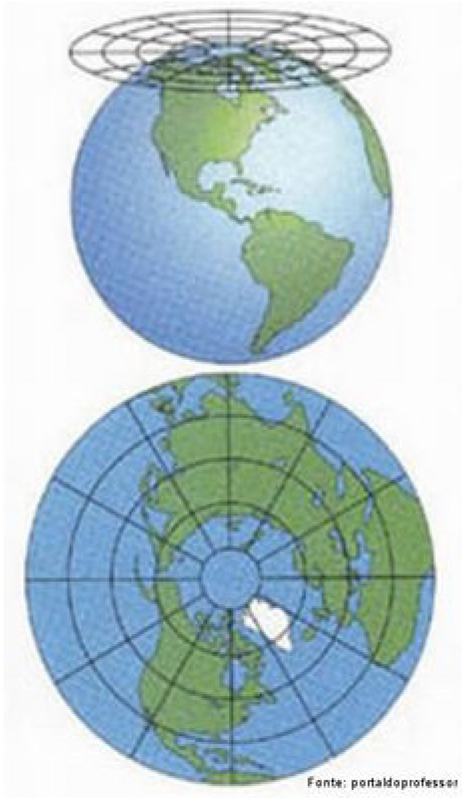
http://computacaografica.ic.uff.br/conteudocap2.html

aula 7

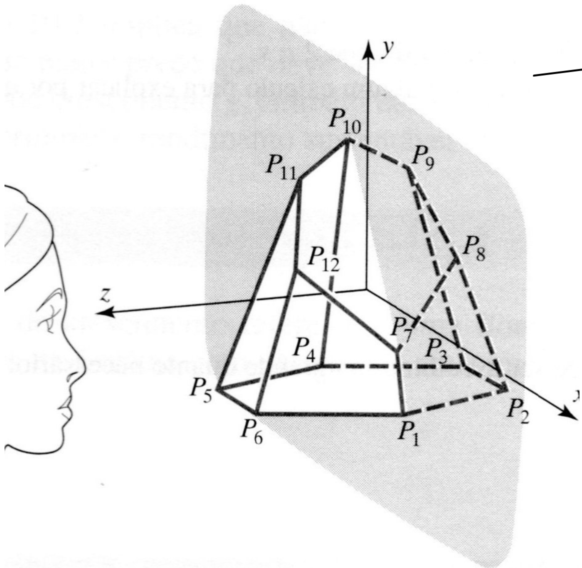
Projeções Paralelas (Continuação)

2018/2 – IC / UFF

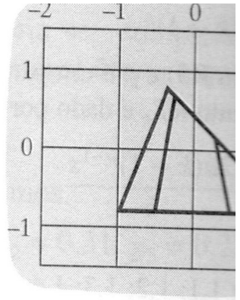


Um objeto é um conjunto de pontos no espaço 3D

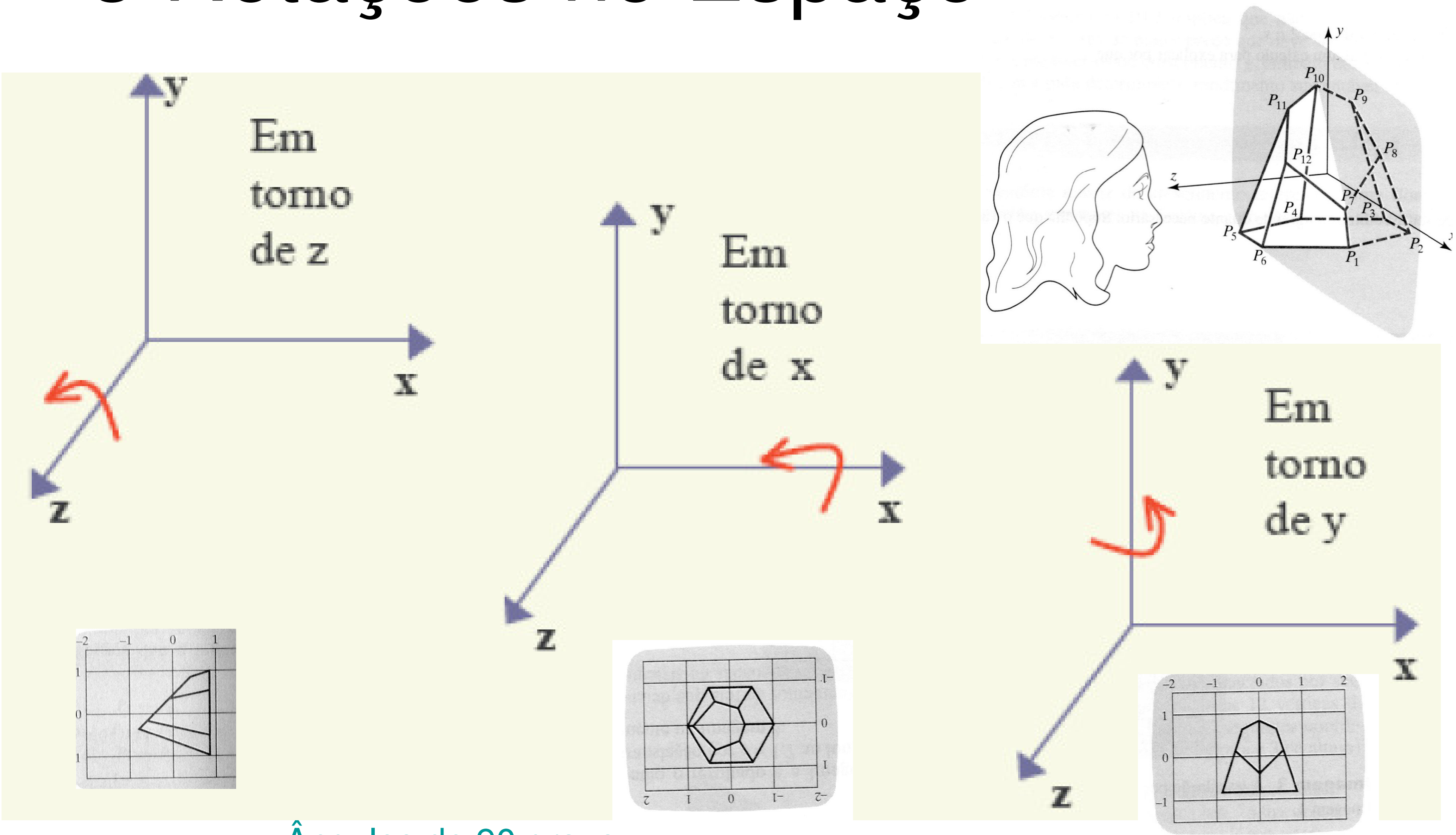
Já vimos como definir objetos pela sua topologia e geometria. Também como transformá-lo : transformado todos os seus pontos de vértices



P_1 : (1,000; – 0,800; 0,000), P_2 : (0,500; – 0,800; – 0,866),
P_3 : (– 0,500; – 0,800; – 0,866), P_4 : (– 1,000; – 0,800; 0,000),
P_5 : (– 0,500; – 0,800; 0,866), P_6 : (0,500; – 0,800; 0,866),
P_7 : (0,840; – 0,400; 0,000), P_8 : (0,315; 0,125; – 0,546),
P_9 : (– 0,210; 0,650; – 0,364), P_{10} : (– 0,360; 0,800; 0,000),
P_{11} : (– 0,210; 0,650; 0,364), P_{12} : (0,315; 0,125; 0,546)

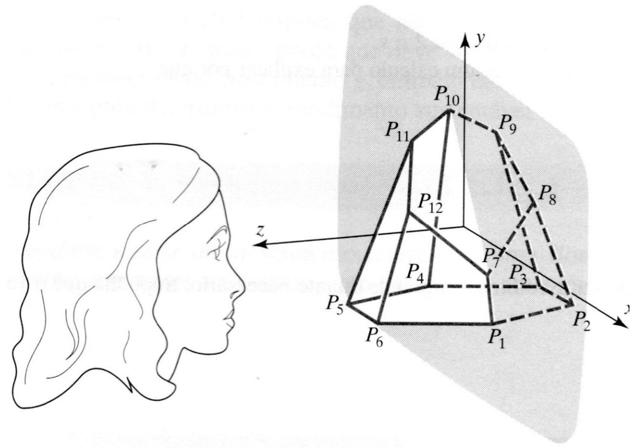


3 Rotações no Espaço



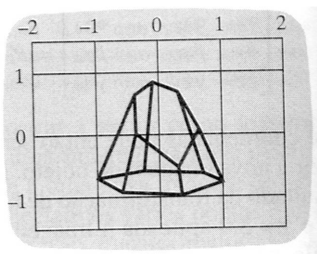
Ângulos de 90 graus...

De um mesmo ângulo em torno dos 3 eixos

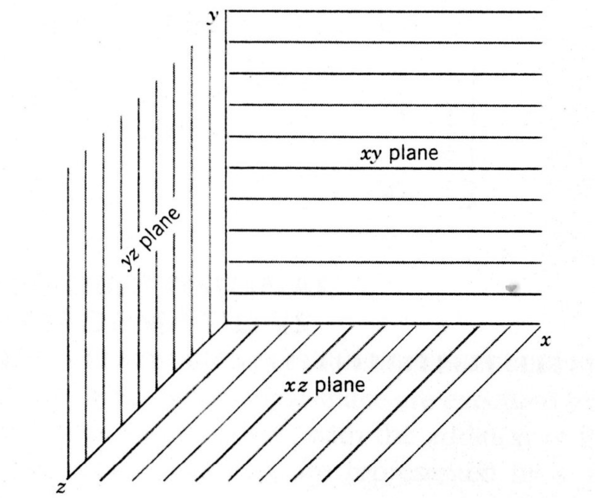


$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Diversas podem ser feitas em serie e aplicadas de uma só fez

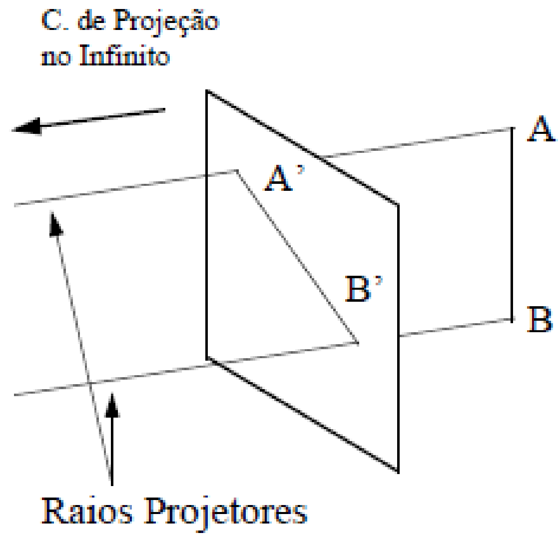


Para apresentar um objeto do espaço 3D na tela 2D ele deve ser PROJETADO



A forma mais simples de representar um objeto 3D em 2D é simplesmente descartar uma das suas coordenadas .

Se os eixos principais do objeto forem paralelos aos sistemas de eixos considerados, e os raios projetores forem paralelos aos eixos e perpendiculares ao plano de projeção essa projeção se chama ORTOGRAFICA



Cada tipo de projeção

Tem casos de aplicação específicos nos quais são bem úteis.

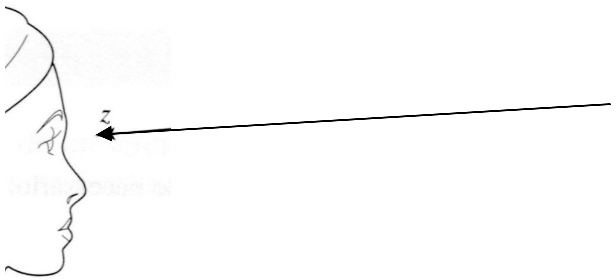
E elas serão também definidas e implementadas como **matrizes**.

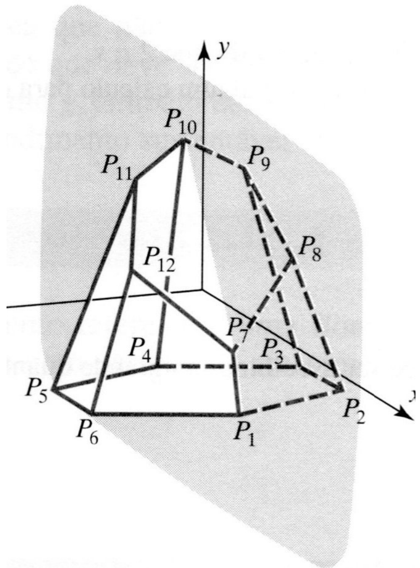
Embora essa operação **não tem inversa** geralmente tem unicidade !!!

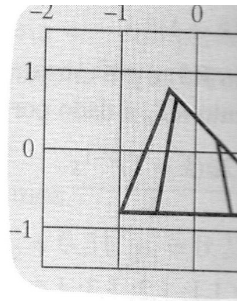
PROJEÇÃO PARALELA *ORTOGRAFICA*

Como se você visse de frente em relação aos eixos principais do objeto e bastante longe para não haver o efeito de perspectiva.

Este é um caso especial das projeções paralelas ortogonais ao plano de projeção , ou ORTOGRAFICAS



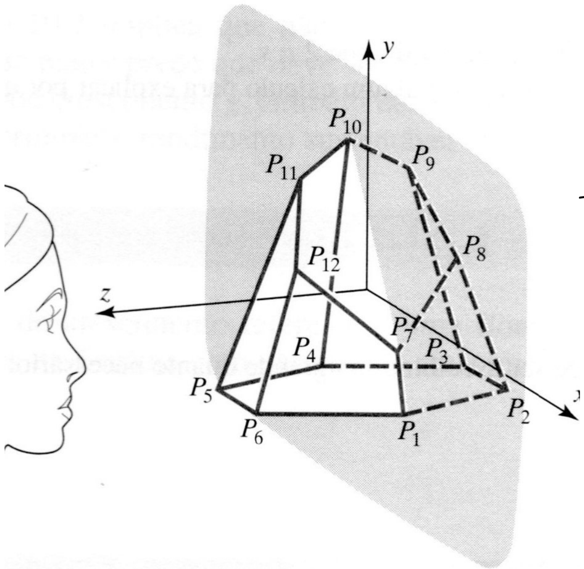


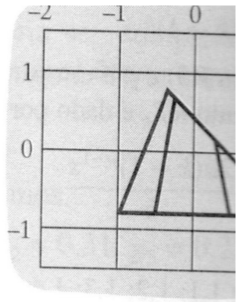


Lembra do espaço 3D ?

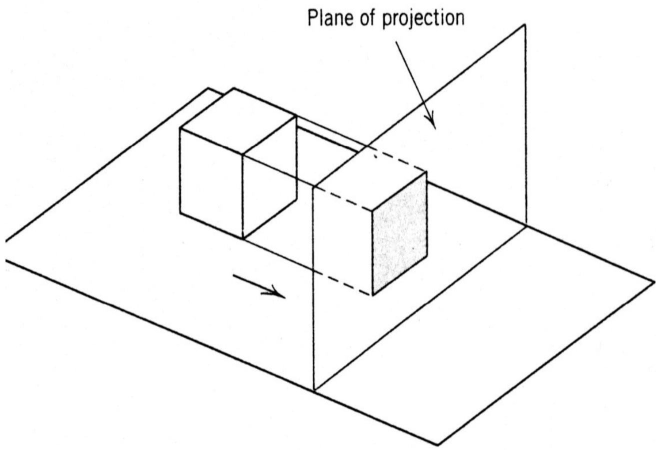
A forma mais simples de representar um objeto 3D em 2D é simplesmente Descartar uma das suas coordenadas .

Que matriz varia isso *?*





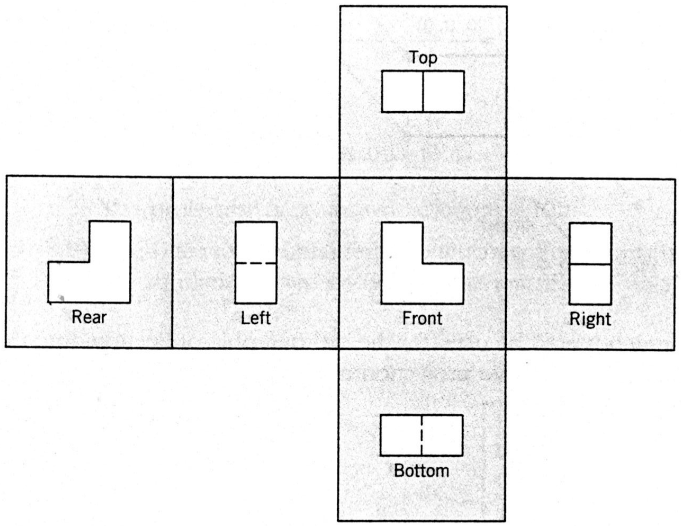
Projeção paralela
ORTOGRAFICA
OU VISTAS

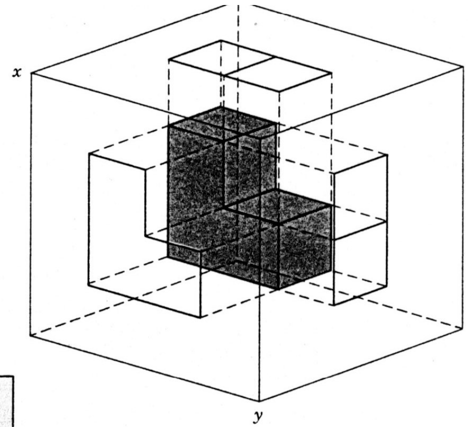


$$[x^* \quad y^* \quad 0 \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Projeção paralela ORTOGRAFICA
no PLANO z=0 (só restam x,y) :

Projeção paralela
ORTOGRAFICA
OU VISTAS

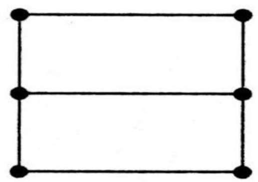




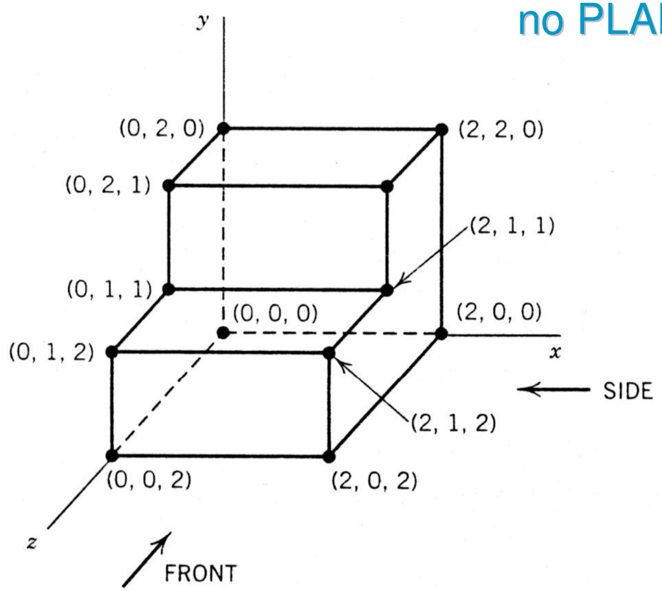
$$[P^*] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(só restam x e y)

$$[P^*]_{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



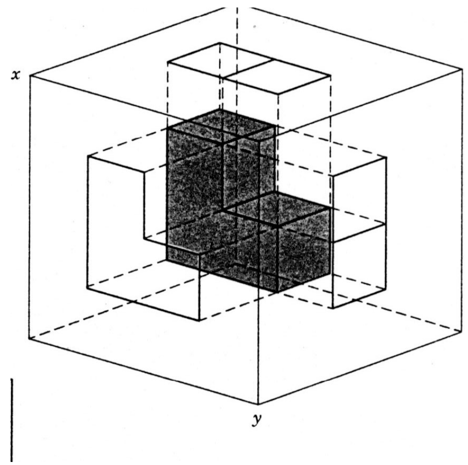
Projeção paralela ORTOGRAFICA no PLANO z=0:



E SE TIVERMOS Projeção paralela ORTOGRAFICA POR UM PLANO PARALELO A z=0, podemos pegar e aplicar uma translação. z=Tz como fica essa matriz ?

De mesma forma

- Você pode descobrir as matrizes que fazem as outras vistas !!
- E projetar nestes planos seus objetos

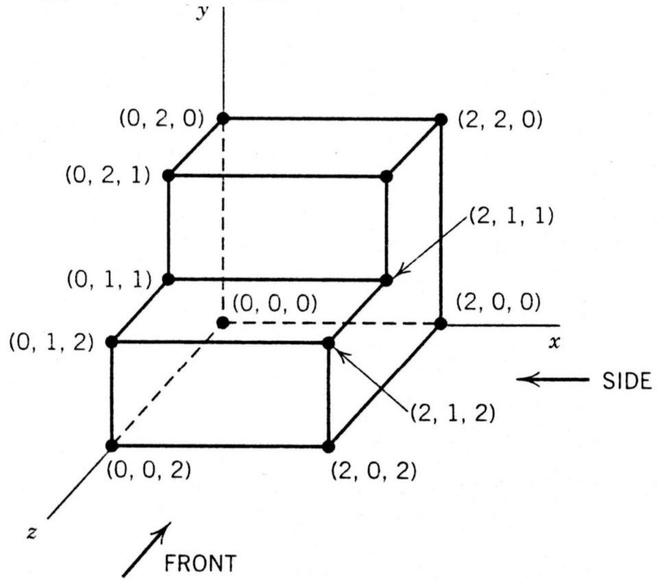


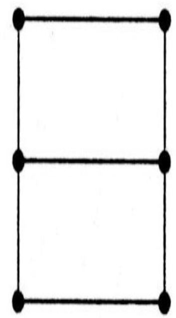
Projeção paralela ORTOGRÁFICA no PLANO y=0:

$$[P^*] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(só restam x,z)

Todo y=0:



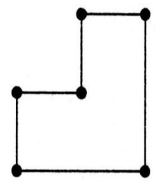


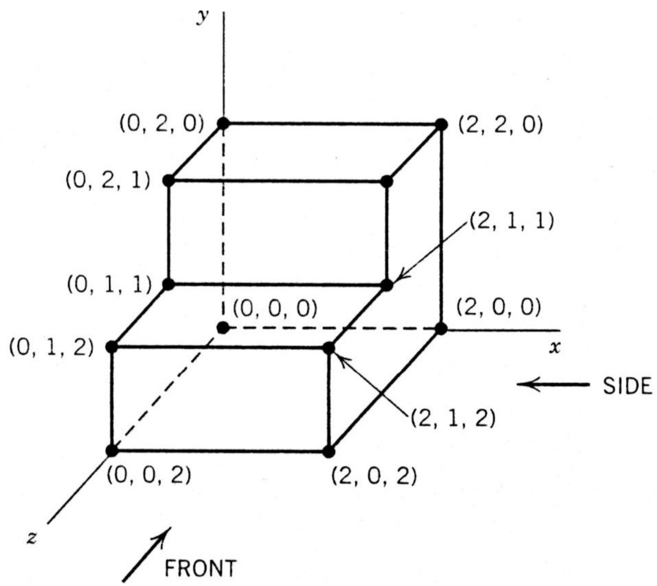
$$[P^*] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(só restam y,z)

$$[P^*]_{yz} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

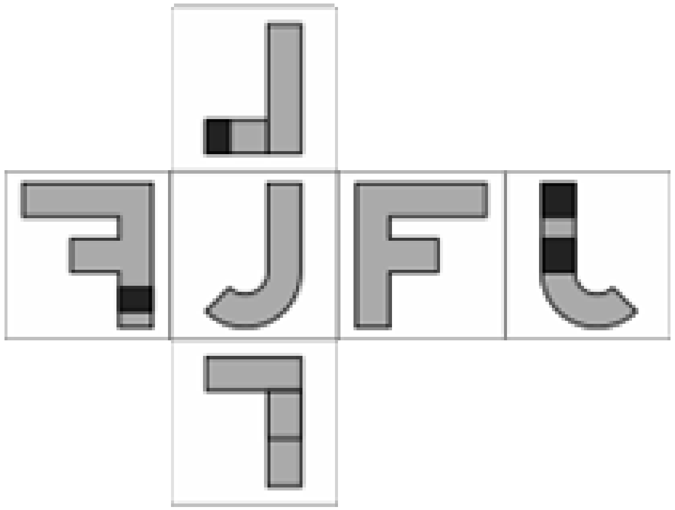
Projeção paralela
ORTOGRAFICA
no PLANO x=0:

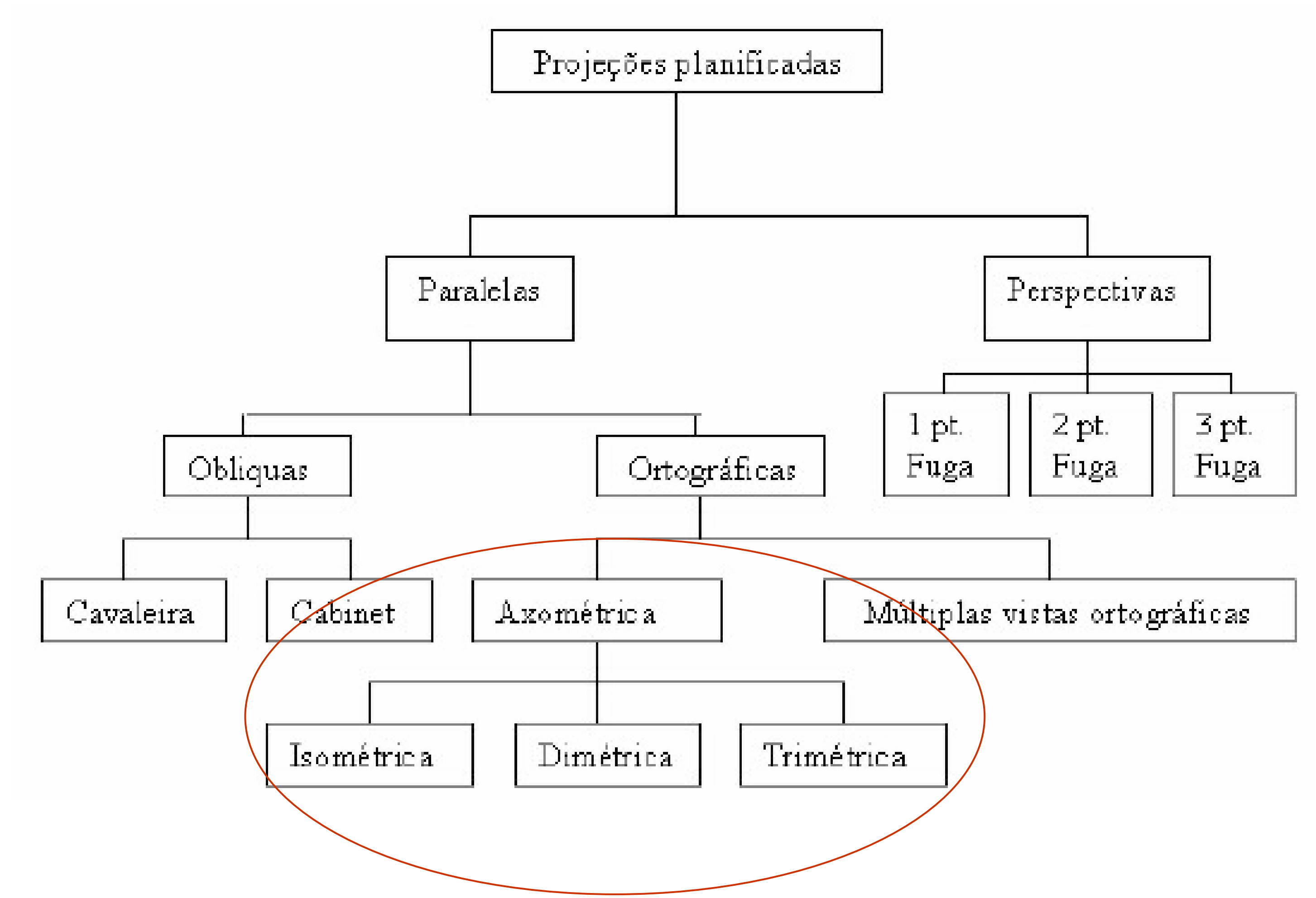




E SE TIVERMOS
Projeção paralela
ORTOGRAFICA
POR UM PLANO
PARALELO A x=0, i.e.
x=Tx ?

Só com as 6 vistas de um mesmo objeto você realmente sabe com um objeto complexo é em 3D!!

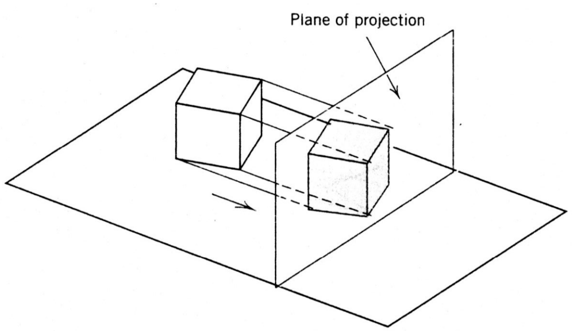


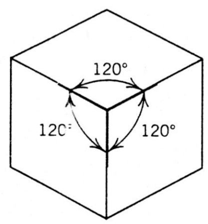


Projeções planificadas
Paralelas
Perspectivas
Obliquas
Ortográficas
1 pt. Fuga
2 pt. Fuga
3 pt. Fuga
Cavaleira
Cabinet
Axométrica
Múltiplas vistas ortográficas
Isométrica
Dimétrica
Trimétrica

Projeção paralela axonométrica

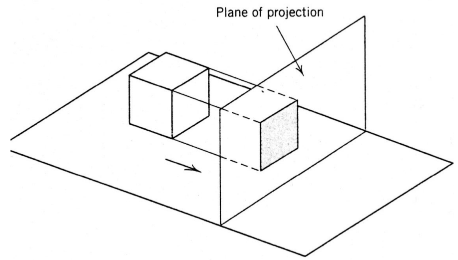
- Raios projetores **paralelos** mas não na mesma direção dos eixos principais do objeto, e **perpendiculares** ao plano de projeção :
- Orientação qualquer: TRIM**É**TRICA
- De forma que 2 eixos tenha a mesma métrica: DIM**É**TRICA
- Os 3 eixos tenha a mesma métrica: **ISOMÉTRICA**

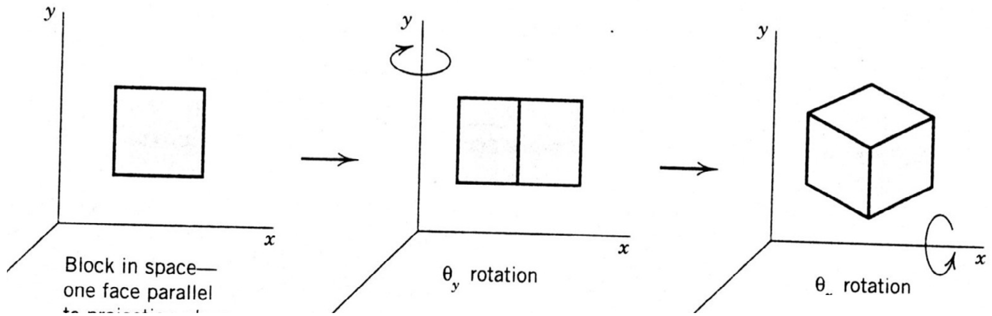




Projeção paralela isométrica

- Vamos **reposicionar** nosso cubo inicial!



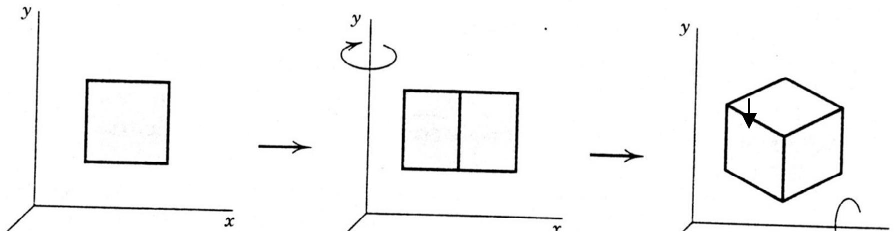


$$[M_{\mathrm{TILT}}] = [T_{\mathrm{R}}]^{\theta}_{y}\,[T_{\mathrm{R}}]^{\theta}_{x}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & -\sin\theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & \sin\theta_x & 0 \\ 0 & -\sin\theta_x & \cos\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_y & \sin\theta_y\sin\theta_x & -\sin\theta_y\cos\theta_x & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & \sin\theta_x & 0 \\ \sin\theta_y & -\sin\theta_x\cos\theta_y & \cos\theta_x\cos\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

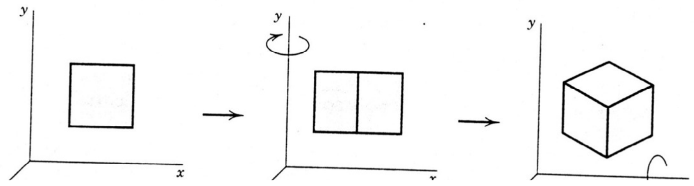
Projeção paralela isométrica



- Reposicionar o cubo e
- Depois projetá-lo

$$[M_{\text{ISO}}] = [M_{\text{TILT}}]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & \sin\theta_y \sin\theta_x & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & 0 & 0 \\ \sin\theta_y & -\sin\theta_x \cos\theta_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Projeção paralela isométrica



- Os vetores unitários agora são:

$$x^* = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1][M_{ISO}] = [\cos\theta_y \quad \sin\theta_y \sin\theta_x \quad 0 \quad 1]$$
$$y^* = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 1][M_{ISO}] = [0 \quad \cos\theta_x \quad 0 \quad 1]$$
$$z^* = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1][M_{ISO}] = [\sin\theta_y \quad -\sin\theta_x \cos\theta_y \quad 0 \quad 1]$$

$$|x^*| = \sqrt{\cos^2\theta_y + \sin^2\theta_y \sin^2\theta_x}$$
$$|y^*| = \sqrt{\cos^2\theta_x}$$
$$|z^*| = \sqrt{\sin^2\theta_y + \sin^2\theta_x \cos^2\theta_y}$$

Os vetores unitários em x e y:

$$|x^*| = |y^*|$$

$$\cos^2\theta_y + \sin^2\theta_y \sin^2\theta_x = \cos^2\theta_x$$

Considerando só senos: $1 - \sin^2\theta_y + \sin^2\theta_y \sin^2\theta_x = 1 - \sin^2\theta_x$

Simplificando a expressão: $\sin^2\theta_y (\sin^2\theta_x - 1) = -\sin^2\theta_x$

$$\boxed{\sin^2\theta_y = \frac{\sin^2\theta_x}{1 - \sin^2\theta_x}}$$

Projeção paralela isométrica

- Os vetores unitários em

$$|z^*| = |y^*|$$

$$\sin^2\theta_y + \sin^2\theta_x \cos^2\theta_y = \cos^2\theta_x$$

Considerando só senos:

$$\sin^2\theta_y + \sin^2\theta_x (1 - \sin^2\theta_y) = 1 - \sin^2\theta_x$$

Simplificando a expressão:

$$\boxed{\sin^2\theta_y = \frac{1 - 2\sin^2\theta_x}{1 - \sin^2\theta_x}}$$

$$|x^*| = |y^*|$$

$$\cos^2\theta_y + \sin^2\theta_y \sin^2\theta_x = \cos^2\theta_x$$

$$1 - \sin^2\theta_y + \sin^2\theta_y \sin^2\theta_x = 1 - \sin^2\theta_x$$

$$\sin^2\theta_y (\sin^2\theta_x - 1) = -\sin^2\theta_x$$

$$\boxed{\sin^2\theta_y = \frac{\sin^2\theta_x}{1 - \sin^2\theta_x}}$$

$$\frac{\sin^2\theta_x}{1 - \sin^2\theta_x} = \frac{1 - 2\sin^2\theta_x}{1 - \sin^2\theta_x}$$

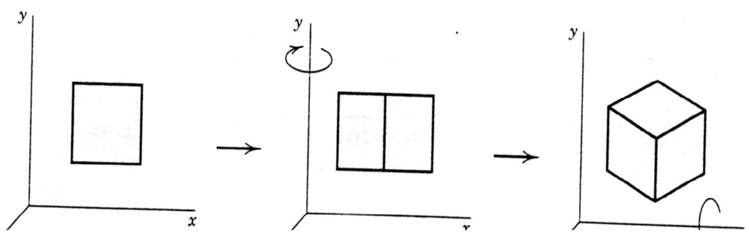
$$\sin^2\theta_x = 1 - 2\sin^2\theta_x$$

$$\boxed{\sin^2\theta_x = \tfrac{1}{3}}$$

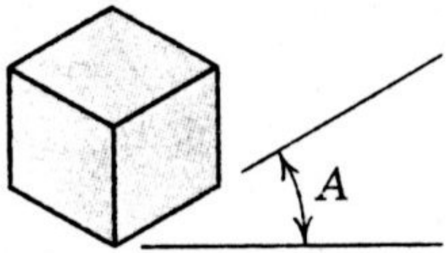
$$\boxed{\theta_x = \pm 35.26^\circ}$$

$$\sin^2\theta_y = \tfrac{1}{2}$$

$$\boxed{\theta_y = \pm 45^\circ}$$



Projeção paralela isométrica



- Em engenharia e desenho técnico um ângulo importante na projeção isométrica é o chamado ***A*** na figura ao lado (que ângulo é esse?)

- Considerando

$$x^* = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1][M_{ISO}] = [\boxed{\cos\theta_y} \quad \boxed{\sin\theta_y \sin\theta_x} \quad 0 \quad 1]$$

Se vê :

$$\tan A = \frac{x_y^*}{x_x^*} = \frac{\boxed{\sin\theta_y \sin\theta_x}}{\boxed{\cos\theta_y}}$$

como

$$\theta_y = 45°, \sin\theta_y = \cos\theta_y,$$

Tem-se que:

$$\tan A = \pm\sin\theta_x = \pm\sin(35.26)°$$

$$A = \pm 30°$$

Projeção paralela isométrica

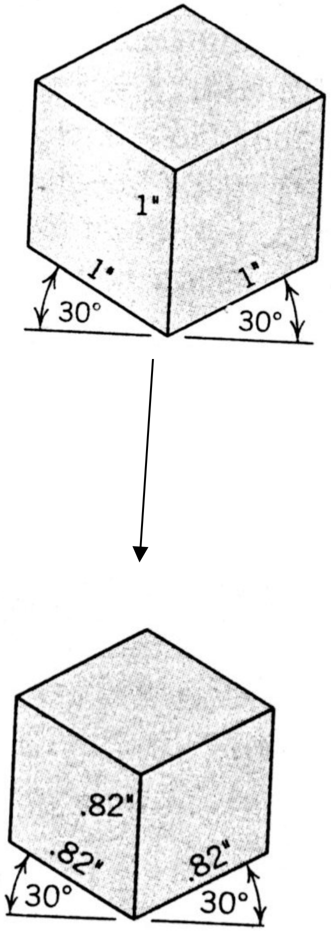
- Em engenharia e desenho técnico, saber o **quanto** muda o comprimento na projeção isométrica é importante:
- Vamos chamar o novo comprimento de ***F*** , voltando as medidas dos vetores depois de projetados :

$$|x^*| = \sqrt{\cos^2\theta_y + \sin^2\theta_y \sin^2\theta_x}$$

$$|y^*| = \sqrt{\cos^2\theta_x}$$

$$|z^*| = \sqrt{\sin^2\theta_y + \sin^2\theta_x \cos^2\theta_y}$$

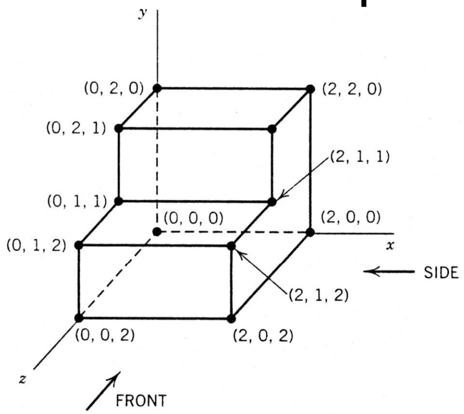
$$F = \frac{|y^*|}{1} = \sqrt{\cos^2\theta_x} = \sqrt{\tfrac{2}{3}} = 0.8165$$



O comprimento na projeção isométrica **muda 82%** !

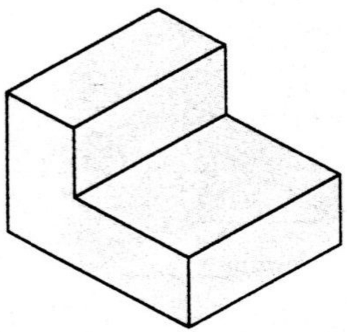
Projeção paralela isométrica

Como ficaria o objeto escadinha em isométrica no plano xy ou z=0?



$$[P^*] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.707 & 0.408 & 0 & 0 \\ 0 & 0.816 & 0 & 0 \\ 0.707 & -0.408 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[P^*] = [P][M_{\mathrm{ISO}}] = [P] \begin{bmatrix} \cos\theta_y & \sin\theta_y \sin\theta_x & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & 0 & 0 \\ \sin\theta_y & -\sin\theta_x \cos\theta_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$[P^*] = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.632 & 0.0 & 1.0 \\ 1.414 & 2.448 & 0.0 & 1.0 \\ 1.414 & 0.816 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.707 & 1.224 & 0.0 & 1.0 \\ 2.121 & 2.040 & 0.0 & 1.0 \\ 2.12 & 1.224 & 0.0 & 1.0 \\ 2.828 & 0.816 & 0.0 & 1.0 \\ 2.828 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 1.414 & -0.816 & 0.0 & 1.0 \\ 1.414 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.707 & 0.408 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Como fazer as outras projeções paralelas axonométricas

- Por definição defina <u>que 2 eixos você quer que tenha a mesma métrica para as infinitas DIMÉTRICA possíveis e use as expressões:</u>

$$|x^*| = \sqrt{\cos^2\theta_y + \sin^2\theta_y \sin^2\theta_x}$$

$$|y^*| = \sqrt{\cos^2\theta_x}$$

$$|z^*| = \sqrt{\sin^2\theta_y + \sin^2\theta_x \cos^2\theta_y}$$

Como fazer as projeções paralelas

- TRIMÉTRICA use as expressões anteriores com alguma restrição que haja em seu problema quanto as variações de medidas desejadas

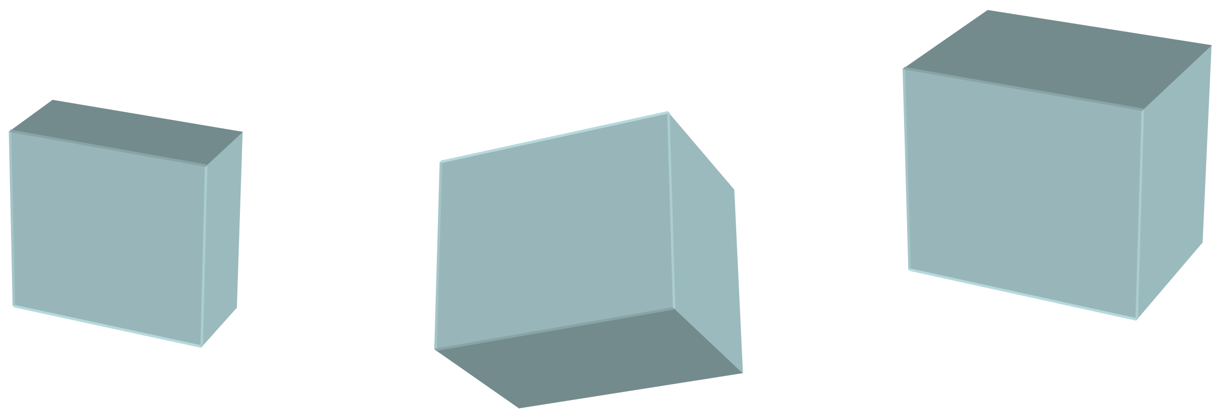
$$|x^*| = \sqrt{\cos^2\theta_y + \sin^2\theta_y \sin^2\theta_x}$$

$$|y^*| = \sqrt{\cos^2\theta_x}$$

$$|z^*| = \sqrt{\sin^2\theta_y + \sin^2\theta_x \cos^2\theta_y}$$

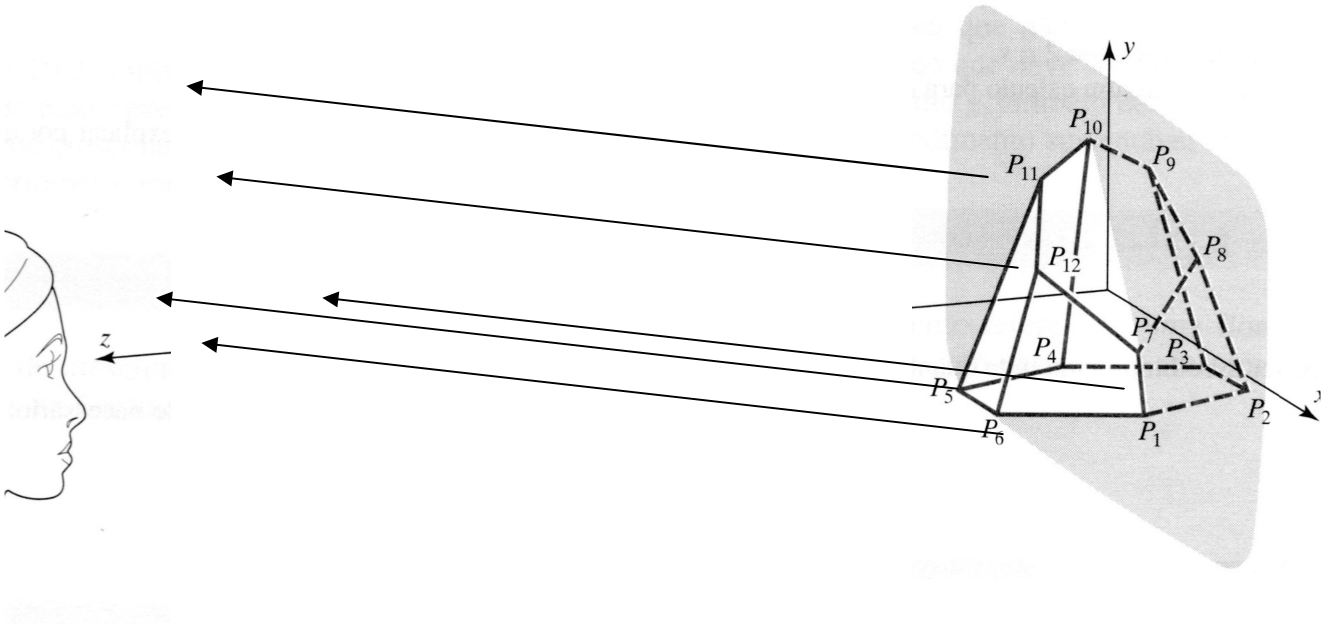
Mas as outras projeções paralelas axonométricas

- as DIMÉTRICA e TRIMÉTRICA quase nunca são usadas:

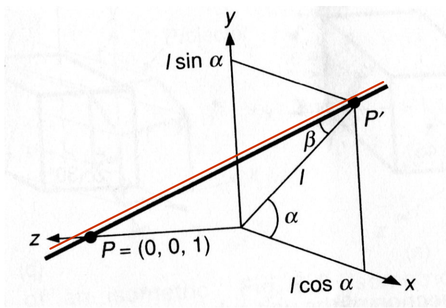


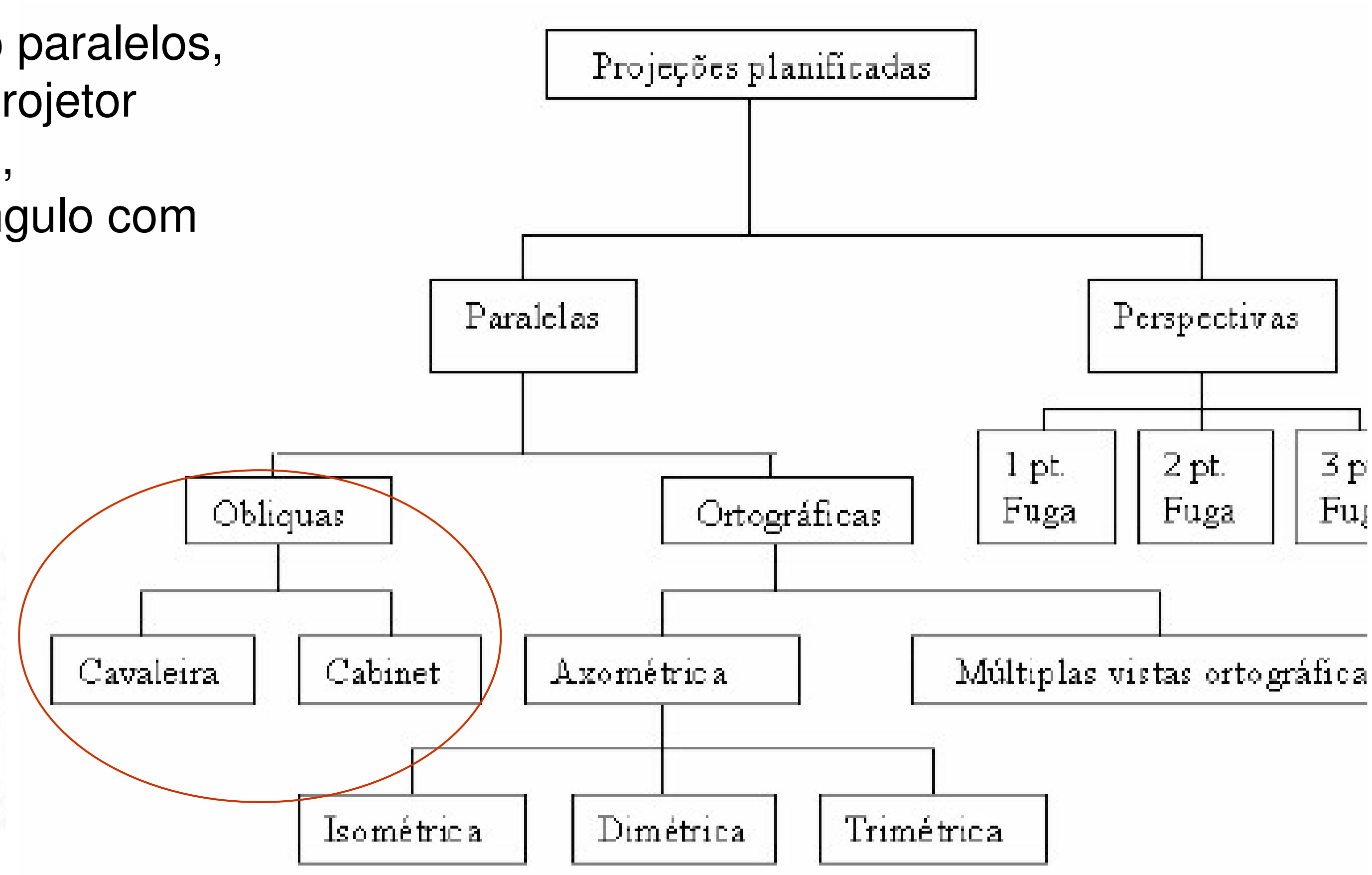
PROJEÇÃO PARALELA OBLIQUAS

Este é um caso especial das projeções paralelas onde os raios projetores não são ortogonais ao plano de projeção.



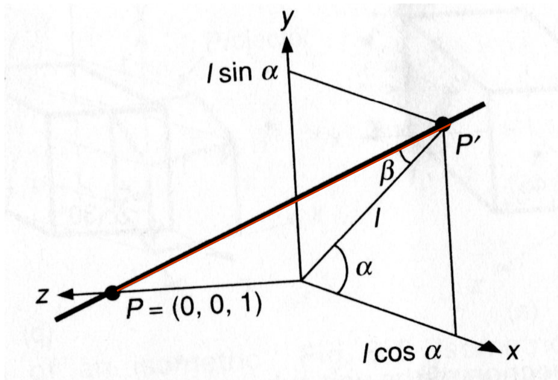
neste caso , como são paralelos,
a direção de um raio projetor
é a mesma para todos,
que farão o mesmo ângulo com
o plano de projeção.

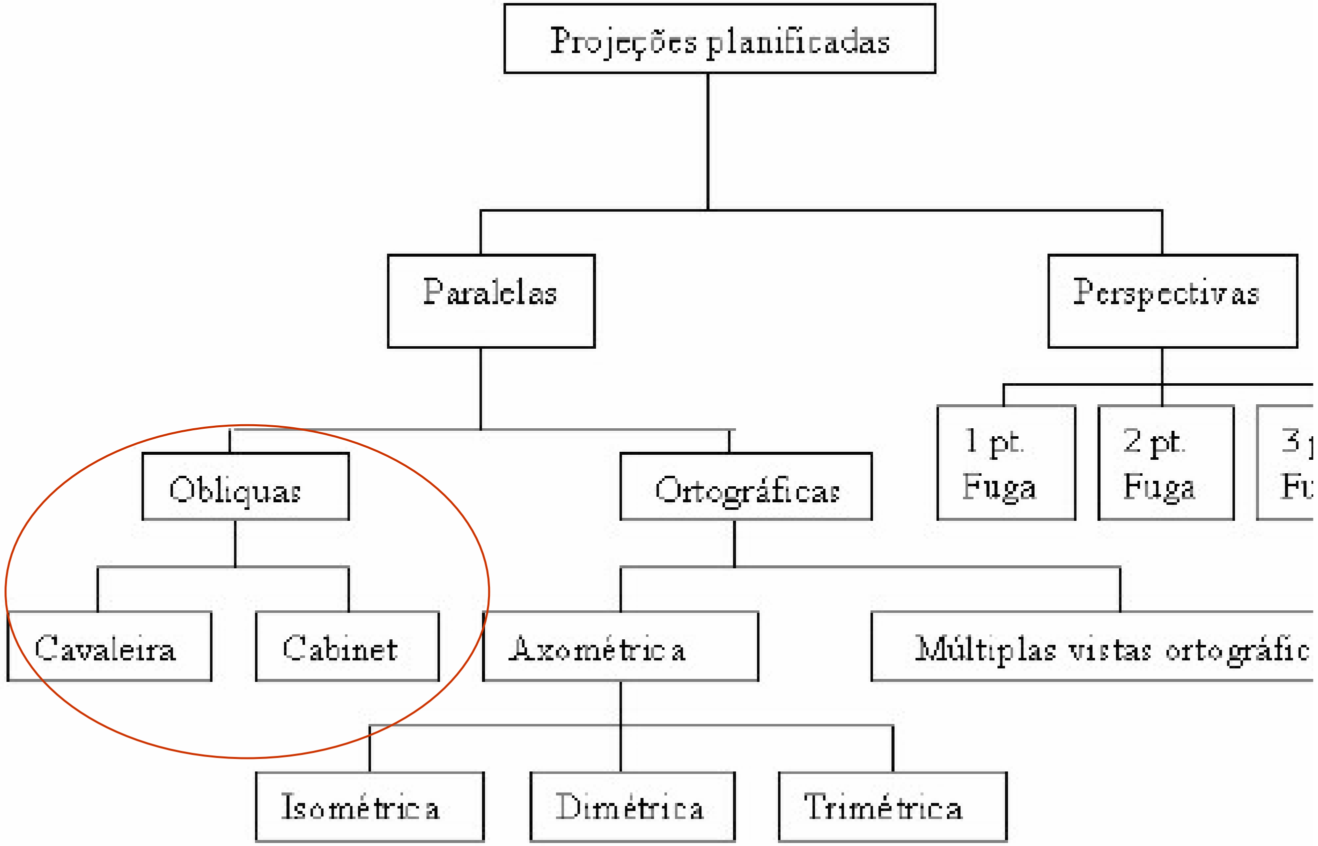




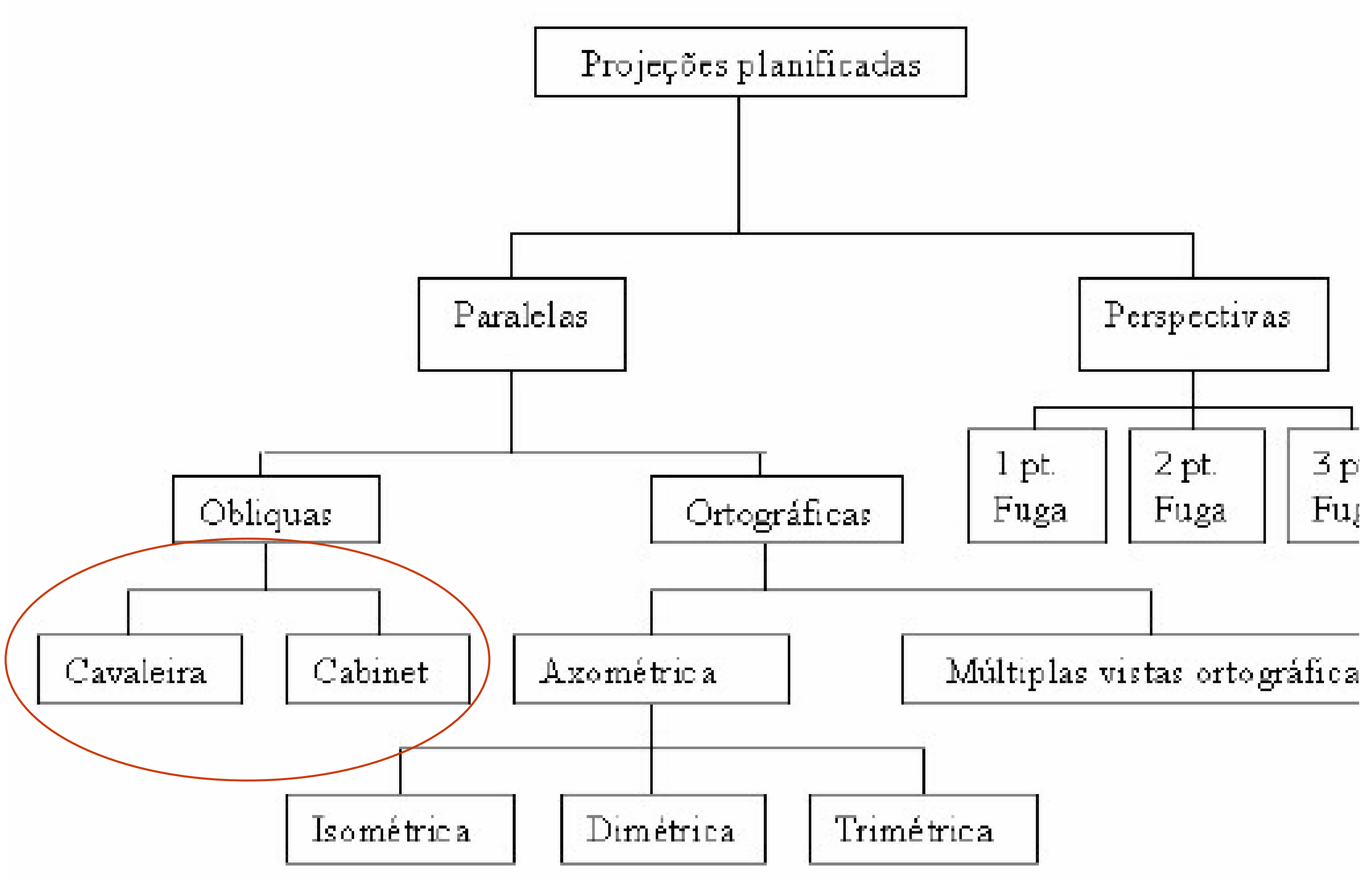
um raio projetor faz um ângulo ***β***
com o plano de projeção (Z=0)

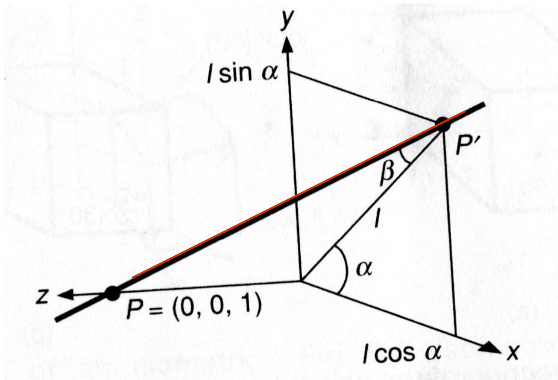
Dois destes infinitos ângulos tem significado especial





Por definição na **Cavaleira** (cavalier) o eixo com direção perpendicular ao plano de projeção não é alterado. Ou seja os raios projetores devem chegar com um ângulo **ß** de 45 graus no plano de projeção!



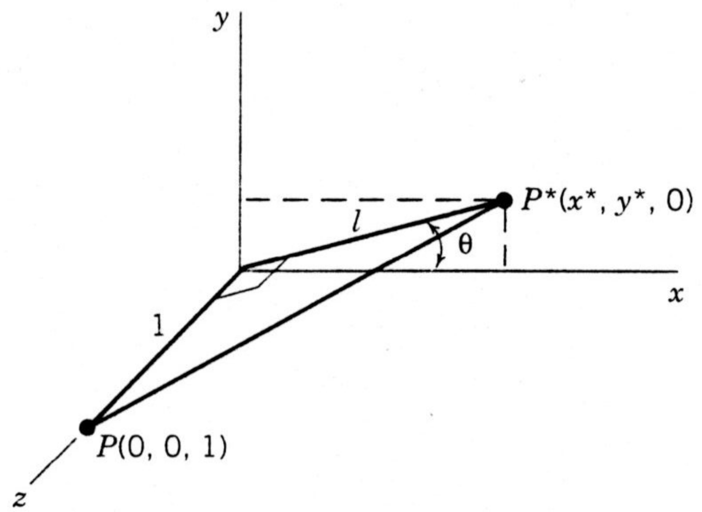


Por definição na **Cabinet** a direção perpendicular ao plano de projeção é **reduzida a metade** *.* Ou seja os raios projetores devem chegar com um ângulo ***ß*** cuja tangente seja 1/(0,5) = 2 ! Ou ***ß = 63,434949°***

PROJEÇÃO PARALELA OBLIQUA

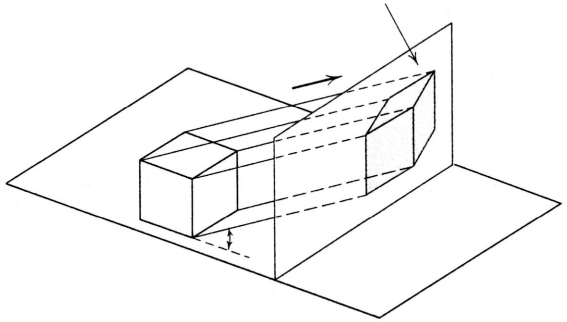
Que matriz faria a gente ter as p. p. obliquas *?*
Depende do efeito que você quer ver o resultado final!

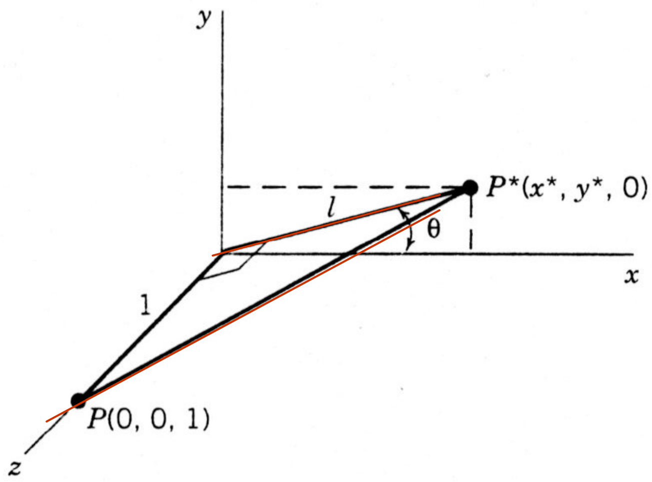
Geralmente ela é obtida considerando como um vetor unitário perpendicular ao plano de projeção (0,0,1) é mostrado ao ser projetado.



Projeção paralela oblíqua

- Raios projetores paralelos mas não perpendiculares ao <u>plano de projeção</u>





$$x^* = l \cos \theta$$

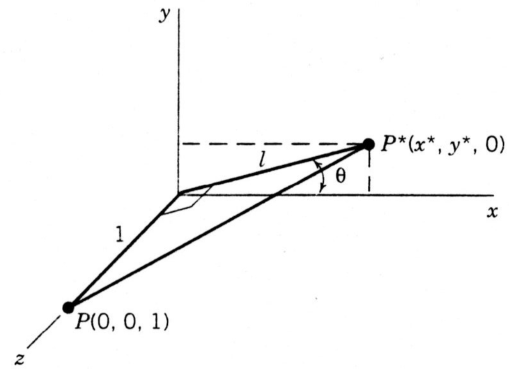
$$y^* = l \sin \theta$$

Geralmente essa é obtida considerando como um vetor unitário será mostrado. Por exemplo a matriz ao lado leva o ponto (0,0,1,1) em (l cos θ , l sin θ, 0,1) , logo...

$$[M_{\mathrm{OBL}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ l\cos\theta & l\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Projeção paralela oblíqua

$$x^* = l\cos\theta$$
$$y^* = l\sin\theta$$



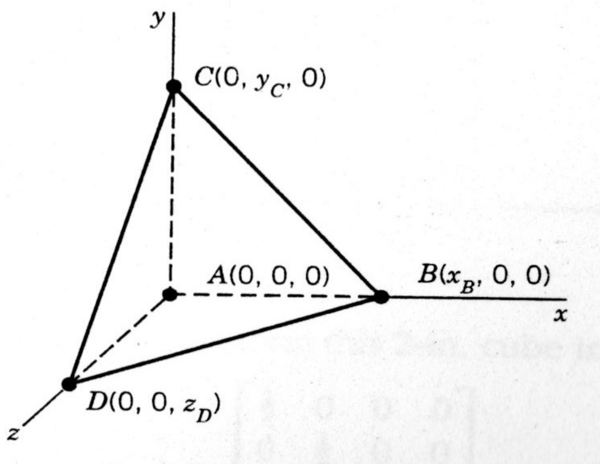
$$[M_{OBL}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ l\cos\theta & l\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Para uma projeção obliqua</u>

Cavaleira (cavalier) *l* = 1 com θ = 45, logo a matriz fica:

$$[M_{OBL}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Projeção paralela oblíqua



Como um tetraedro com os vértices:

$P_1(3,4,0),\ P_2(1,0,4),\ P_3(2,0,5),\ P_4(4,0,3)$

Ficaria projetado pela matriz anterior?

i.e. na **Cavaleira** (cavalier) *l* = 1 com θ = 45

$$[P^*] = [P][M_{OBL}] = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[P^*] = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3.83 & 2.83 & 0 & 1 \\ 5.54 & 3.54 & 0 & 1 \\ 6.12 & 2.12 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Desenhe para entender como Ficaria?

Agora você consegue projetar qualquer

Tipo de paralela....

Pois é só descobrir que matriz faz isso ! ! !

Referências

- E. Azevedo, A. Conci, C. Vasconcelos, Computação Gráfica Teoria e Prática: Geração de Imagens, Elsevier; 2018, Rio de Janeiro.
- Vera B. Anand, Computer Graphics and Geometric Modeling, John-Wiley,1993. BCTC/UFF - 006.6 A533 1993