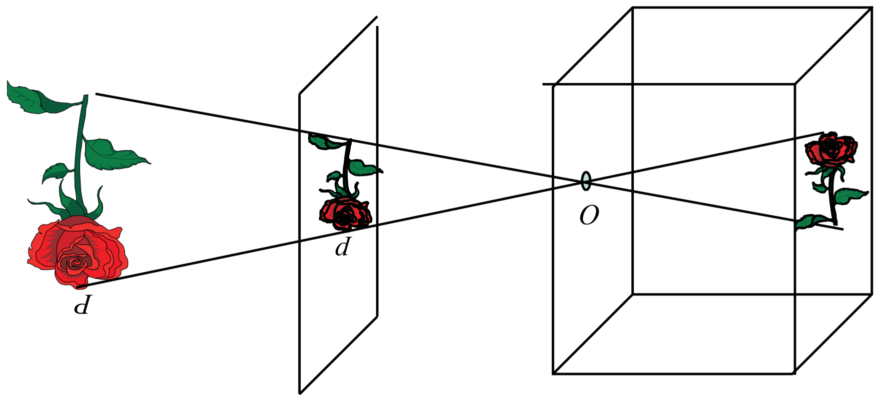
http://computacaografica.ic.uff.br/conteudocap2.html

aula 6

2018/2 – IC / UFF

Como representar objetos 3D em dispositivos 2D?

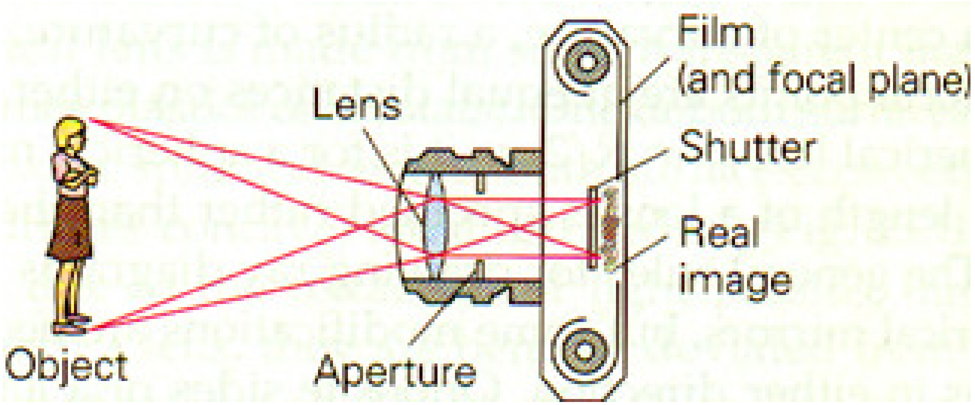
Projeções Planas



2018/2 – IC / UFF

aula 6:

Projeções Planas



Material disponível no site do curso:
curso de **C.G.** - TCC 00.291 - IC/**UFF**
http://www.ic.uff.br/~aconci/CG.html

Nos seguintes arquivos pdf:
Transformando3D porjecoes.pdf

Projecoes.pdf

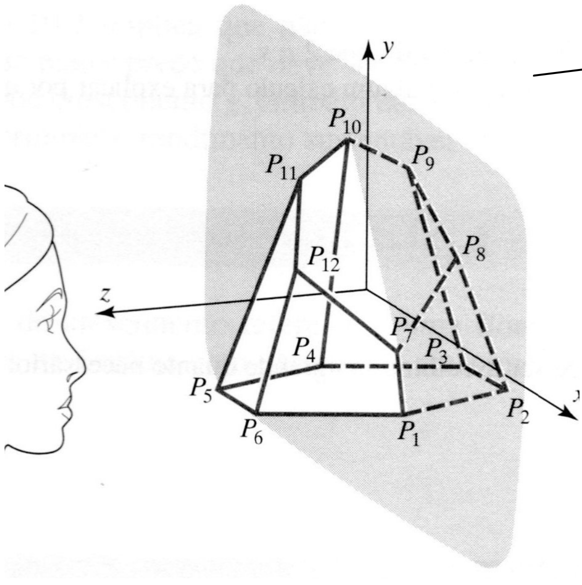
Aula-6.pdf – 2014/2

CG-Aula9-2016.pdf
Transformando3D porjecoes.pdf

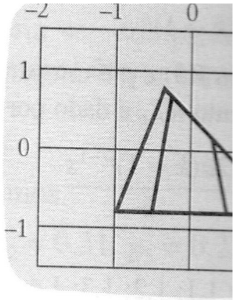
CG-Aula6-2017.pdf

Um objeto é um conjunto de pontos no espaço 3D

Já vimos como definir essa objeto pela sua topologia e geometria e como transformá-lo transformado todos os seus pontos a partir de seus vértices



P_1 : (1,000; – 0,800; 0,000), P_2 : (0,500; – 0,800; – 0,866),
P_3 : (– 0,500; – 0,800; – 0,866), P_4 : (– 1,000; – 0,800; 0,000),
P_5 : (– 0,500; – 0,800; 0,866), P_6 : (0,500; – 0,800; 0,866),
P_7 : (0,840; – 0,400; 0,000), P_8 : (0,315; 0,125; – 0,546),
P_9 : (– 0,210; 0,650; – 0,364), P_{10} : (– 0,360; 0,800; 0,000),
P_{11} : (– 0,210; 0,650; 0,364), P_{12} : (0,315; 0,125; 0,546)



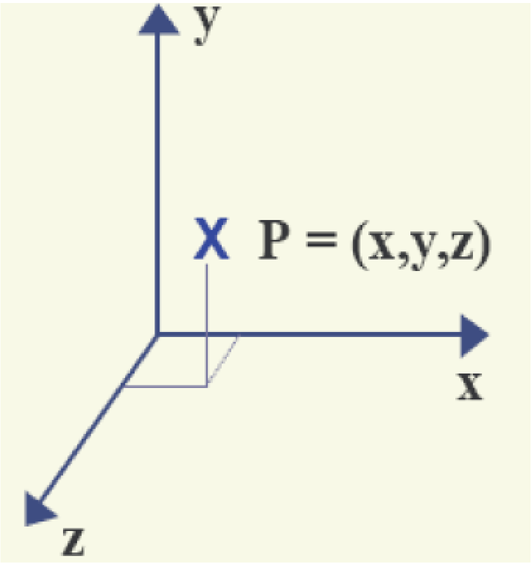
Coordenadas Homogêneas

- Reflexão, rotação e escala podem ser executadas com o uso de matrizes
- Mas a transformação de translação não.
- Para solucionar esse e outros problemas é recomendado o uso de **coordenadas homogêneas** para todas as operações.

Coordenadas Homogêneas

- O **sistema de coordenadas homogêneas** (SCH) utiliza quatro valores para representar um ponto P no espaço, que será descrito por **(x', y', z', M).**
- A transformação do SCH para o cartesiano se dá pela relação **(x, y, z) = (x'/M, y'/M, z'/M)**
- Os pontos onde M=0 estão fora do espaço dimensional (infinito !!!!) .
- O uso de coordenadas homogêneas é importante em Computação também para permitir a representação de **reais por inteiros**
- Quando M=1 a representação é a mesma do espaço cartesiano.

Espaço 3D



Um ponto do espaço 3D

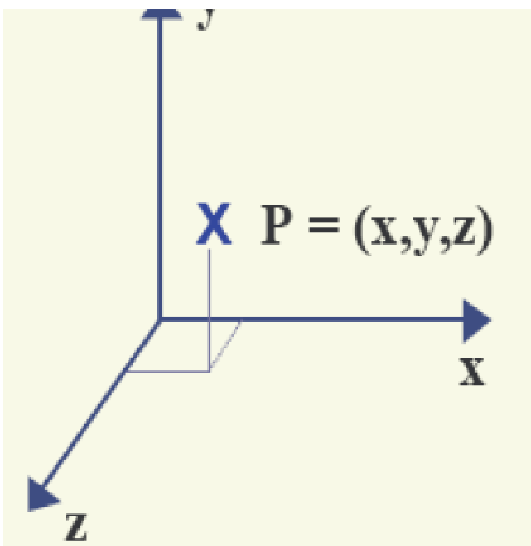
É denotado por $P = [x,y,z,w]$ em coordenadas homogêneas.

- ou

$$P = \{ (x,y,z,\lambda) ; \lambda \neq 0, (x/\lambda, y/\lambda, z/\lambda, 1) \}$$

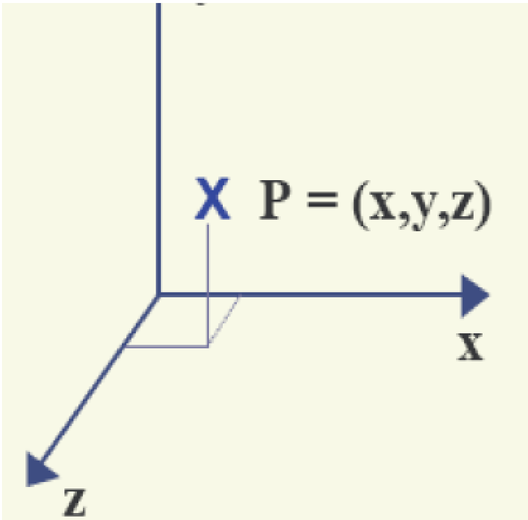
Translação no Espaço 3D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

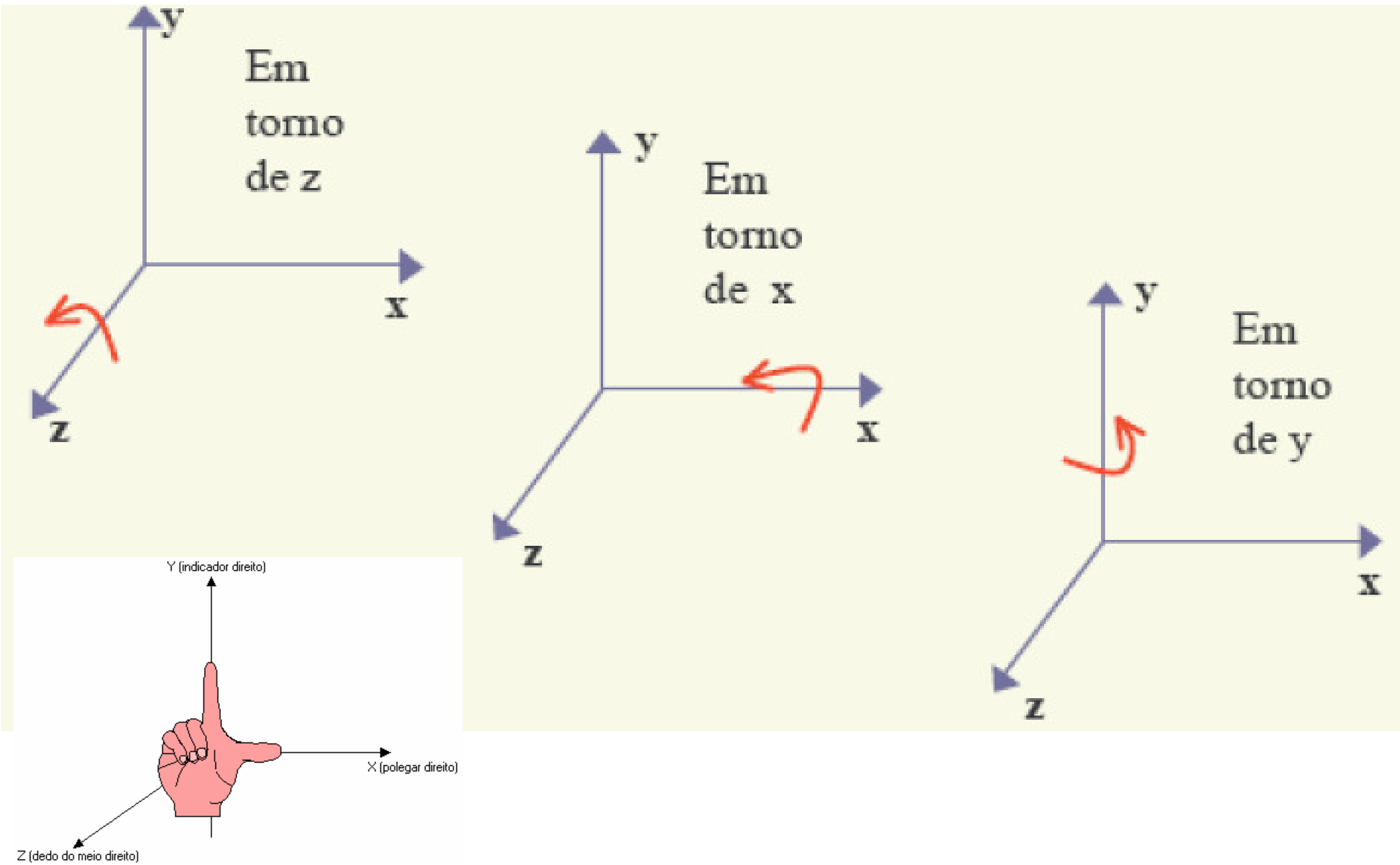


Escala em torno da origem no Espaço 3D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

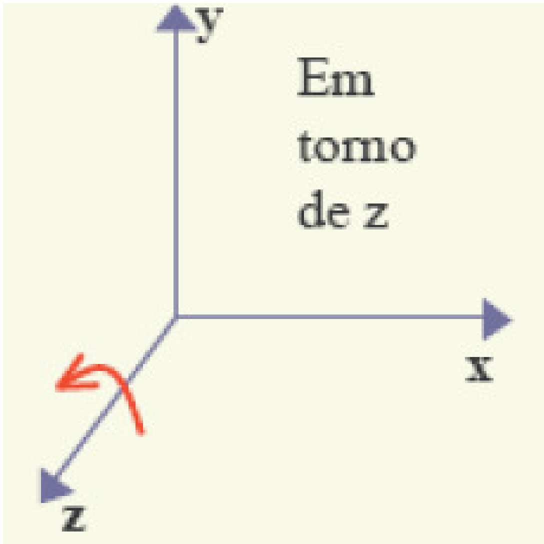


Rotações no Espaço 3D
(ângulos de Euler – regra da mão direita)



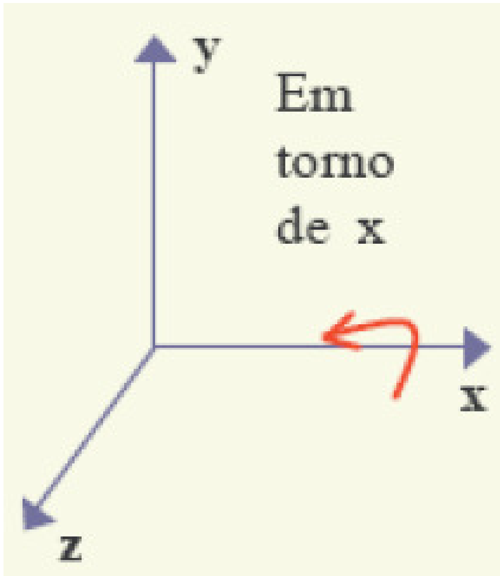
Em torno de Z

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



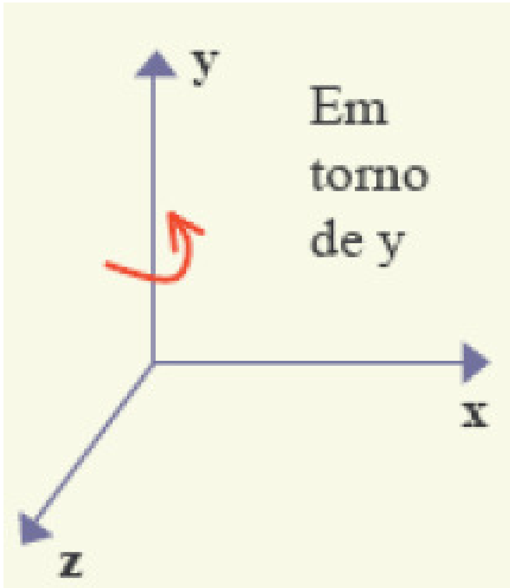
Em torno de X

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



Em torno de Y

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

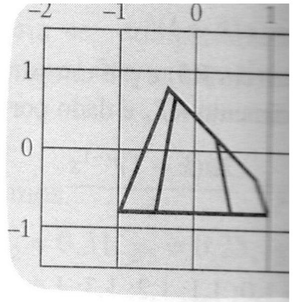


Transformações

- De corpo rígido (semelhança).
  - Distância entre 2 pontos quaisquer é inalterada.
  - Ângulos entre vetores é inalterado.
  - Rotações, reflexões e translações

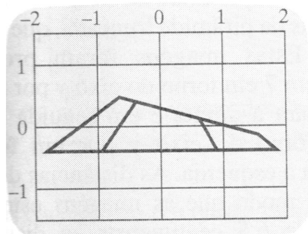
  - Matrizes elementares associadas a efeitos são geralmente combinadas para fazer transformações complexas

Escala em torno da origem do espaço 3D

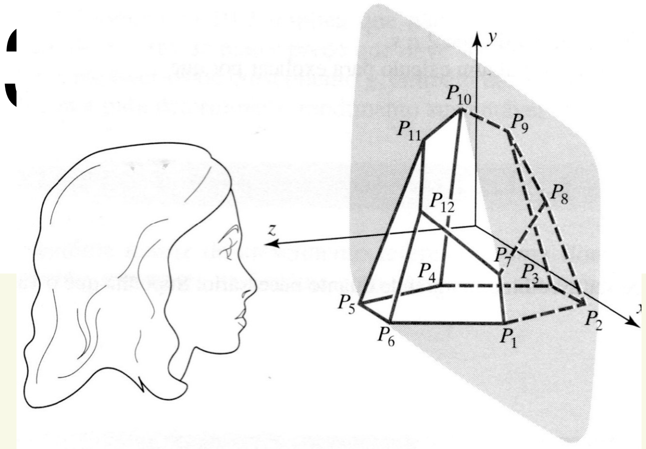


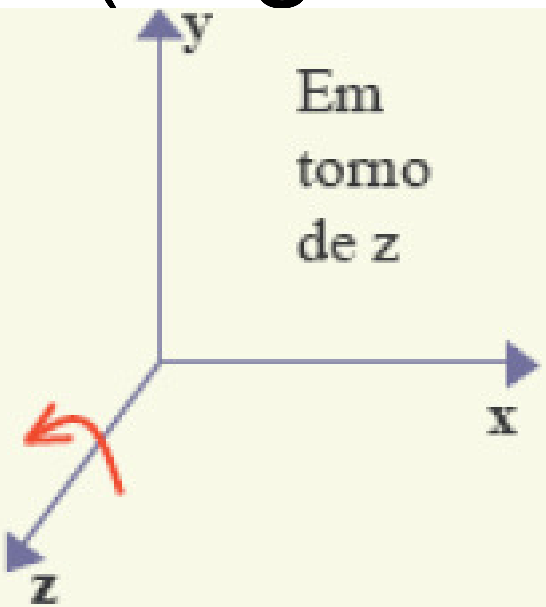
s_x=1,8 ; s_y=0,5 ; s_z=3,0

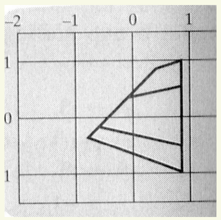
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

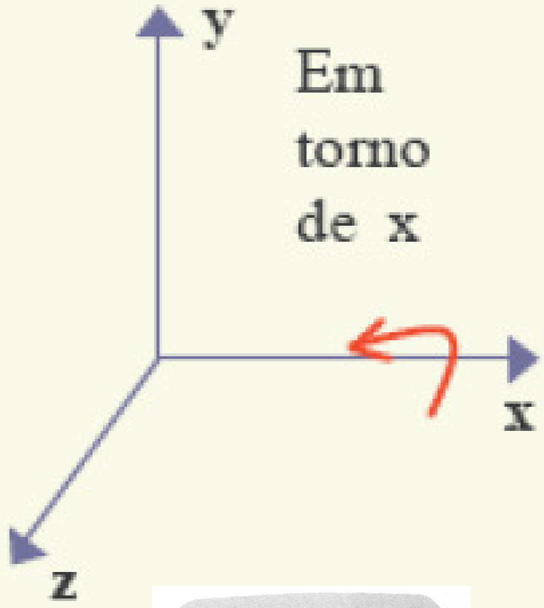


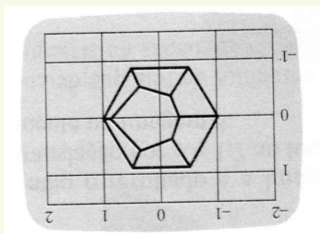
Rotações no Espaço 3
(ângulos de Euler)

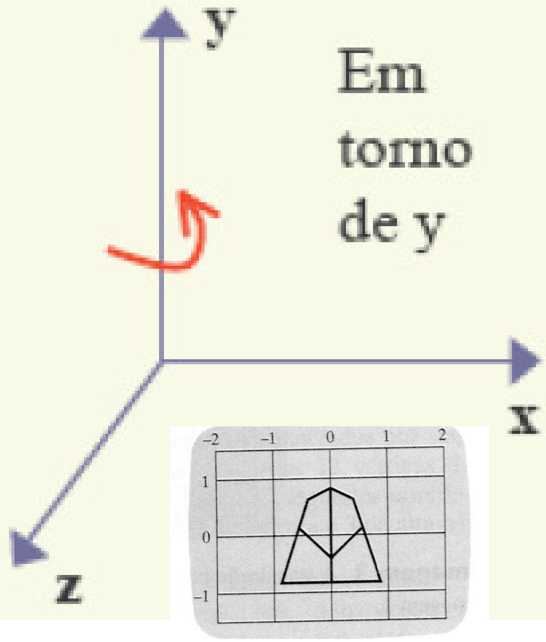












Em torno de Z

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Em torno de X

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

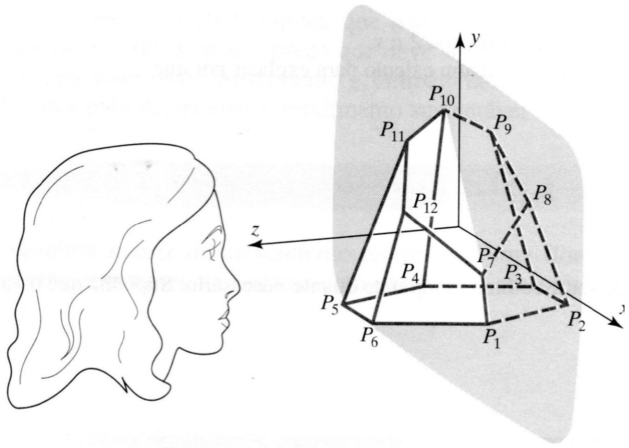
Em torno de Y

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

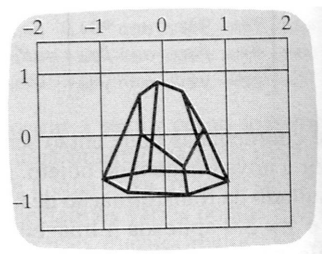
Matriz de Transformação final

- Para evitar que diversas operações matemáticas sejam feitas individualmente é criada uma **matriz de transformação pela multiplicação de toda em coordenadas homogêneas que pode fazer todas os efeitos (aplicar todas as transformações) de uma vez**
- Esta matriz é denominada **matriz de transformação corrente** e é utilizada para transformação de todos os vértices do objeto

Em torno dos 3 eixos



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



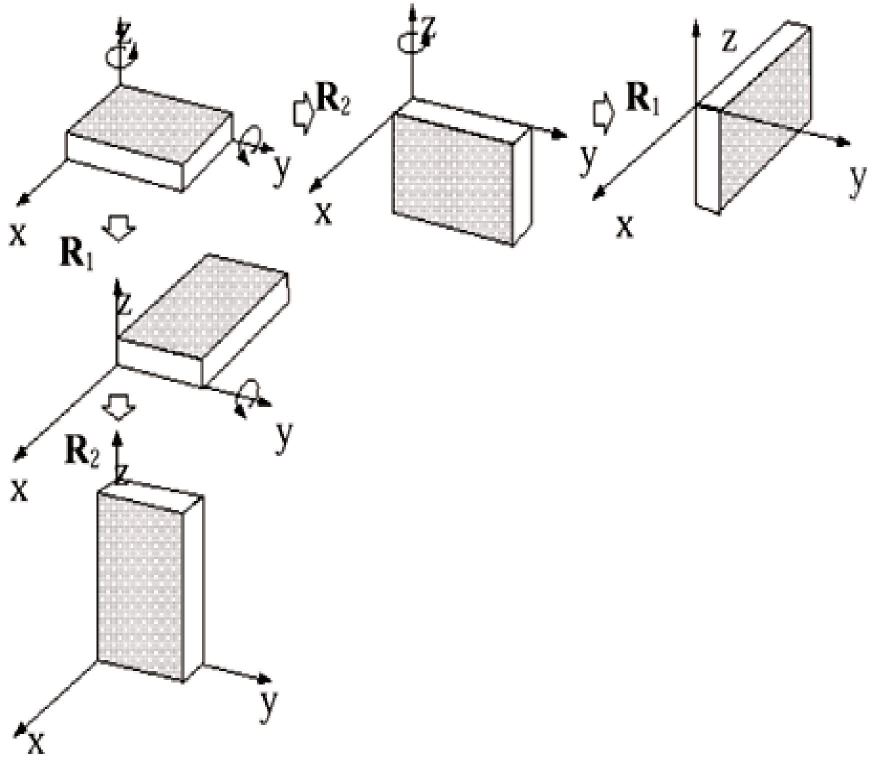
Escopo de Transformações

- Diversas podem ser feitas em serie e aplicadas de uma só fez, mas a ordem é muito importante

Pois as transformações nem sempre são comutativa !!!

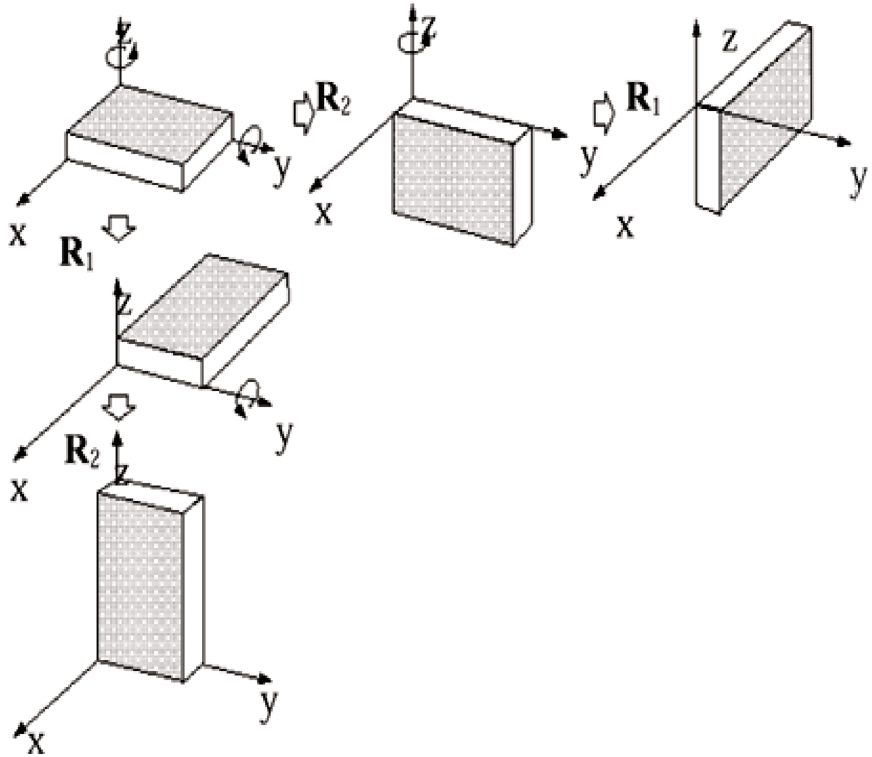
Por exemplo

Rotações não são comutativas!



A ordem é importante.

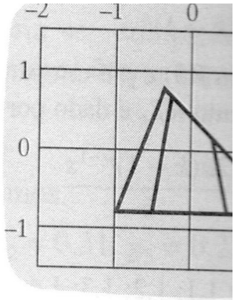
- Diversas transformações não são comutativas!

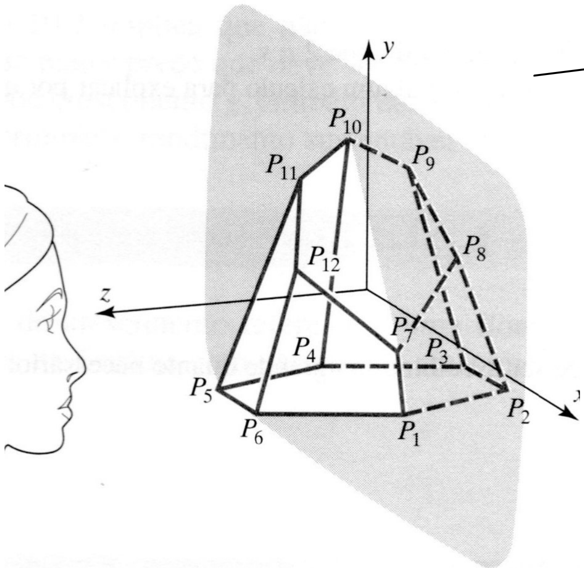


Mas como apresentar um objeto do espaço 3D na tela 2D?

A forma mais simples de representar um objeto 3D em 2D é simplesmente Descartar uma das suas coordenadas .

*Se os **eixos principais do objeto** forem paralelos aos **sistemas de eixos** considerados, e ainda se os **raios projetores forem paralelos aos eixos** e **perpendiculares** ao plano de projeção como ela fica ?*



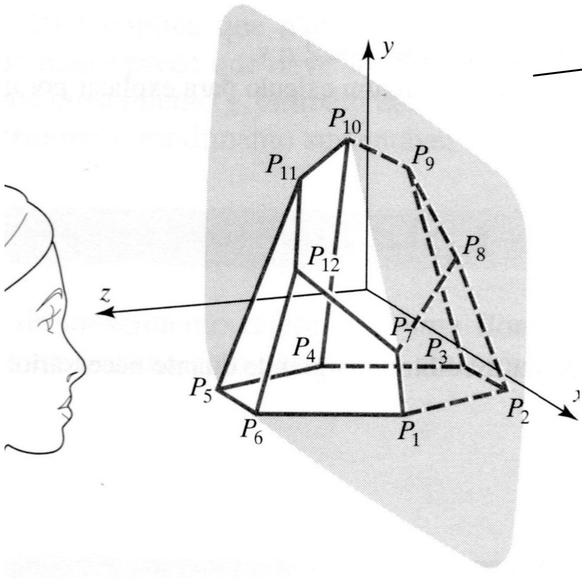


P_1 : (1,000; – 0,800; 0,000), P_2 : (0,500; – 0,800; – 0,866),
P_3 : (– 0,500; – 0,800; – 0,866), P_4 : (– 1,000; – 0,800; 0,000),
P_5 : (– 0,500; – 0,800; 0,866), P_6 : (0,500; – 0,800; 0,866),
P_7 : (0,840; – 0,400; 0,000), P_8 : (0,315; 0,125; – 0,546),
P_9 : (– 0,210; 0,650; – 0,364), P_{10} : (– 0,360; 0,800; 0,000),
P_{11} : (– 0,210; 0,650; 0,364), P_{12} : (0,315; 0,125; 0,546)

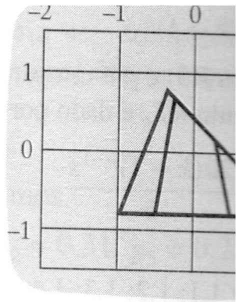
Um objeto no espaço 3D

*Pode ser visto desta forma se você o está vendo de frente em relação aos seus **eixos principais** e bastante longe para não ter o efeito de perspectiva.*

Este é um caso especial das projeções paralelas ortogonais ao plano de projeção , ou ORTOGRAFICAS

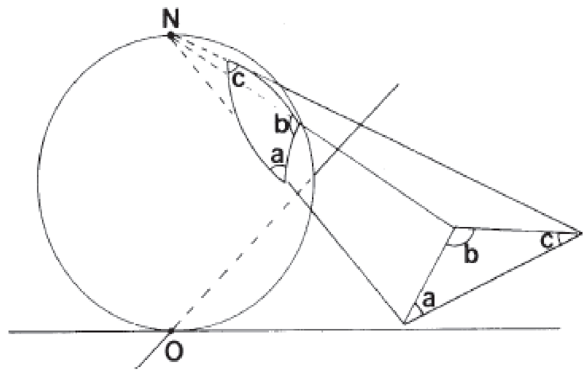


P_1 : (1,000; – 0,800; 0,000), P_2 : (0,500; – 0,800; – 0,866),
P_3 : (– 0,500; – 0,800; – 0,866), P_4 : (– 1,000; – 0,800; 0,000),
P_5 : (– 0,500; – 0,800; 0,866), P_6 : (0,500; – 0,800; 0,866),
P_7 : (0,840; – 0,400; 0,000), P_8 : (0,315; 0,125; – 0,546),
P_9 : (– 0,210; 0,650; – 0,364), P_{10} : (– 0,360; 0,800; 0,000),
P_{11} : (– 0,210; 0,650; 0,364), P_{12} : (0,315; 0,125; 0,546)



Projeções

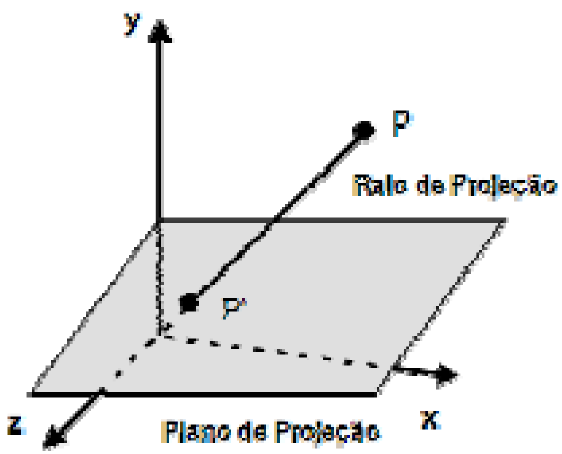
Mas a teoria de projeções é bem genérica e permite representar ***o objeto*** *em qualquer superfície mesmo não plana.*



Projeções planas:

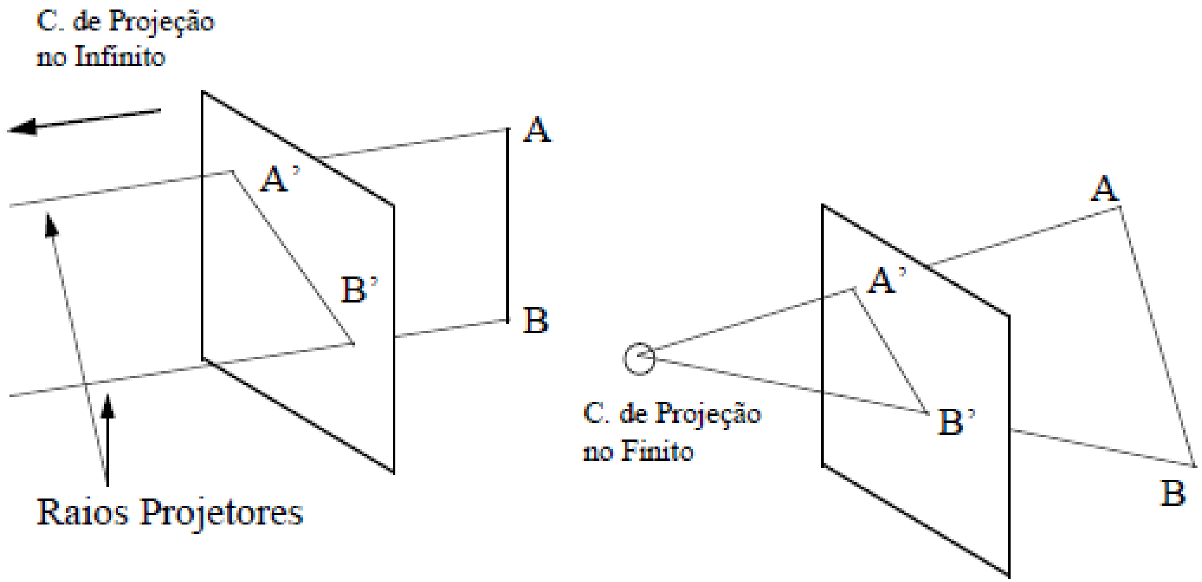
Elementos básicos:

- **Plano de projeção:** Superfície onde será projetado o objeto. Onde ele será representado em 2D;
- **Raios de projeção:** São as retas que passam pelos pontos do objeto e pelo centro de projeção;
- **Centro de projeção:** É o ponto fixo de onde os raios de projeção partem.



Classificação BÁSICA:

- Projeções paralelas e projeções perspectivas



Cada tipo de projeção

Tem casos de aplicação específicos nos quais são bem úteis.

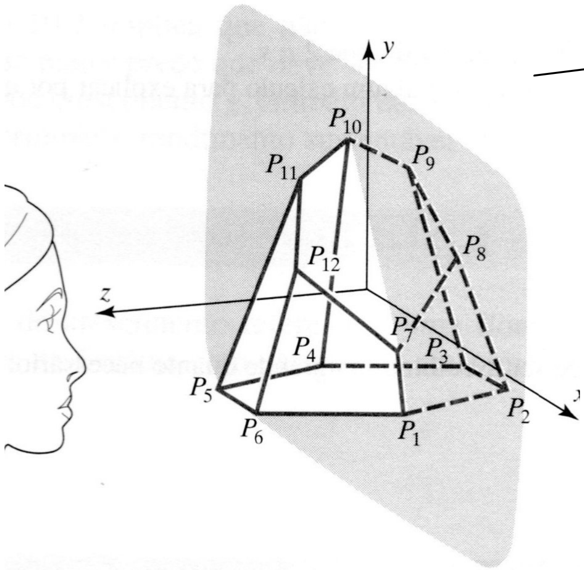
E elas serão também definidas e implementadas como **matrizes**.

Embora não seja uma operação invencível geralmente tem unicidade !!!

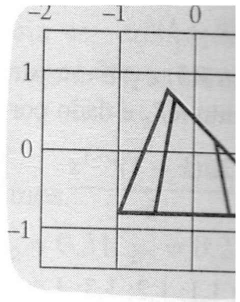
Lembra do espaço 3D ?

A forma mais simples de representar um objeto 3D em 2D é simplesmente Descartar uma das suas coordenadas .

Que matriz varia isso *?*

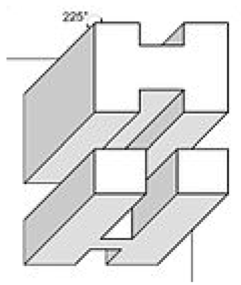


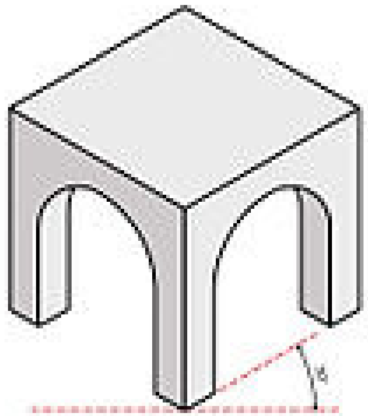
P_1 : (1,000; – 0,800; 0,000), P_2 : (0,500; – 0,800; – 0,866),
P_3 : (– 0,500; – 0,800; – 0,866), P_4 : (– 1,000; – 0,800; 0,000),
P_5 : (– 0,500; – 0,800; 0,866), P_6 : (0,500; – 0,800; 0,866),
P_7 : (0,840; – 0,400; 0,000), P_8 : (0,315; 0,125; – 0,546),
P_9 : (– 0,210; 0,650; – 0,364), P_{10} : (– 0,360; 0,800; 0,000),
P_{11} : (– 0,210; 0,650; 0,364), P_{12} : (0,315; 0,125; 0,546)



Características:

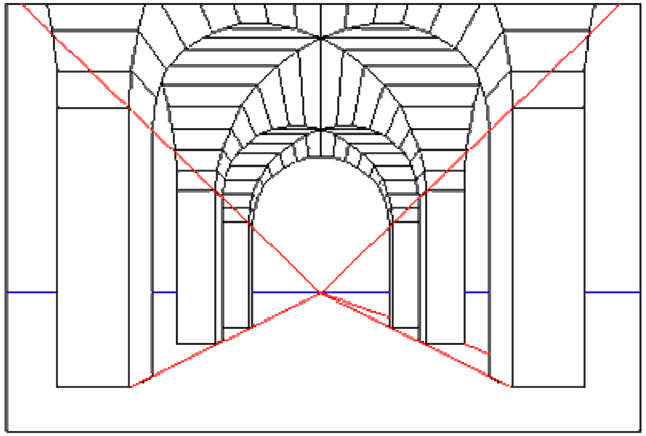
- Projeções Paralelas
  - O centro de projeção é localizado no infinito
  - Todas as linhas de projeção são paralelas entre si;
  - São tradicionalmente usadas em engenharia e desenhos técnicos;
  - Em alguns casos preservam as dimensões do objeto;
  - Não produzem imagem realista.

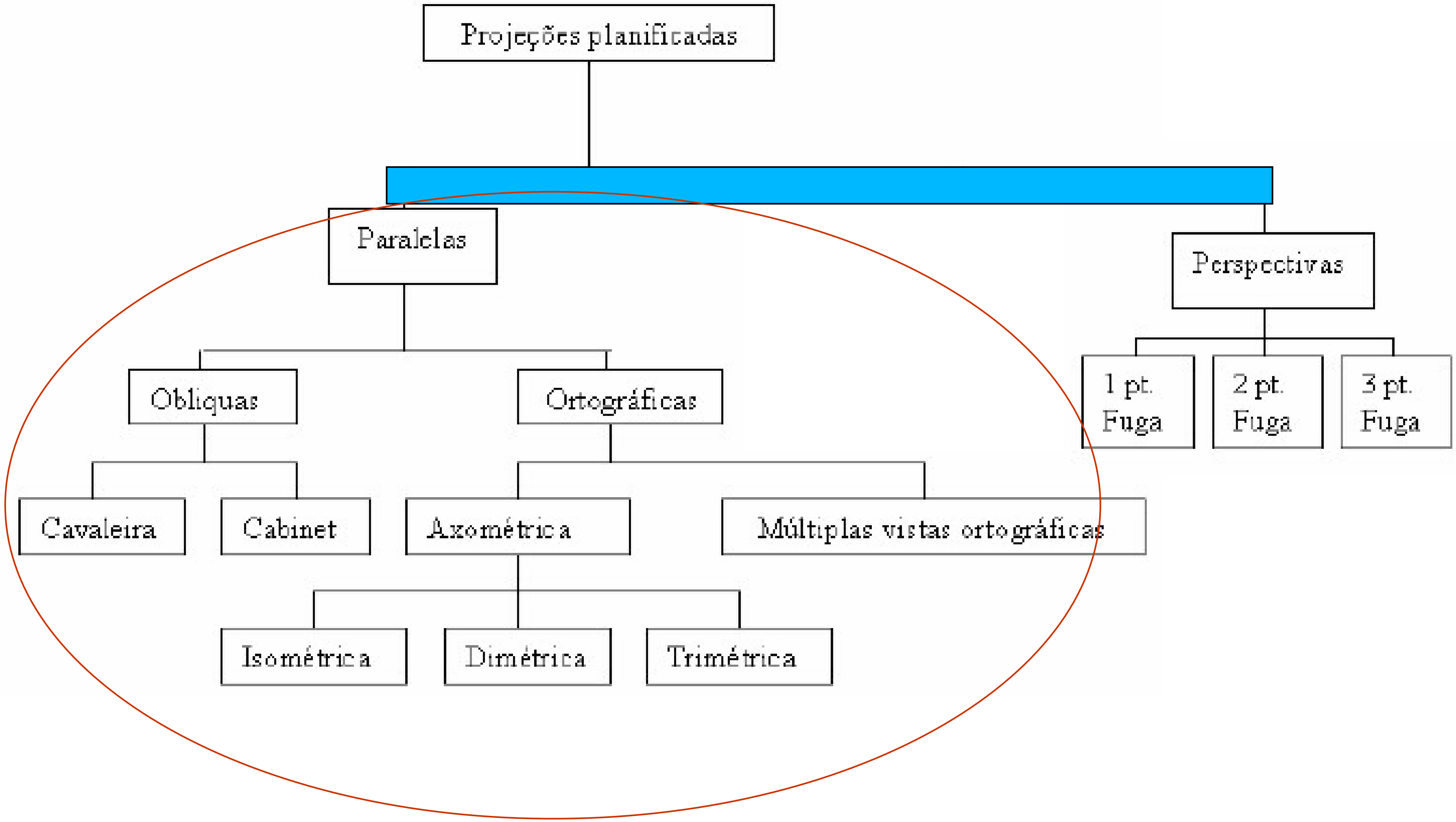


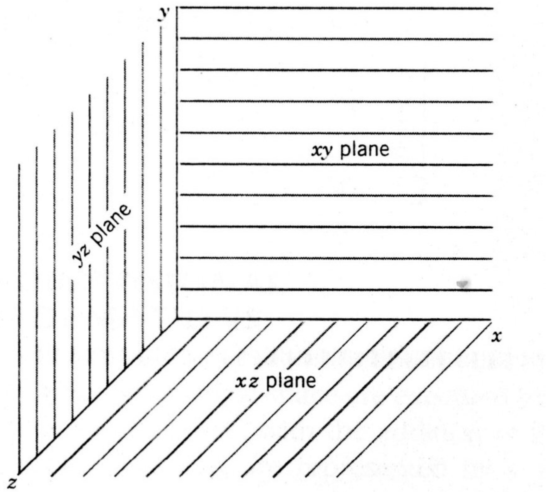


Características

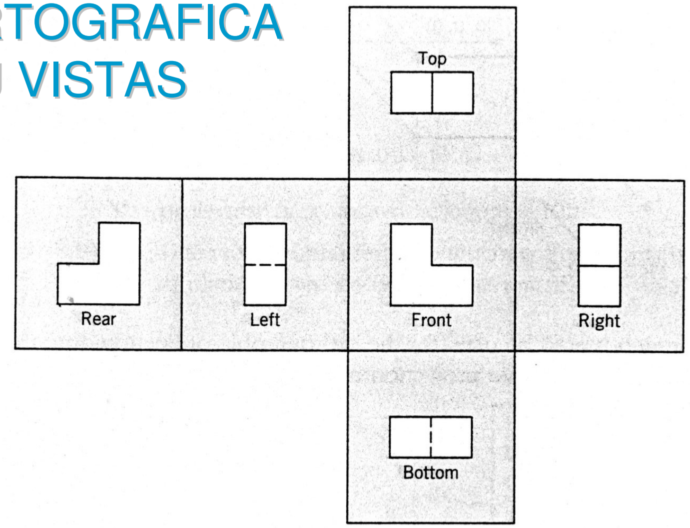
- Projeções Perspectivas
  - Todos os raios de projeção partem do centro de projeção e interceptam o plano de projeção com diferentes ângulos;
  - Representam a cena vista de um ponto de observação a uma distância finita;
  - Os raios projetores não podem ser paralelos.
  - Baseiam-se no número de pontos de fuga da imagem projetada;
  - São mais realísticas na representação de objetos;
  - Não reproduzem as verdadeiras medidas do objeto;

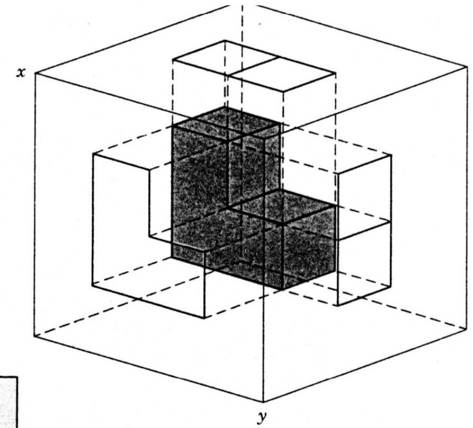



Projeções planificadas
Paralelas
Perspectivas
Obliquas
Ortográficas
Cavaleira
Cabinet
Axométrica
Múltiplas vistas ortográficas
Isométrica
Dimétrica
Trimétrica
1 pt.
Fuga
2 pt.
Fuga
3 pt.
Fuga

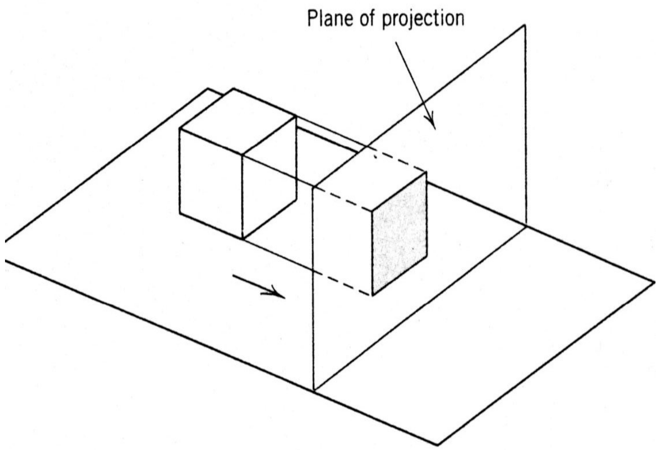


Projeção paralela
ORTOGRAFICA
OU VISTAS

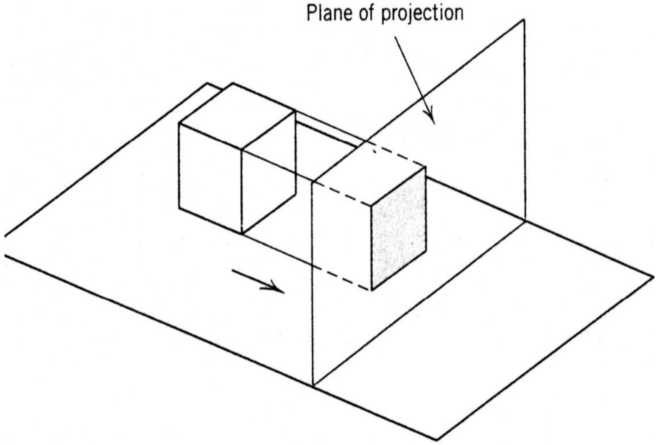




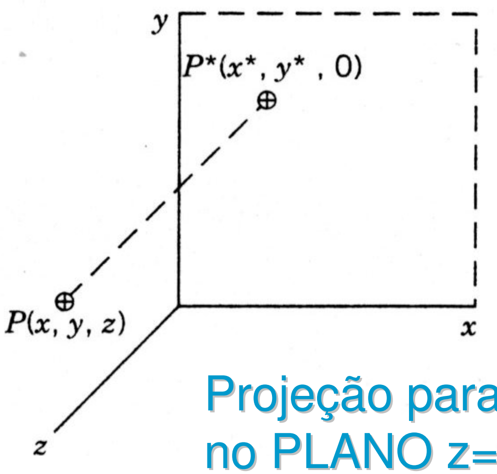
Projeção paralela ORTOGRAFICA
no PLANO z=0 (só restam coordenadas
x,y dos pontos) :



Projeção paralela
ORTOGRAFICA
OU VISTAS



$$[x^* \quad y^* \quad 0 \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



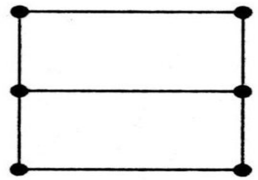
$$\left[\begin{array}{c|c} 3 \times 3 & 3 \times 1 \\ \hline 1 \times 3 & 1 \times 1 \end{array}\right]$$

Projeção paralela ORTOGRAFICA
no PLANO z=0 (só restam x,y) :

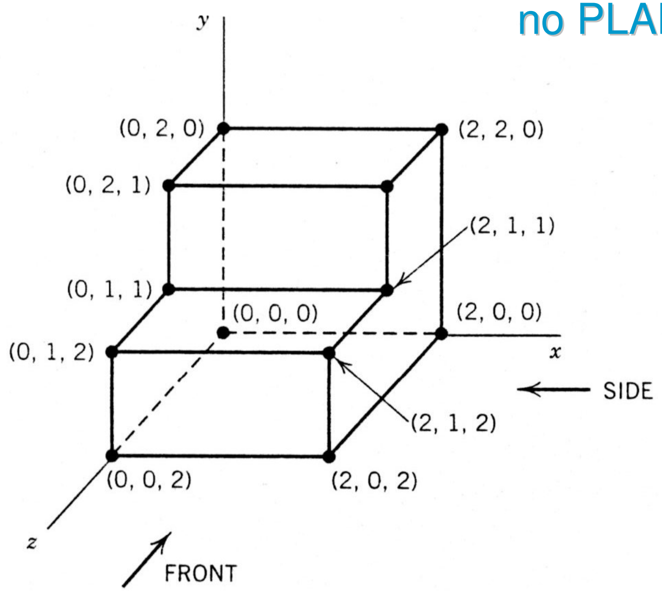
(só restam x e y)

$$[P^*] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[P^*]_{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



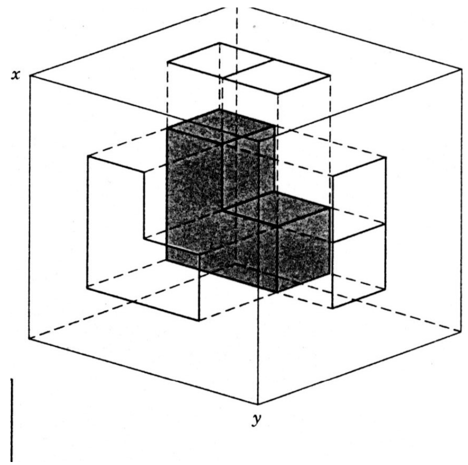
Projeção paralela
ORTOGRAFICA
no PLANO z=0:



E SE TIVERMOS Projeção paralela
ORTOGRAFICA POR UM PLANO PARALELO A
z=0, podemos pegar e aplicar uma translação.
z=Tz como fica essa matriz ?

De mesma forma

- Você pode descobrir as matrizes que fazem as outras vistas !!
- E projetar nestes planos seus objetos

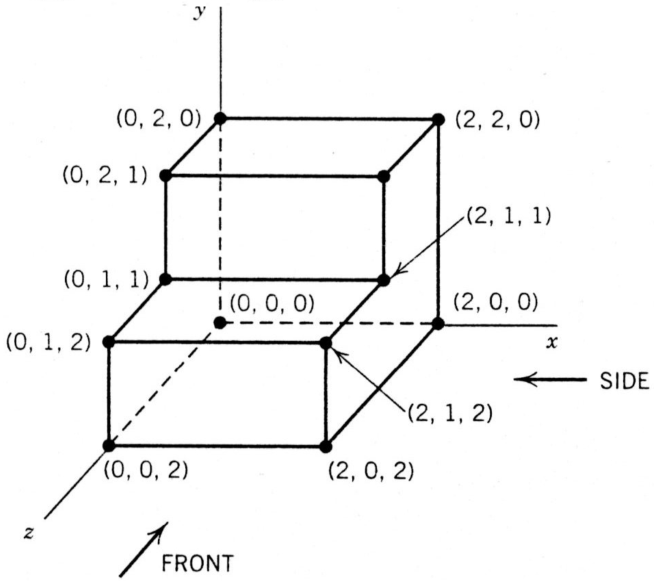


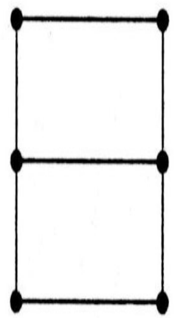
Projeção paralela ORTOGRÁFICA no PLANO y=0:

$$[P^*] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(só restam x,z)

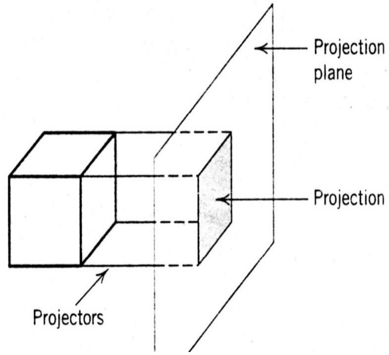
Todo y=0:





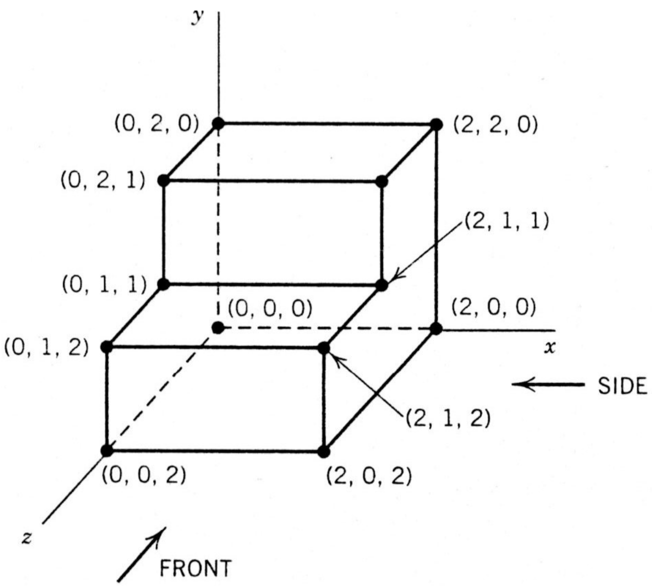
$$[P^*] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E SE TIVERMOS
Projeção paralela
ORTOGRAFICA
POR UM PLANO
PARALELO A x=0, i.e.
x=Tx ?

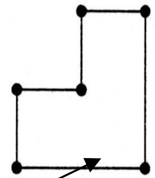


(só restam y,z)

Projeção paralela
ORTOGRAFICA
no PLANO x=0:

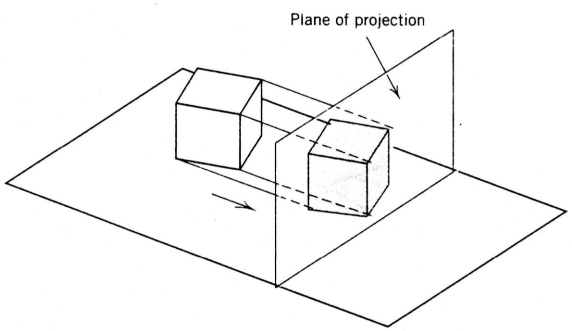


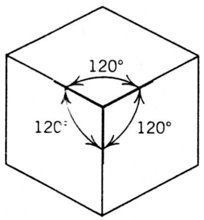
$$[P^*]_{yz} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

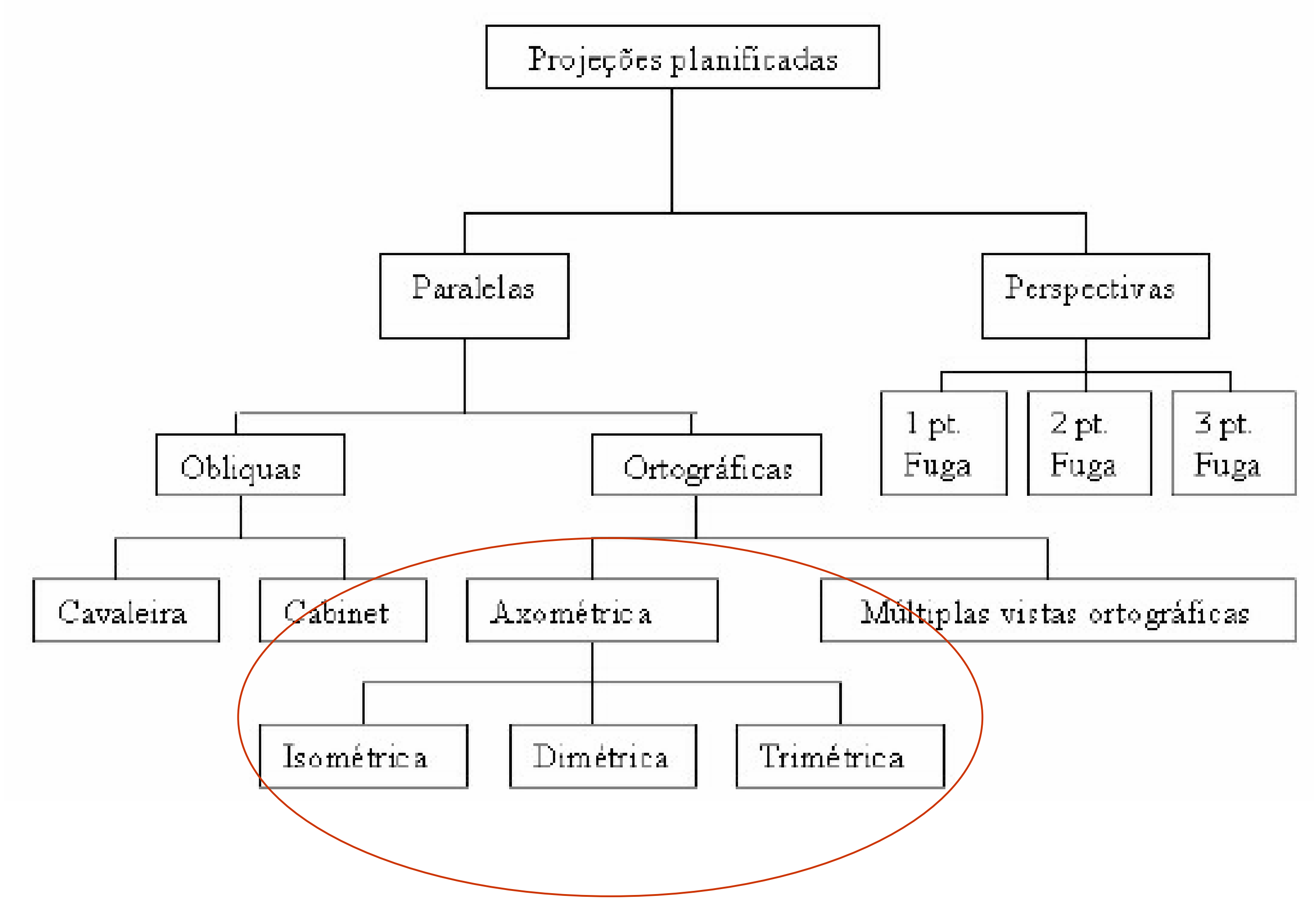


Projeção paralela axonométrica

- Raios projetores **paralelos** mas não na mesma direção dos eixos principais do objeto, e **perpendiculares** ao plano de projeção :
- Orientação qualquer: TRIM**É**TRICA
- De forma que 2 eixos tenha a mesma métrica: DIM**É**TRICA
- Os 3 eixos tenha a mesma métrica: **ISOMÉTRICA**

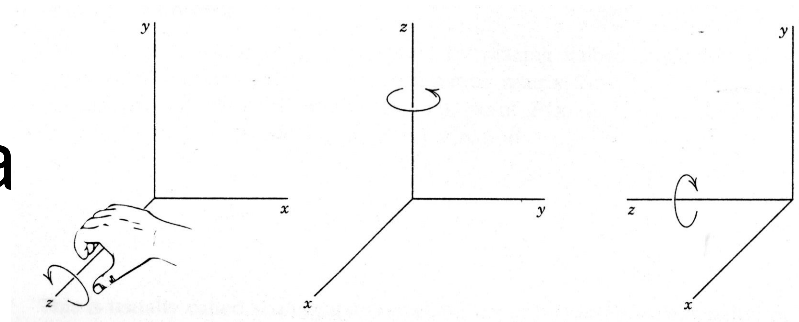


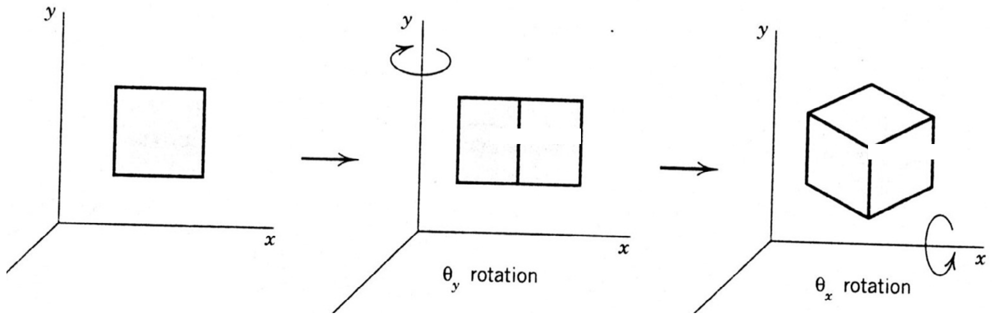


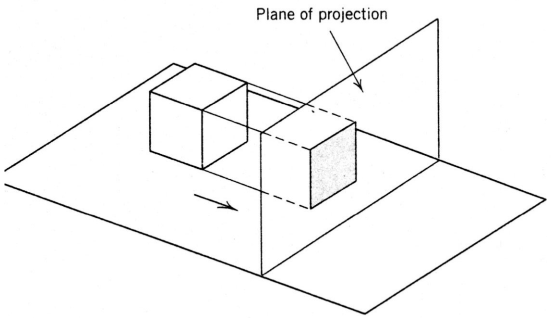

Projeções planificadas
Paralelas
Perspectivas
Obliquas
Ortográficas
1 pt. Fuga
2 pt. Fuga
3 pt. Fuga
Cavaleira
Cabinet
Axométrica
Múltiplas vistas ortográficas
Isométrica
Dimétrica
Trimétrica

Projeção paralela isométrica

- Vamos **reposicionar** nosso cubo inicial!







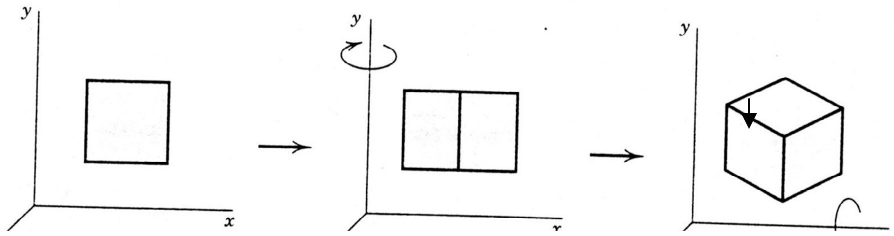
$$[M_{\mathrm{TILT}}] = [T_{\mathrm{R}}]_y^{\theta}[T_{\mathrm{R}}]_x^{\theta}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & -\sin\theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & \sin\theta_x & 0 \\ 0 & -\sin\theta_x & \cos\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_y & \sin\theta_y\sin\theta_x & -\sin\theta_y\cos\theta_x & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & \sin\theta_x & 0 \\ \sin\theta_y & -\sin\theta_x\cos\theta_y & \cos\theta_x\cos\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Projeção paralela isométrica

- Reposicionar o cubo e
- Depois projetá-lo



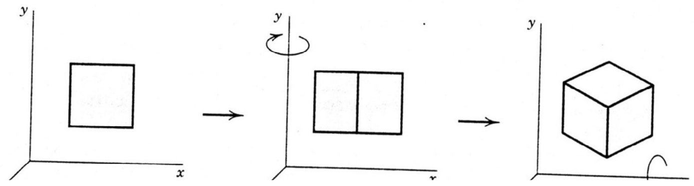
$$[M_{TILT}] = [T_R]_y^\theta [T_R]_x^\theta$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & -\sin\theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & \sin\theta_x & 0 \\ 0 & -\sin\theta_x & \cos\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_y & \sin\theta_y \sin\theta_x & -\sin\theta_y \cos\theta_x & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & \sin\theta_x & 0 \\ \sin\theta_y & -\sin\theta_x \cos\theta_y & \cos\theta_x \cos\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[M_{ISO}] = [M_{TILT}] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & \sin\theta_y \sin\theta_x & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & 0 & 0 \\ \sin\theta_y & -\sin\theta_x \cos\theta_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Projeção paralela isométrica



- Os vetores unitários agora são:

$$x^* = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1][M_{ISO}] = [\cos\theta_y \quad \sin\theta_y \sin\theta_x \quad 0 \quad 1]$$
$$y^* = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 1][M_{ISO}] = [0 \quad \cos\theta_x \quad 0 \quad 1]$$
$$z^* = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1][M_{ISO}] = [\sin\theta_y \quad -\sin\theta_x \cos\theta_y \quad 0 \quad 1]$$

$$|x^*| = \sqrt{\cos^2\theta_y + \sin^2\theta_y \sin^2\theta_x}$$
$$|y^*| = \sqrt{\cos^2\theta_x}$$
$$|z^*| = \sqrt{\sin^2\theta_y + \sin^2\theta_x \cos^2\theta_y}$$

Os vetores unitários em x e y:

$$|x^*| = |y^*|$$
$$\cos^2\theta_y + \sin^2\theta_y \sin^2\theta_x = \cos^2\theta_x$$

Considerando só senos: $1 - \sin^2\theta_y + \sin^2\theta_y \sin^2\theta_x = 1 - \sin^2\theta_x$

Simplificando a expressão: $\sin^2\theta_y (\sin^2\theta_x - 1) = -\sin^2\theta_x$

$$\boxed{\sin^2\theta_y = \frac{\sin^2\theta_x}{1 - \sin^2\theta_x}}$$

Projeção paralela isométrica

- Os vetores unitários em

$$|z^*| = |y^*|$$

$$\sin^2\theta_y + \sin^2\theta_x \cos^2\theta_y = \cos^2\theta_x$$

Considerando só senos:

$$\sin^2\theta_y + \sin^2\theta_x (1 - \sin^2\theta_y) = 1 - \sin^2\theta_x$$

Simplificando a expressão:

$$\boxed{\sin^2\theta_y = \frac{1 - 2\sin^2\theta_x}{1 - \sin^2\theta_x}}$$

$$|x^*| = |y^*|$$

$$\cos^2\theta_y + \sin^2\theta_y \sin^2\theta_x = \cos^2\theta_x$$

$$1 - \sin^2\theta_y + \sin^2\theta_y \sin^2\theta_x = 1 - \sin^2\theta_x$$

$$\sin^2\theta_y (\sin^2\theta_x - 1) = -\sin^2\theta_x$$

$$\boxed{\sin^2\theta_y = \frac{\sin^2\theta_x}{1 - \sin^2\theta_x}}$$

$$\frac{\sin^2\theta_x}{1 - \sin^2\theta_x} = \frac{1 - 2\sin^2\theta_x}{1 - \sin^2\theta_x}$$

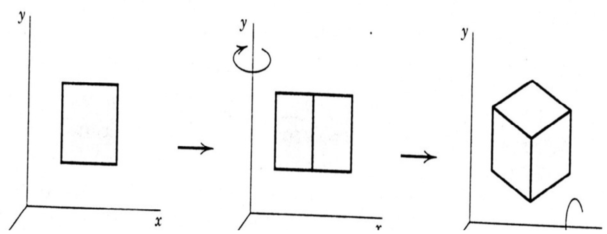
$$\sin^2\theta_x = 1 - 2\sin^2\theta_x$$

$$\boxed{\sin^2\theta_x = \tfrac{1}{3}}$$

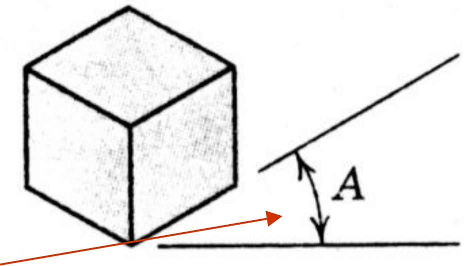
$$\boxed{\theta_x = \pm 35.26^\circ}$$

$$\sin^2\theta_y = \tfrac{1}{2}$$

$$\boxed{\theta_y = \pm 45^\circ}$$



Projeção paralela isométrica



- Em engenharia e desenho técnico um ângulo importante na projeção isométrica é o chamado ***A*** na figura ao lado (que ângulo é esse?)

- Considerando

$$x^* = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1][M_{ISO}] = [\boxed{\cos\theta_y} \quad \boxed{\sin\theta_y \sin\theta_x} \quad 0 \quad 1]$$

Se vê :

$$\tan A = \frac{x_y^*}{x_x^*} = \frac{\boxed{\sin\theta_y \sin\theta_x}}{\boxed{\cos\theta_y}}$$

como

$$\theta_y = 45°,\ \sin\theta_y = \cos\theta_y,$$

Tem-se que:

$$\tan A = \pm\sin\theta_x = \pm\sin(35.26)°$$

$$A = \pm 30°$$

Projeção paralela isométrica

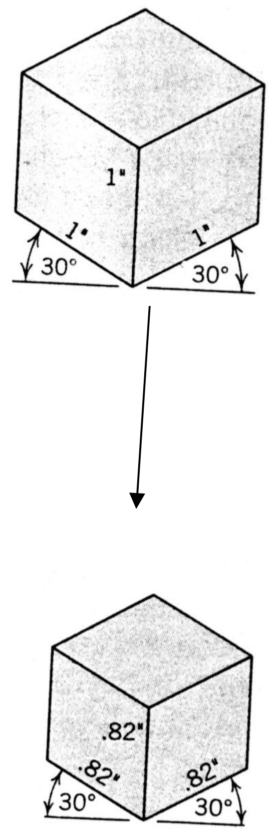
- Em engenharia e desenho técnico, saber o quanto muda o comprimento na projeção isométrica é importante:
- Vamos chamar o novo comprimento de ***F*** , voltando as medidas dos vetores depois de projetados :

$$|x^*| = \sqrt{\cos^2\theta_y + \sin^2\theta_y \sin^2\theta_x}$$

$$|y^*| = \sqrt{\cos^2\theta_x}$$

$$|z^*| = \sqrt{\sin^2\theta_y + \sin^2\theta_x \cos^2\theta_y}$$

$$F = \frac{|y^*|}{1} = \sqrt{\cos^2\theta_x} = \sqrt{\tfrac{2}{3}} = 0.8165$$

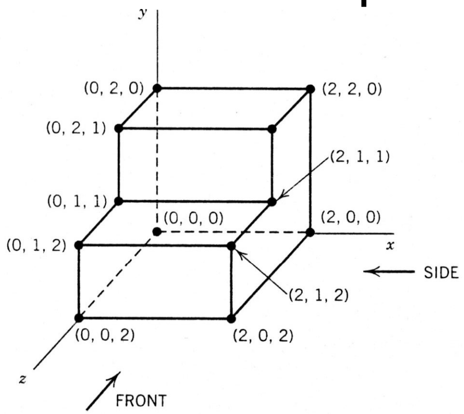


O comprimento na projeção isométrica **muda 82%** !

Projeção paralela isométrica

Como ficaria nossa figura escadir

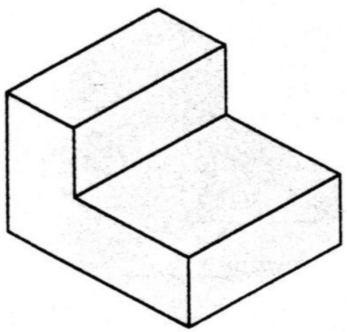
isométrica no plano xy ou z=0?



$$[P^*] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.707 & 0.408 & 0 & 0 \\ 0 & 0.816 & 0 & 0 \\ 0.707 & -0.408 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[P^*] = [P][M_{\mathrm{ISO}}] = [P] \begin{bmatrix} \cos\theta_y & \sin\theta_y \sin\theta_x & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & 0 & 0 \\ \sin\theta_y & -\sin\theta_x \cos\theta_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[P^*] = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.632 & 0.0 & 1.0 \\ 1.414 & 2.448 & 0.0 & 1.0 \\ 1.414 & 0.816 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.707 & 1.224 & 0.0 & 1.0 \\ 2.121 & 2.040 & 0.0 & 1.0 \\ 2.12 & 1.224 & 0.0 & 1.0 \\ 2.828 & 0.816 & 0.0 & 1.0 \\ 2.828 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 1.414 & -0.816 & 0.0 & 1.0 \\ 1.414 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.707 & 0.408 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$



conclusão

Vimos até aqui como fazer as projeções

Paralelas Ortográficas, que são as que os raios projetores chegam sempre perpendiculares aos planos de projeção.