Como esse chegou a essa fórmula:

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$$



$$\begin{cases} x' = r\cos(\phi + \theta) \\ y' = r\sin(\phi + \theta) \end{cases}$$

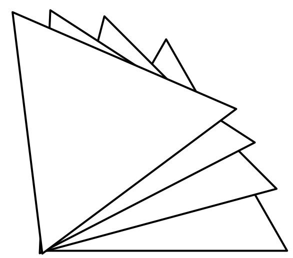
$$\begin{cases} x' = r\cos\phi\cos\theta - r\sin\phi\sin\theta \\ y' = r\cos\phi\sin\theta + r\sin\phi\cos\theta \end{cases}$$

Substituindo r cos(ϕ) e r sin(ϕ) por x e y nas equações anteriores tem-se:

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

Rotação

- Girar um ponto 2D em torno da origem do sistema de eixos.
  $x' = x \cos(\theta) - y \,\mathrm{sen}(\theta)$
  $y' = y \cos(\theta) + x\,\mathrm{sen}(\theta)$



$$[x' \ y'] = [x \ \ y] \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\theta \\ -\mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

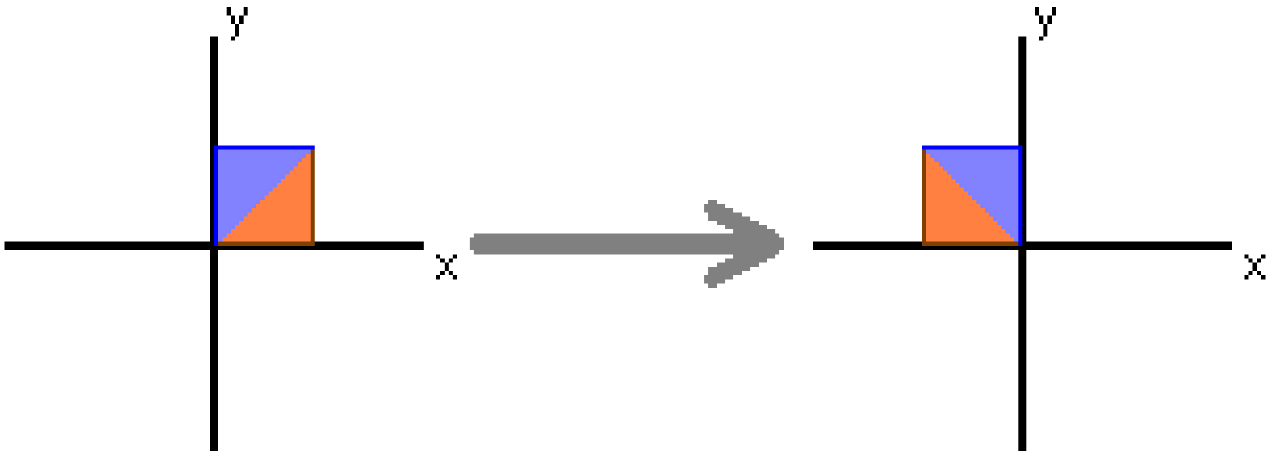
*Obs: se o objeto **não estiver definido na origem do sistema de coordenadas ocorrerá também uma translação**

Composição de Transformações

- Quando for necessário transformar um objeto em relação a um ponto ***P*** arbitrário:
  - Translada-se ***P*** para origem.
  - Aplicam-se uma ou mais transformações lineares elementares (na ordem adequada).
  - Aplica-se a translação inversa: ***-P***

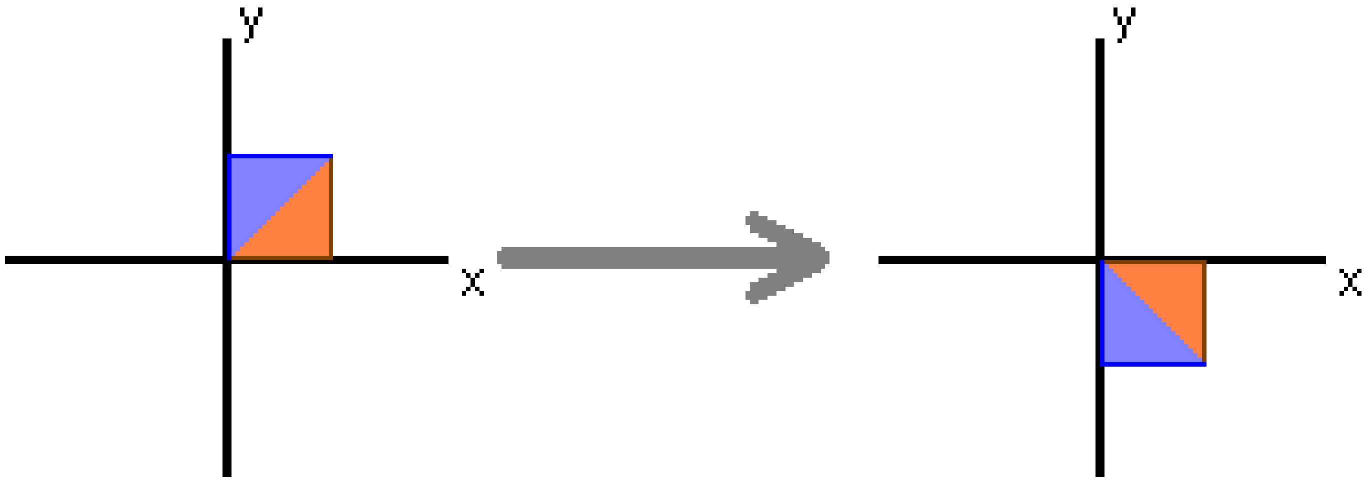
Reflexão em Relação ao Eixo Y

$$Rfl_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



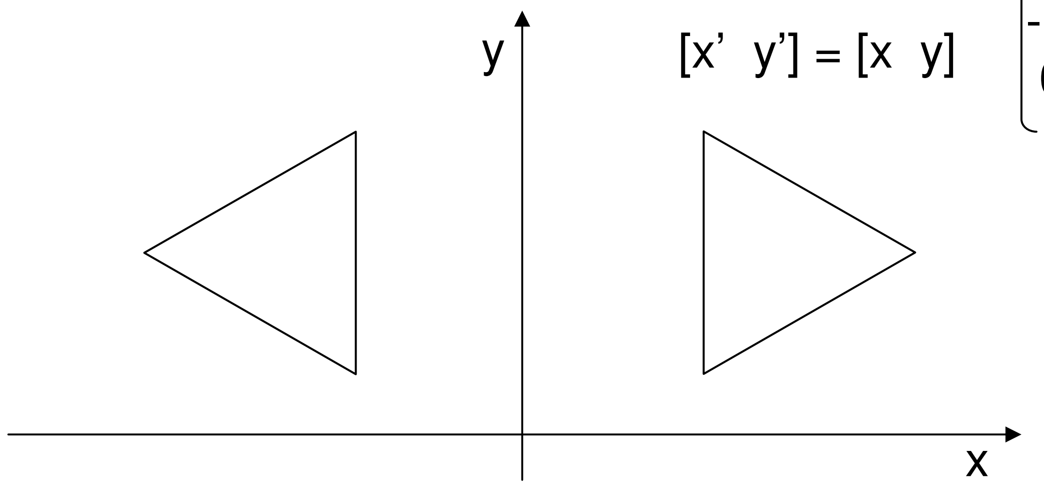
Reflexão em Relação ao Eixo X

$$Rfl_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



Reflexão

- A reflexão em torno de um eixo (flip) faz com que um objeto seja reproduzido como se ele fosse visto dentro de um espelho.

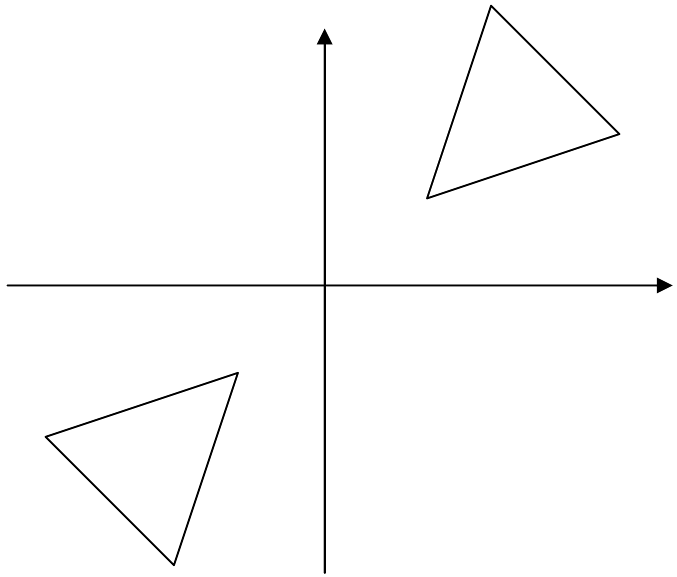


$$[x' \;\; y'] = [x \;\; y] \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reflexão

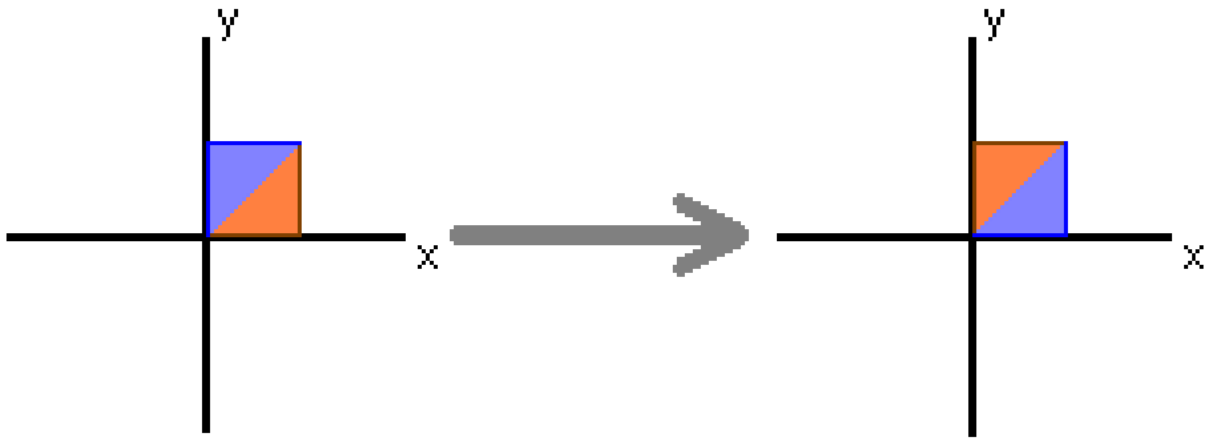
- Em 3D a reflexão pode ser em torno de um dos 3 planos.
- Ex. Reflexão em torno de x e y:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



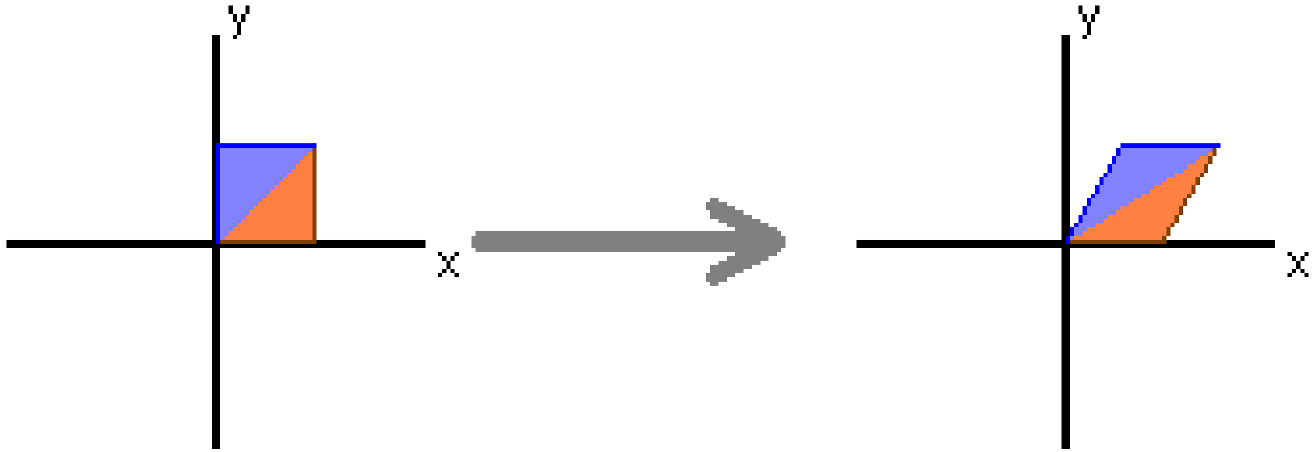
Reflexão em Relação à Reta $y = x$

$$Rfl_{y=x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

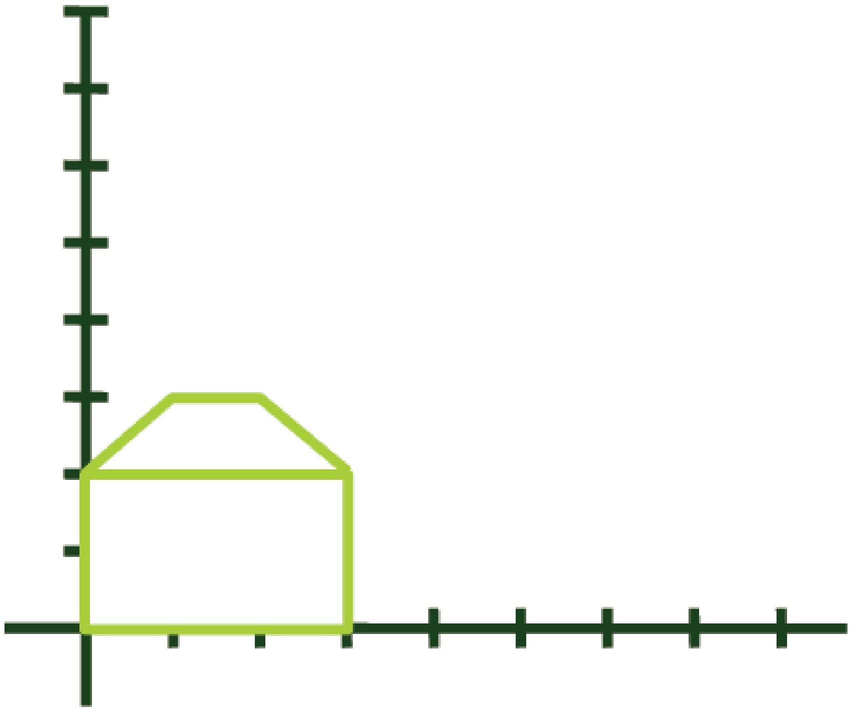


Cisalhamento em X

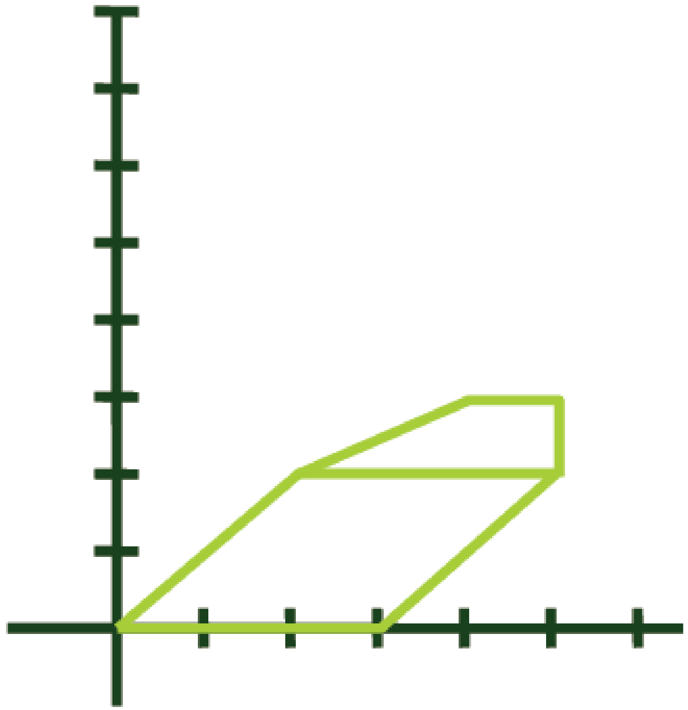
$$C_x = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Cisalhamento na horizontal (em x) :



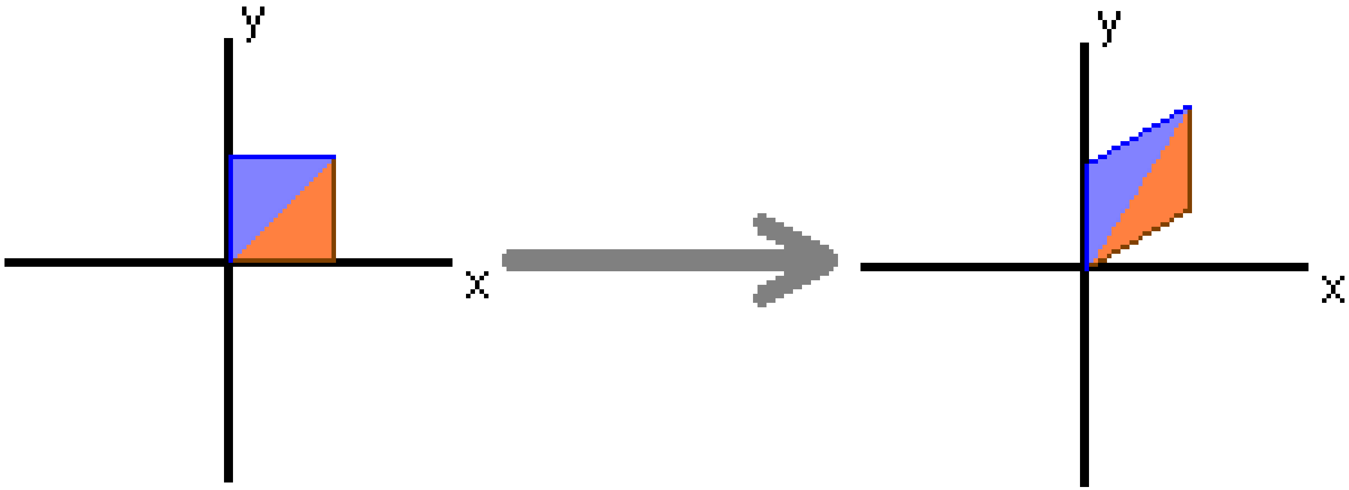
$\kappa_x = 1$
$\kappa_y = 0$



$$\begin{cases} x' = x + \kappa_x y \\ y' = y + \kappa_y x \end{cases}$$

Cisalhamento na vertical (em y)

$$C_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$



Como fica o cisalhamento em ambas as direções?

1	k´
k´´	1

TODAS AS Transformações Lineares Bidimensionais

- 2D
- São representadas por matrizes 2 x 2 ?

$$T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy \\ bx+dy \end{pmatrix}$$

Transformações de corpo rígido

- Que não mudam a distancia entre dois pontos do objeto são chamadas de

  Transformações de corpo rígido

- Quais seria elas?

- As transformações que preservam ângulo entre 2 reta do corpo são chamadas conformes. Quais seria elas?

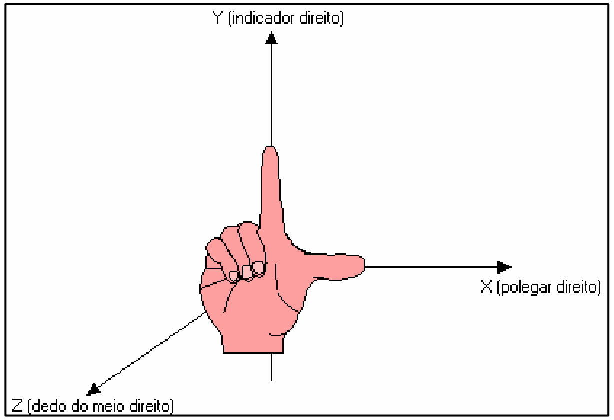
Transformações de corpo rígido

- Translação

- Reflexão

- Rotação
  - **Ângulos de Euler** em torno de um dos eixos das coordenadas, ou de qualquer eixo

Rotação em torno de um eixo



- Ângulos de Euler
- Regra da mão direita
  - **Dedão** esticado no sentido do eixo (eixo x)
  - Dedo **indicador** apontando para segundo eixo (eixo y)
  - Feixe a mão e veja se ela **aponta** no sentido do **terceiro eixo**, se isto acontecer significa que as três direções formam um **sistema de eixos positivos**

α

Rotação em 3D

Eixo z => inalterado

$$[x' \; y' \; z'] = [x \;\; y \;\; z] \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \mathrm{sen}(\alpha) & 0 \\ -\mathrm{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$[x\cos(\alpha) - y\,\mathrm{sen}(\alpha) \quad x\,\mathrm{sen}(\alpha) + y\cos(\alpha) \quad z\,]$

Eixo x => inalterado

$$[x' \; y' \; z'] = [x \;\; y \;\; z] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & \mathrm{sen}(\beta) \\ 0 & -\mathrm{sen}(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

$[\,x \quad y\cos(\beta) - z\,\mathrm{sen}(\beta) \quad y\,\mathrm{sen}(\beta) + z\cos(\beta)\,]$

Eixo y => inalterado

$$[x' \; y' \; z'] = [x \;\; y \;\; z] \begin{pmatrix} \cos(\delta) & 0 & -\mathrm{sen}(\delta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{sen}(\delta) & 0 & \cos(\delta) \end{pmatrix}$$

$[\,x\cos(\delta) + z\,\mathrm{sen}(\delta) \quad y \quad -x\,\mathrm{sen}(\delta) + z\cos(\delta)\,]$

Escopo de Transformações

- Podem ser feitas em serie e a aplicadas uma só fez como uma única (a matriz de transformação de uma serie)

  – Essa operação de transformação nem sempre é comutativa !!!

- A ordem é muito importante !!

Coordenadas Homogêneas

- Reflexão, rotação e escala podem ser executadas com o uso de matrizes
- Mas a transformação de translação não.
- Para solucionar esse e outros problemas é recomendado o uso de **coordenadas homogêneas** para todas as operações.

Coordenadas homogêneas

- no R^2 é um elemento do R^3 com uma relação de escala. $P = (x, y, \lambda); \lambda \neq 0, (x/\lambda, y/\lambda, 1)$

- Um ponto do plano é definido como:
  - Chamado $P = [x, y, 1]$ em coordenadas homogêneas (uma classe de equivalência).

As matrizes anteriores em coordenadas homogêneas

- Devem ser 3 x 3 para as mesmas transformações afins bidimensionais.

$$M = \begin{pmatrix} a & c & m \\ b & d & n \\ p & q & s \end{pmatrix}$$

Matriz de Translação

$$M=\begin{pmatrix}1 & 0 & m\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+m\\ y+n\\ 1\end{pmatrix}$$

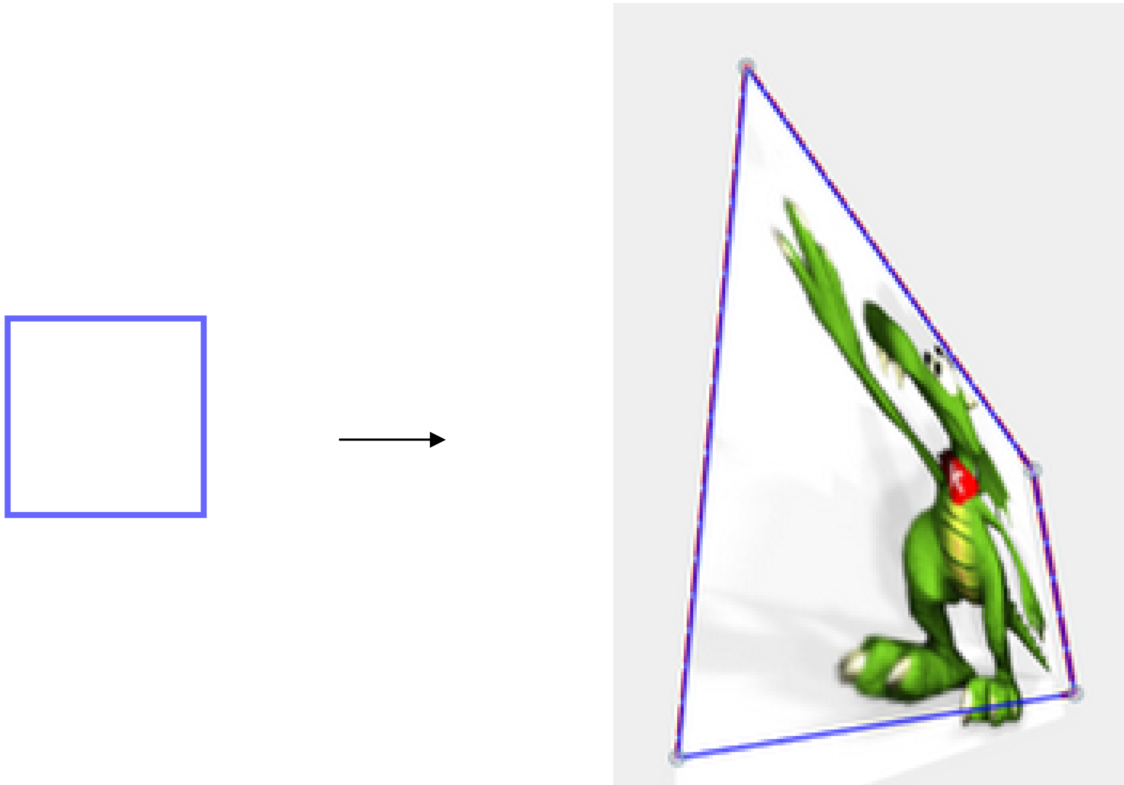
E as demais Transformações Lineares

$$M = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy \\ bx+dy \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformação Perspectiva

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ p & q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ px+qy+1 \end{pmatrix}$$

Transformação Perspectiva 2D



Efeito em um ponto no infinito

$$M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ p & q & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ px+qy\end{pmatrix}$$

Pontos de Fuga

- Um **ponto no infinito** pode ser levado em um ponto P_0 do plano afim.

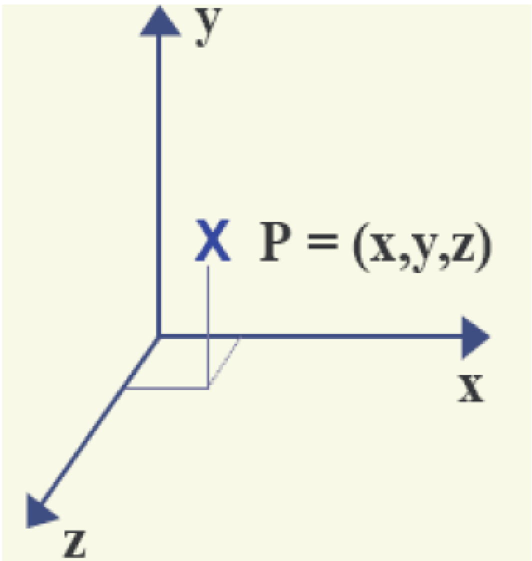
- Família de **retas paralelas** que se intersectam no infinito são transformadas numa família de **retas incidentes em P_0**.
  - P_0 é chamado de **ponto de fuga**.
  - Ponto de fuga principal corresponde a uma direção paralela aos eixos coordenados.
    - Imagem de $[x,0,0]$ ou $[0,y,0]$.

Espaço 3D

- Um ponto do espaço 3D é definido como:

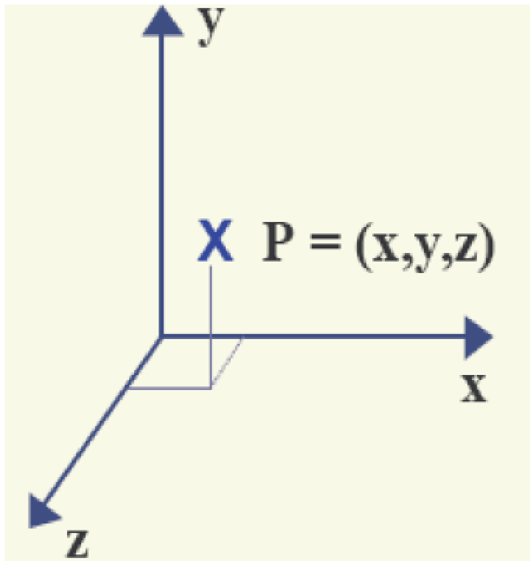
$$P = \{(x, y, z, \lambda); \lambda \neq 0, (x/\lambda, y/\lambda, z/\lambda, 1)\}$$

  - Denotado por $P = [x, y, z, w]$ em coordenadas homogêneas.



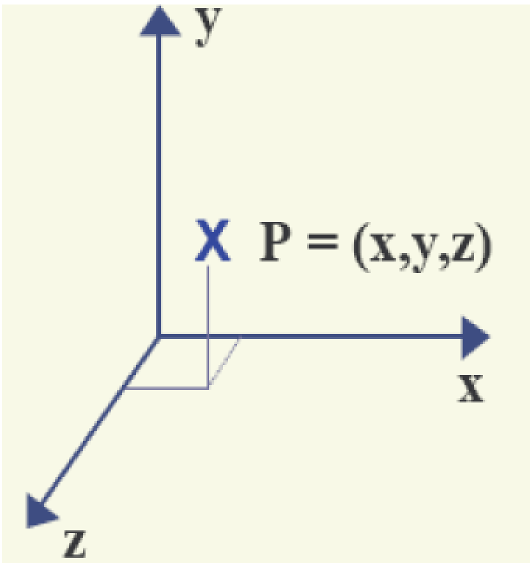
Translação no Espaço 3D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

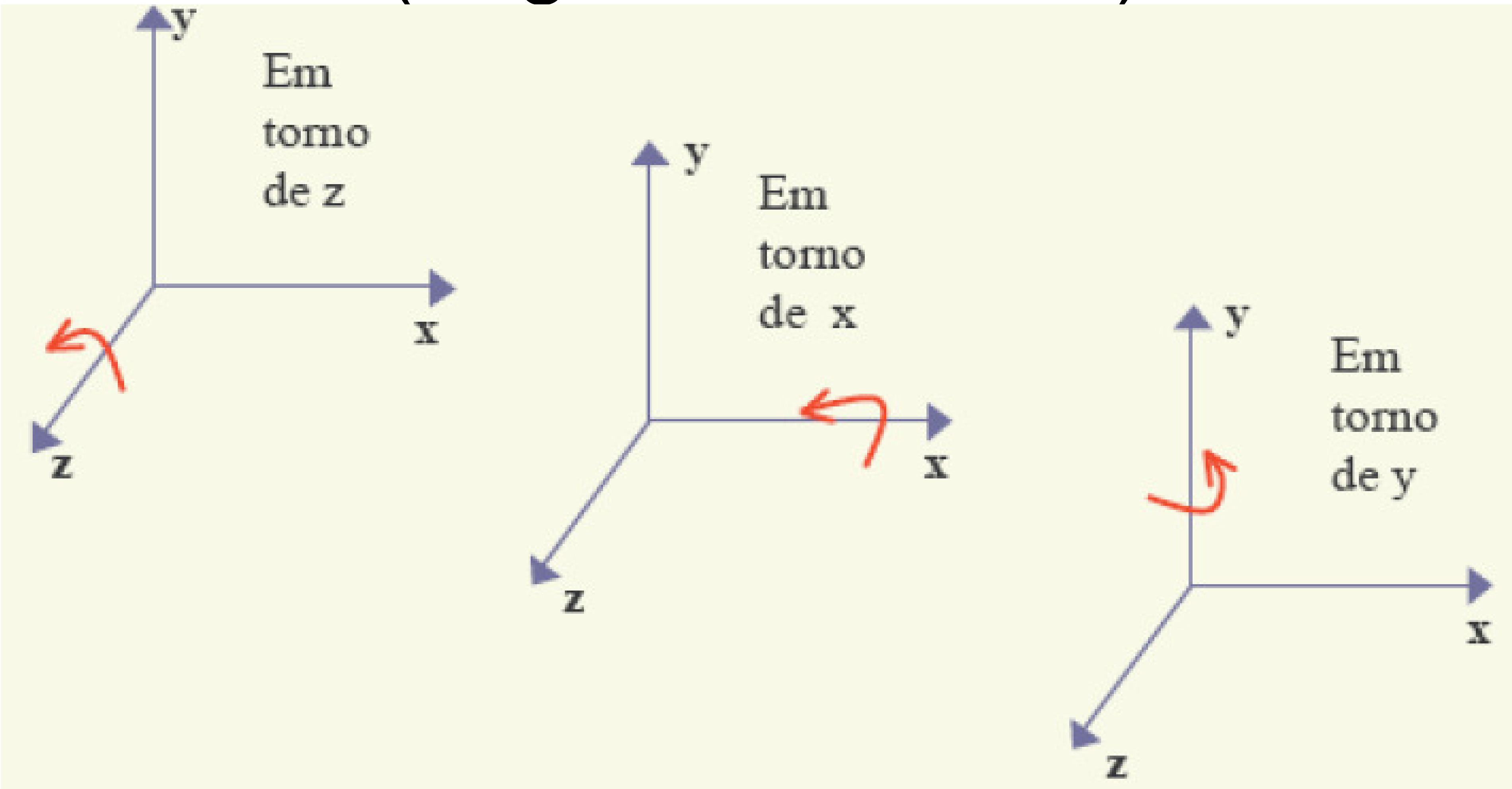


Escala em torno da origem do Espaço 3D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



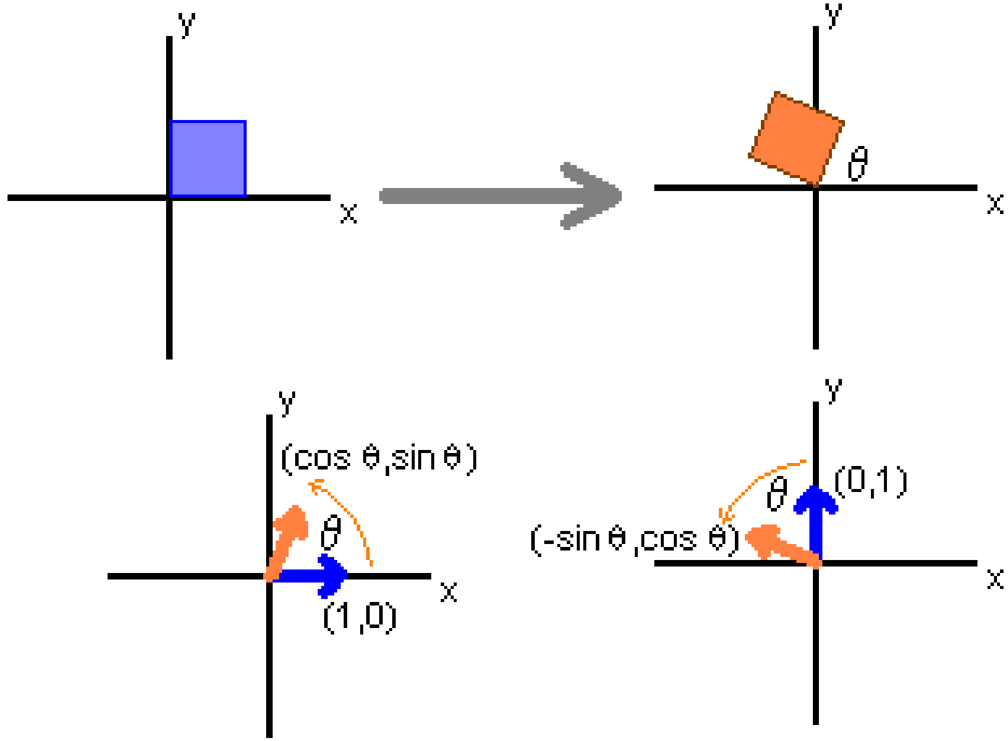
Rotações no Espaço 3D
(ângulos de Euler)



Em torno de Z

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

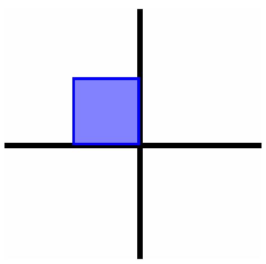
Quando só tenho componente **y**
E giro em torno de **z,** passo a ter uma
Coordenada **x**, negativa
Ou seja do outro lado da origem do Espaço 3D. Assim a coluna 2 da matriz tem que ter um negativo na posição correspondente.

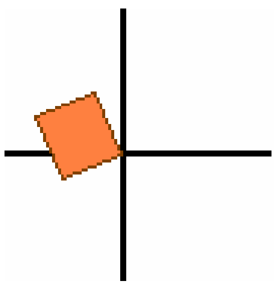


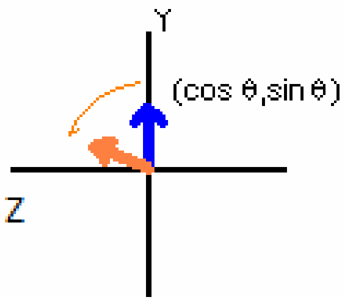
Em torno de X

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Quando só tenho componente **y** **e** rodo em torno de **x**, passo a ter para o ponto só coordenadas positivas . Ou seja na segunda coluna tudo será positivo. Mas veja que nesta orientação do Espaço 3D, quando se desenha em 2D , o Z positivo esta contrario de um X positivo usual em 2D



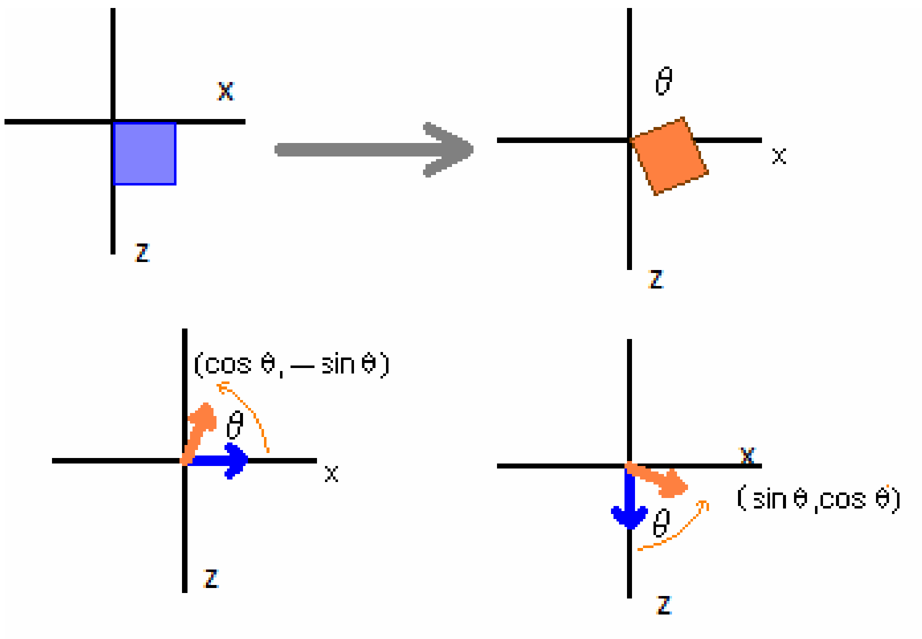




Em torno de Y

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Quando só tenho componente x e rodo em torno de y, passo a ter uma coordenada x, negativa. Ou seja do outro lado da origem do Espaço 3D.



Ou seja na coluna 1 tem que ter negativo.

Veja que nesta orientação do Espaço 3D, quando se desenha em 2D , o Z positivo esta contrario de um y positivo usual em 2D

Coordenadas Homogêneas

- O sistema de coordenadas homogêneas (SCH) utiliza quatro valores para representar um ponto P no espaço, que será descrito por **(x', y', z', M).**
- A transformação do SCH para o cartesiano se dá pela relação **(x, y, z) = (x'/M, y'/M, z'/M)**
- Os pontos onde M=0 estão fora do espaço dimensional (infinito !!!!) .
- O uso de coordenadas homogêneas é importante em Computação também para permitir a representação de **reais por inteiros**
- Quando M=1 a representação é a mesma das coordenadas cartesianas usuais.

Matrizes em coordenadas homogêneas na **forma de vetores linha** precisa usar a **transporta !!**

$$[x \quad y \quad z \quad 1] \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matriz de rotação

$$[x \quad y \quad z \quad 1] \cdot \begin{pmatrix} Sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot \begin{pmatrix} Sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Escala

Translação

- Pode ser representada por operações com matrizes quando usamos coordenadas homogêneas, uniformizando as transformações geométricas

$$[x \quad y \quad z \quad 1] . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ Tx & Ty & Tz & 1 \end{pmatrix}$$

Isso na forma de vetor linha mas na forma de vetores colunas ficaram como transpostas como mostrado nas paginas anteriores...

Matriz de Transformação

- Transformações geométricas correspondem a operações de soma e multiplicação nas coordenadas que compõem o objeto
- Para evitar que diversas operações matemáticas sejam feitas individualmente em cada vértice é criada uma **matriz de transformação com coordenadas homogêneas a qual é aplicada todas as transformações**
- Esta matriz é denominada matriz de transformação corrente e é utilizada para transformação de todos os objetos

Relembrando Transformações

- De corpo rígido (semelhança).
  - Distância entre 2 pontos quaisquer é inalterada.
  - Ângulos entre vetores é inalterado.
  - Rotações, reflexões e translações

  - Matrizes elementares associadas a efeitos