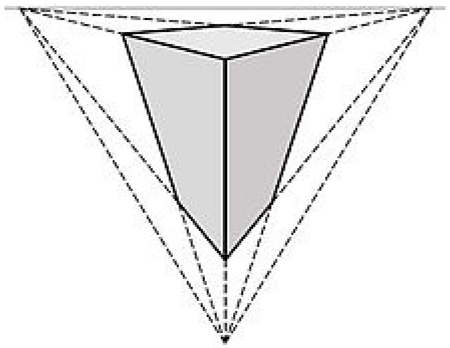
http://computacaografica.ic.uff.br/conteudocap2.html

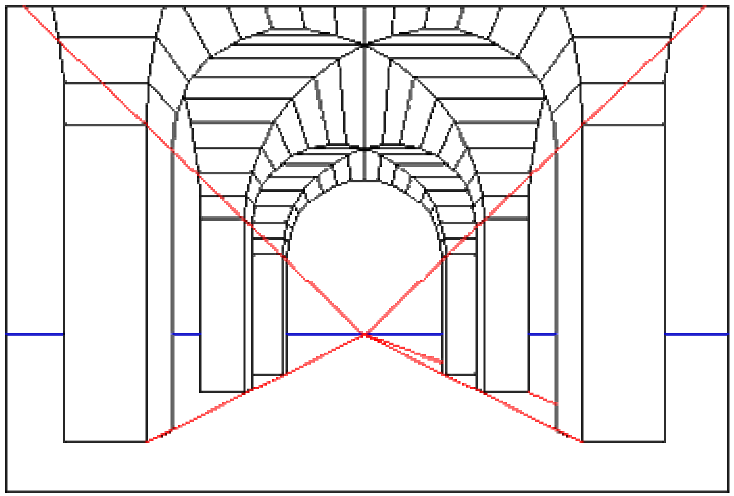
aula 9

Perspetivas

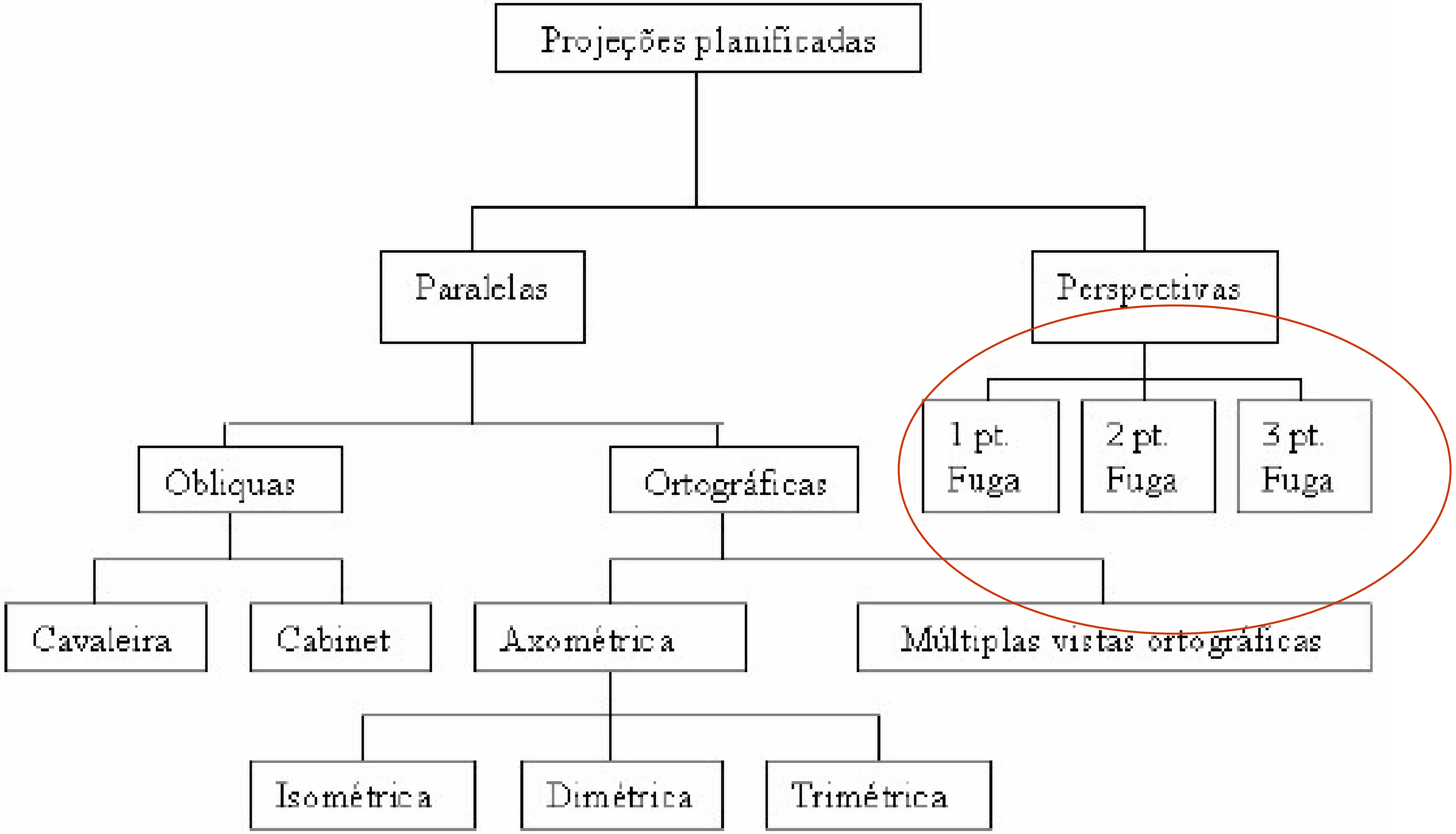
2018/2 – IC / UFF

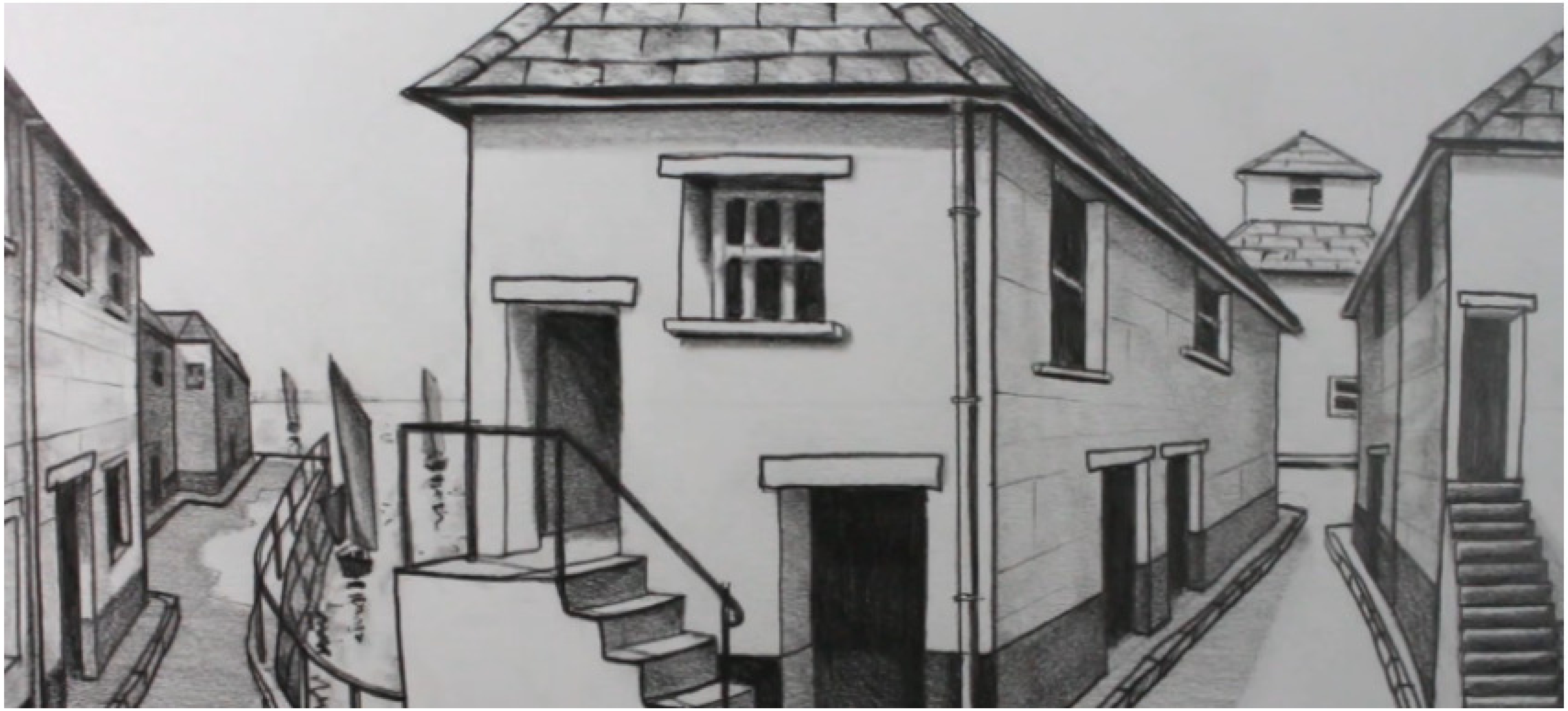
Sempre mais real Projetar em Perspectivas





Perspectivas se classificam de acordo com o numero de pontos de FUGA





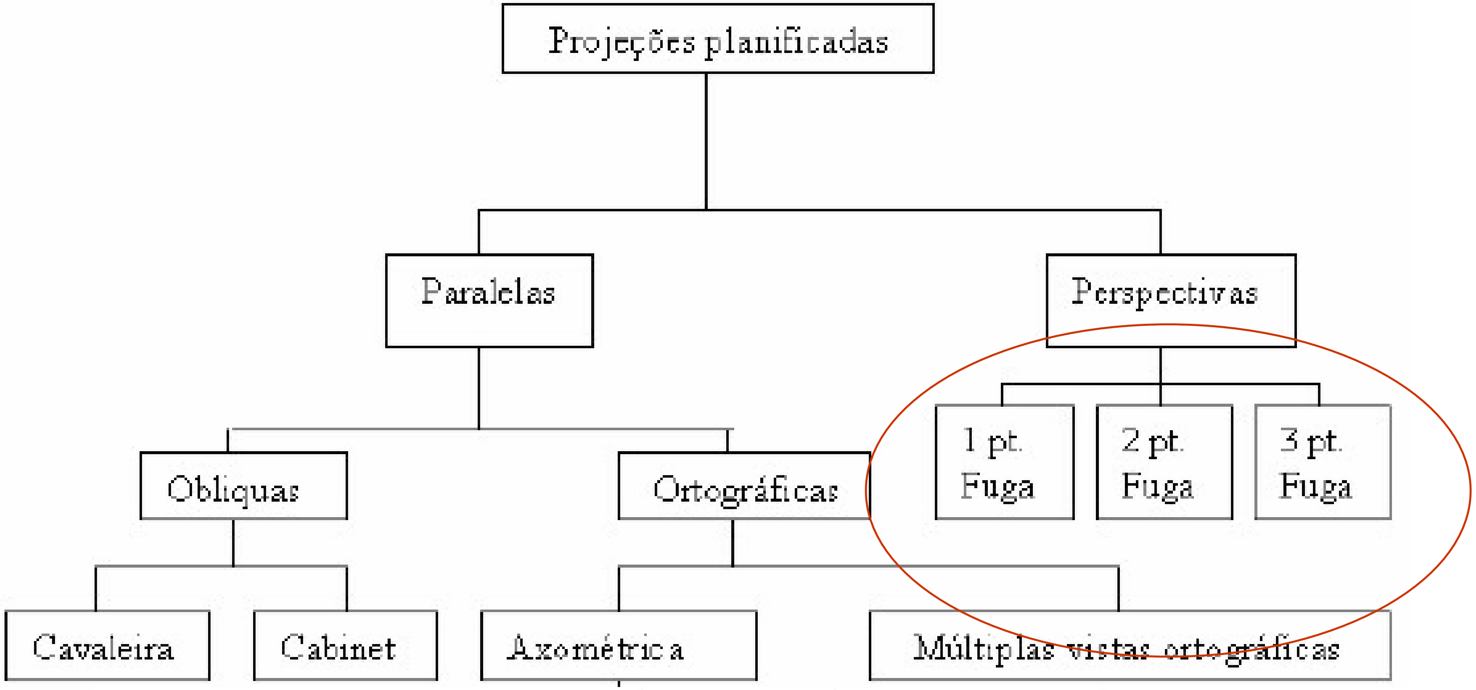
O que são pontos de FUGA?

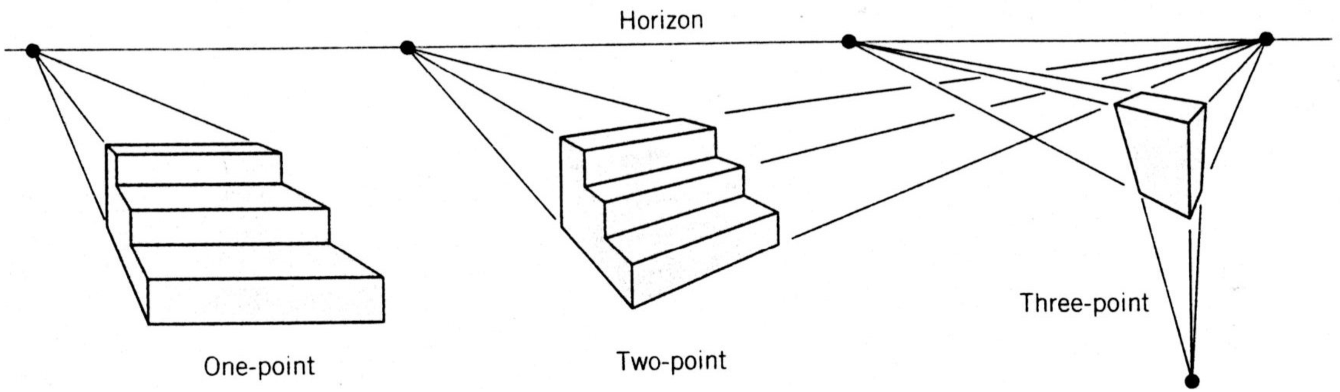
Lugares em que as paralelas
parecem convergir = ponto de fuga

Quantos pontos de fuga podem ter?

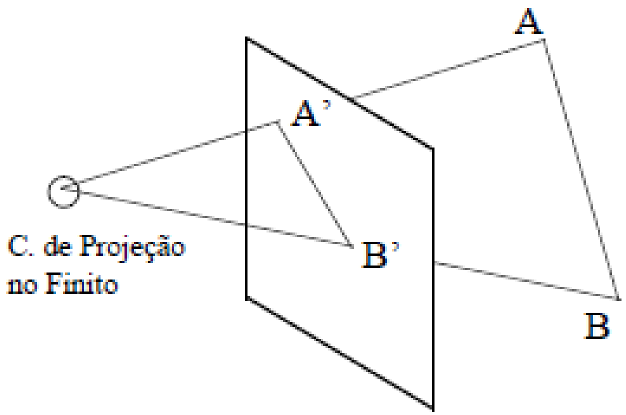
Quantos
Você vê
nesta Foto
de uma rua

de (Podgorica)
Montenegro)


Projeções planificadas
Paralelas
Perspectivas
Obliquas
Ortográficas
1 pt. Fuga
2 pt. Fuga
3 pt. Fuga
Cavaleira
Cabinet
Axométrica
Múltiplas vistas ortográficas


Horizon
One-point
Two-point
Three-point

Projeções em perspectivas



Como se obtém as

Matrizes que fazem esse efeito?

Por similaridade de triângulos!!!!

Para facilitar o desenvolvimento vamos considerar :

- A projeção em um plano de projeção $Z=f$ *e*
- o centro de projeção na origem do sistema de eixos: Cp = (0,0,0) .
- Um ponto genérico no R^3: X = (x, y, z) e a **definição** deste tipo de definição.
- Assim a projeção ***u*** de X será definida pelo ponto onde os raios projetores cruzarem o plano de projeção $Z = f$:

$$\boldsymbol{u} = (u,\ v,\ w\ )$$

Por similaridade de triângulos

a projeção ***u* estará no plano de projeção então :**

$\boldsymbol{u}$ = (u =?, v =?, w = f)

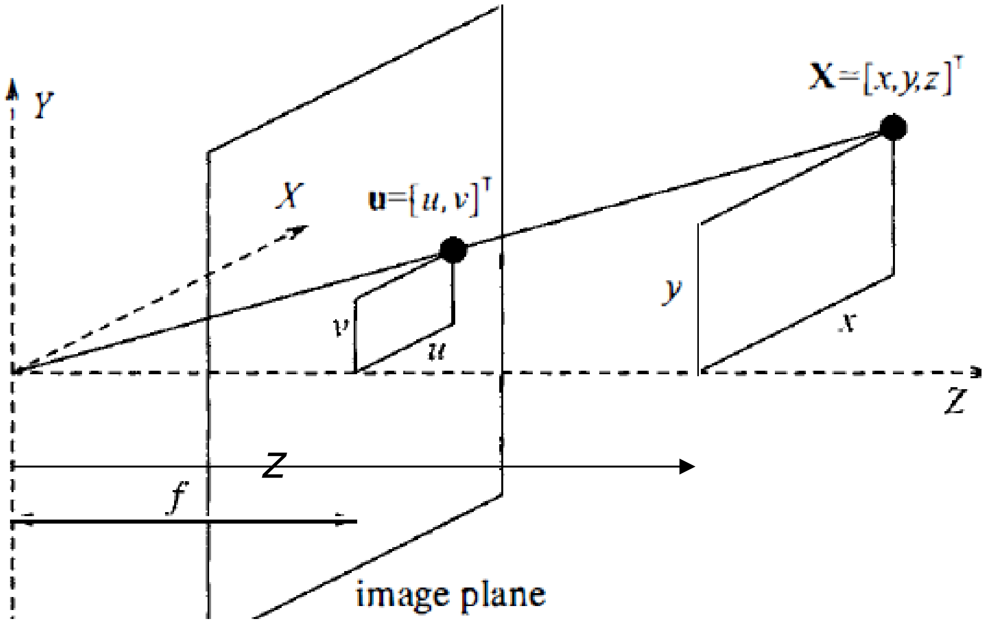
Supondo centro de projeção
Na origem $(x_{cp}, y_{cp}, z_{cp}) = (0,0,0)$

$$u = \frac{x\,f}{z}, \qquad v = \frac{y\,f}{z}.$$

Que Matriz faz esse efeito?

Repare que teremos
uma P. paralela se:

$z \rightarrow \infty \quad f \rightarrow \infty.$



Essa vista do problema

- Não ficou muito obvia para a matriz!
- Então vamos alterar os elementos importantes de posição.
- plano de projeção $\boldsymbol{z}\mathbf{=0}$
- pontos a ser projetado $P\ (x\ ,\ y\ ,\ z\ )$
- Ponto projetado $P^*\ (x^*\ ,\ y^*\ ,\ z^*\ )$
- *Centro de projeção,* Cp, *no eixo* $z = Zcp$

Considerando *P (x , y , z)*

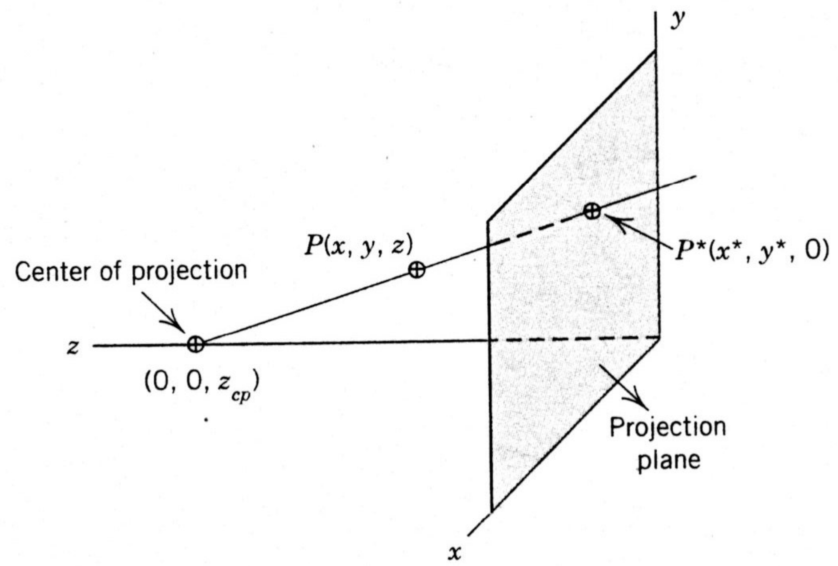
- Qual sua relação com sua **projeção** no plano ***z*=0** a partir de um **centro de projeção no eixo *z***

  Cp = (0 , 0 , z_{cp}) ?

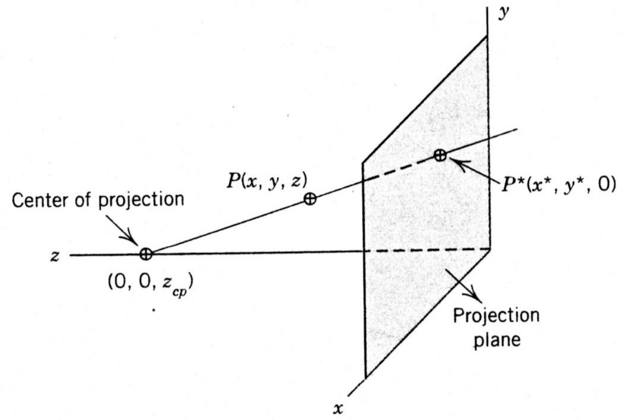
$$\frac{x^*}{x} = \frac{z_{cp}}{z_{cp} - z}$$

Supondo centro de projeção no eixo z,
Mas fora da origem em Cp= *(x_{cp},y_{cp}, z_{cp})*
=(0,0,Zcp)

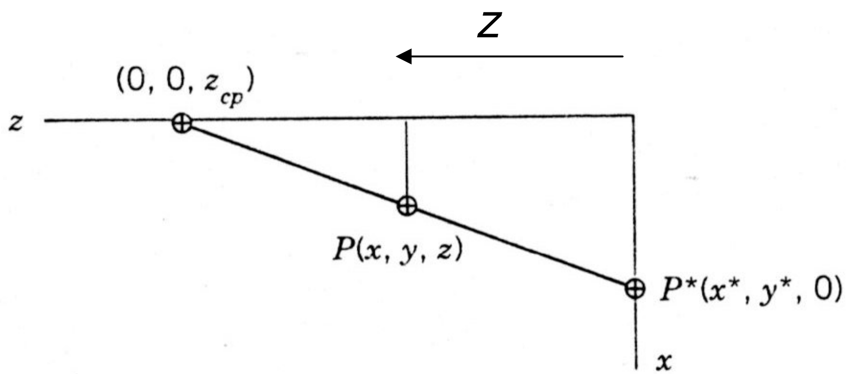
P (x , y , z) ↔ P* (x*, y*, 0)



Considerando plano $z\,x$, ou $y = 0$



- Por semelhança de triângulos :



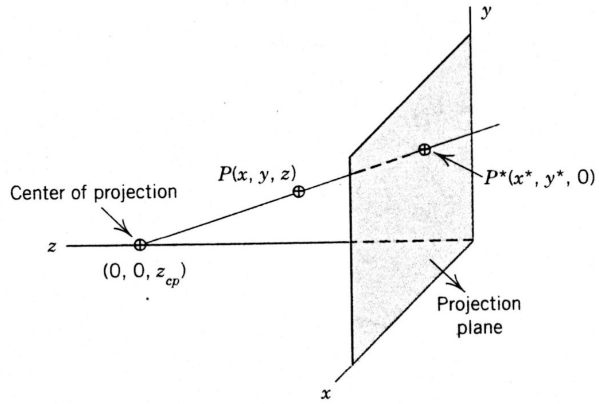
$$\frac{x^*}{x} = \frac{z_{cp}}{z_{cp} - z}$$

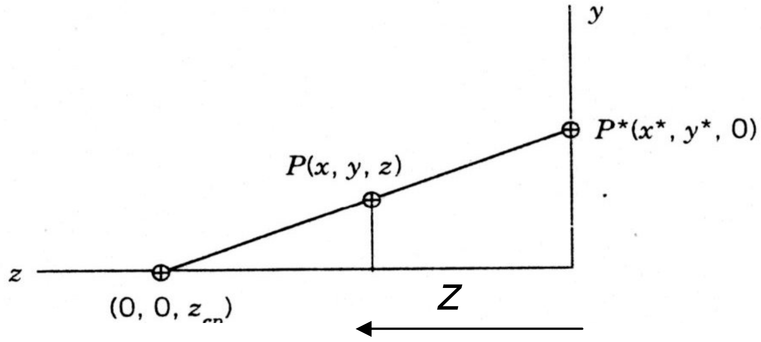
Organizando:

$$x^* = \frac{x}{1 - \dfrac{z}{z_{cp}}}$$

P (x , y , z) ↔ P* (x*, y*, 0)

Considerando plano *z y* ,
ou $x = 0$





- Por semelhança de triângulos :

$$\frac{y^*}{y} = \frac{z_{cp}}{(z_{cp} - z)}$$

Organizando

$$y^* = \frac{y}{1 - \dfrac{z}{z_{cp}}}$$

P (x , y , z) ↔ P* (x*, y*, 0)

Os elementos do pontos projetado ficam :

$$P^* = [x^* \quad y^* \quad 0 \quad 1] = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{\left(1 - \dfrac{z}{z_{cp}}\right)} & \dfrac{y}{\left(1 - \dfrac{z}{z_{cp}}\right)} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O que equivale a apena mudar a relação de homogeneidade:

$$= \begin{bmatrix} x & y & 0 & \left(1 - \dfrac{z}{z_{cp}}\right) \end{bmatrix}$$

Ou Matricialmente: $$= [x \quad y \quad z \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{z_{cp}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[M_{PER}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{z_{cp}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim achamos a matriz perspectiva para o **centro** de projeção sobre o eixo *z*

Exemplo: supondo centro de projeção *no eixo z* com *Zcp = -5*

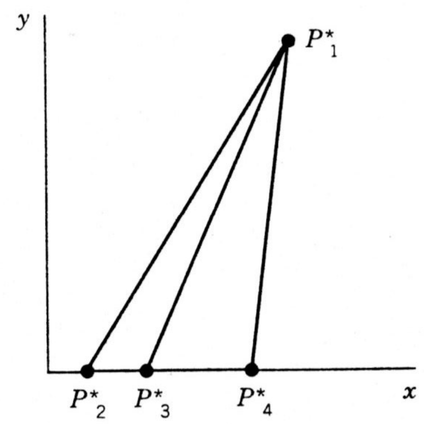
- Como um **tetraedro** com os vértices:

$P_1(3,4,0),\ P_2(1,0,4),\ P_3(2,0,5),\ P_4(4,0,3)$

- Ficaria?

$$[P^*] = [P][M_{\text{PER}}] = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[P^*] = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1.8 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 1.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ \frac{5}{9} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{5}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Para projeção no mesmo plano

- Mas com o Cp em uma posição mais geral
- Basta concatenar essa matriz com uma matriz de translação
- *Que leve* Cp de $(0,0,Z_{cp})$ *para* (x_{cp}, y_{cp}, z_{cp})

- *Mas e para mais centros de projeção?*

A matriz perspectiva para o **centro** de projeção sobre o eixo *z*

$$[M_{\mathrm{PER}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{z_{cp}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pode ser vista como a concatenação de uma **perspectiva** e uma **projeção ortográfica no plano *z* = 0**

$$[M_{\mathrm{PER}}] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-1}{z_{cp}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{perspective transformation}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{orthographic projection}}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{-1}{z_{cp}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{perspective projection}}$$

Repare que essa matriz colocou valores ≠0 em uma nova área da

nossa matriz de transformação em coordenadas homogêneas !

$$\left[\begin{array}{c|c} 3 \times 3 & 3 \times 1 \\ \hline 1 \times 3 & 1 \times 1 \end{array}\right]$$

$$[M_{\mathrm{PER}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dfrac{-1}{x_{cp}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

projeção sobre o eixo z

- Se com o centro de projeção sobre o eixo z, tivemos valor ≠0 na terceira linha..... Então......
- Para uma projeção **sobre o eixo *x***, ou com centro de projeção em (x_{cp}, 0, 0) teremos:

$$[M_{\text{PER}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dfrac{-1}{x_{cp}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para uma projeção sobre o eixo y, ou com centro de projeção em (0, y_{cp} , 0)

$$[M_{\text{PER}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{-1}{y_{cp}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Resumindo perspectivas com 1 centro de projeção

sobre:

$$x \text{ axis: } [M_{\text{PER}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dfrac{-1}{x_{cp}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y \text{ axis: } [M_{\text{PER}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{-1}{y_{cp}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E sobre z:

$$[M_{\text{PER}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{z_{cp}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para obter matrizes com 2 centros de projeção ?

- É só colocar valores não nulos onde apropriado na matriz homogênea ! ! !

matrizes com 2 centros de projeção:

For 2-point perspective:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elas podem ser consideradas como a concatenação de duas com

1 centro de projeção ! ! !

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para obter matrizes com 3 centros de projeção:

- É só colocar valores não nulos onde apropriado na matriz homogênea ! ! !

For 3-point perspective:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E nestas onde deve estar

O **centro de projeção** em relação aos Valores ***r,s,t*** que indicam os centros de projeção sobre os eixos ***x, y*** e ***z*** respectivamente?

Comparem e pense:

que tal em:

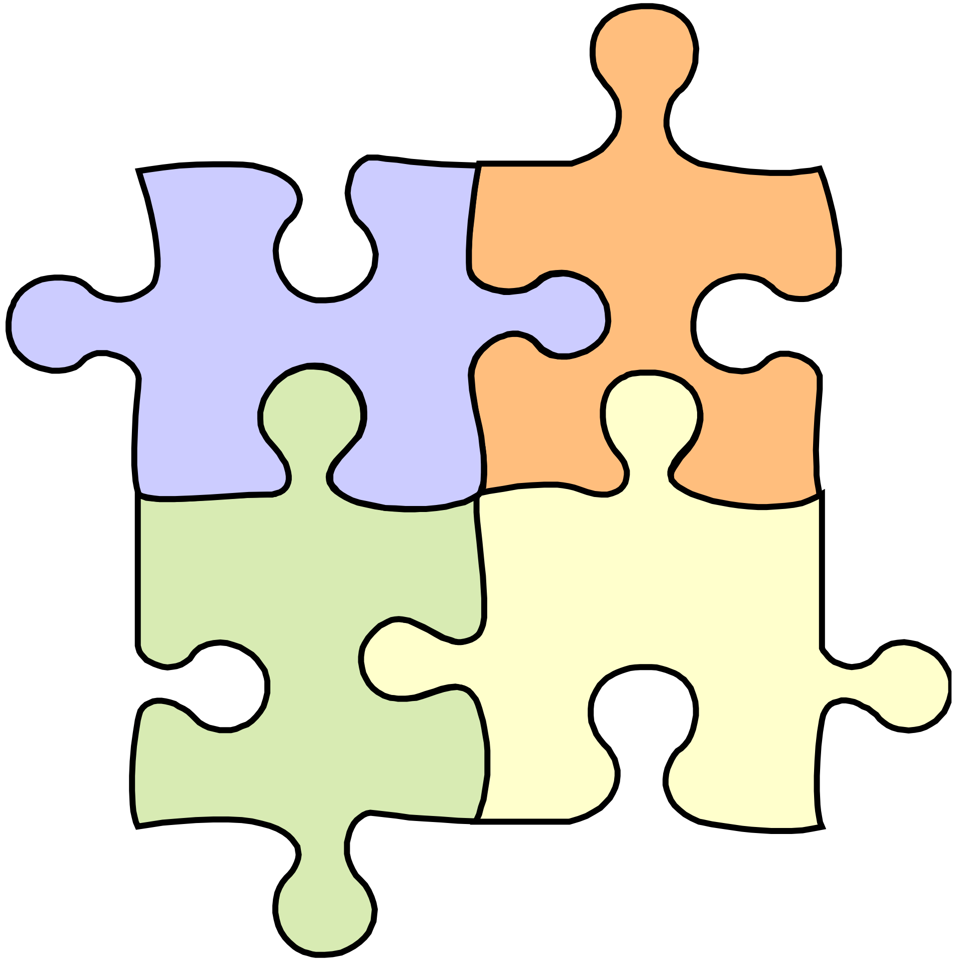
$(-1/Xcp, 0, 0)$ - > sobre o eixo ***x,***

$(0, -1/Ycp, 0)$ - > sobre o eixo ***y*** e

$(0, 0, -1/Zcp)$ - > sobre o eixo ***z***

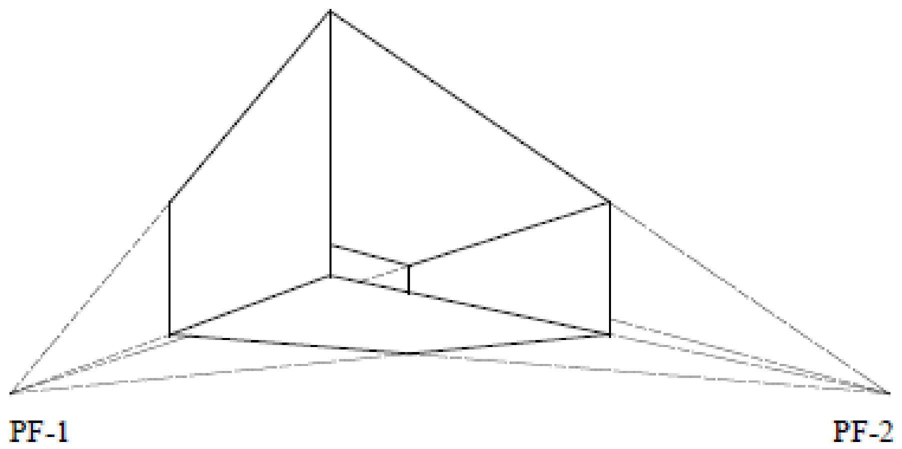
Tudo bem já sabemos projetar

- Em perspectivas com 1,2 ou 3 centros de projeção....
- Mas a classificação não era por ai e sim por.....



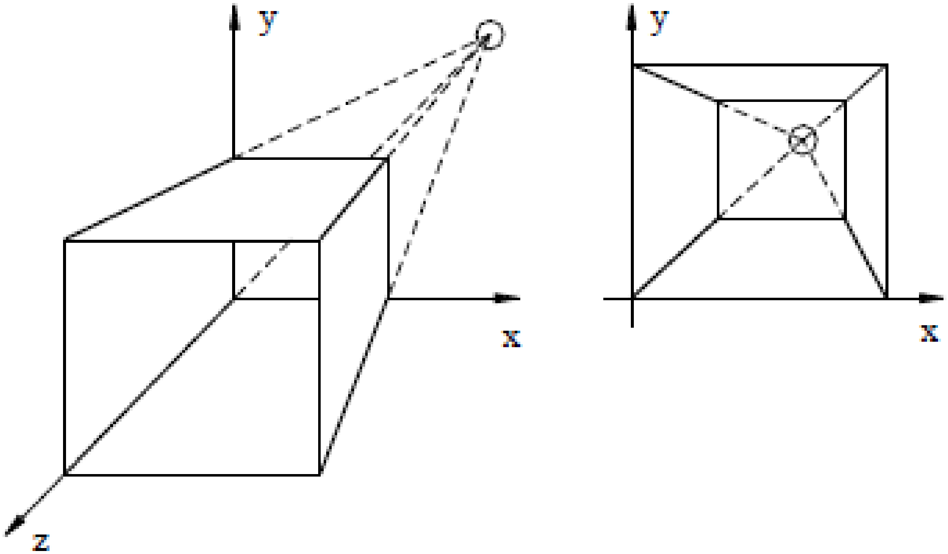
Pontos de fuga principais

- Nota-se que cada conjunto de linhas paralelas no espaço pode ter associado um ponto-de-fuga. Assim, com o objetivo de definir um critério de classificação, somente as linhas paralelas aos eixos são consideradas.



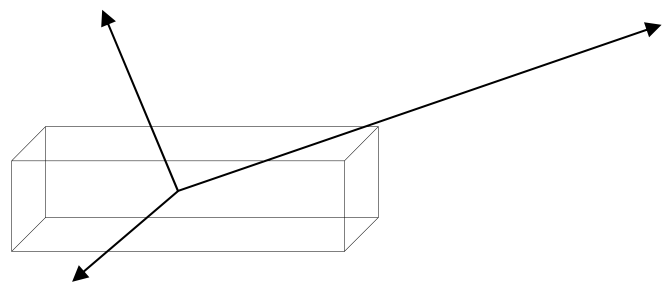
Pontos de fuga principais

- Ilusão de que conjuntos de linhas paralelas (não-paralelas ao plano de projeção) convergem para um ponto;
- Pontos de fuga principais são aqueles que dão a ilusão de intersecção entre um conjunto de retas paralelas com um dos eixos principais.



O que são eixos principais?

- Os possiveis eixos de um objeto onde ele terá Maior e menor momento de inércia.
- Não há produto de inércia para os eixos principais
- Podem ser entendidos como os do menor BoundingBox (BB) possível para o objeto de interesse.

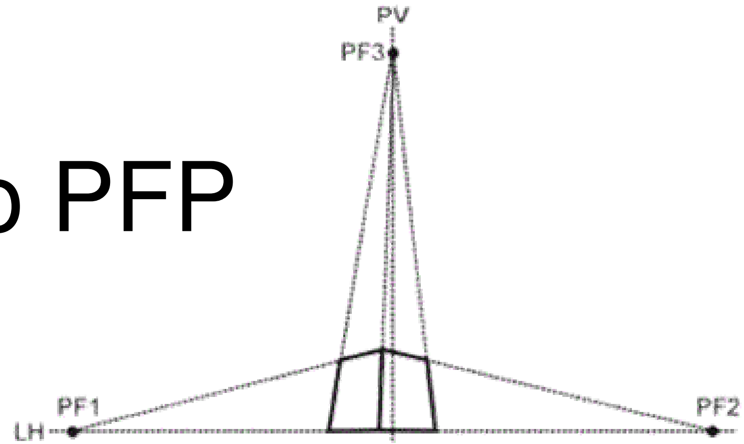


Esses são PFP

Ligando
as retas
voce vera
que elas
se
encontram
em 3
pontos!

vendo a cidade de helicóptero

Esses são PFP



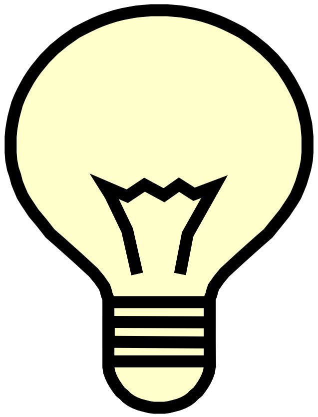
Esses NÃO são PFP

estamos prontos para generalizar geral!!!

Então esses pontos são

.......Os pontos de fuga principais !

Onde as paralelas parecerão se encontrar na direção dos eixos principais.....



quase!.

Lembre que mesmo quando usávamos 2 x 2 e a forma transposta

- (pós multiplicando o ponto a ser transformado)

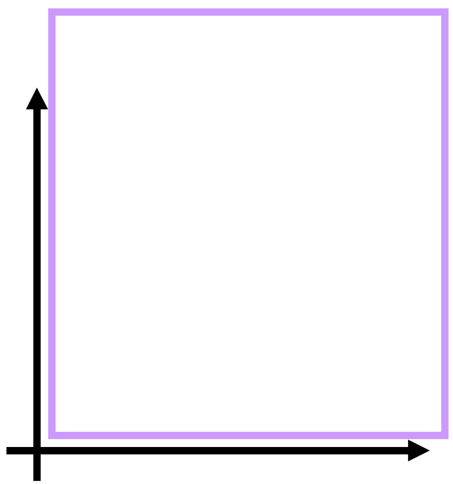
- Já tínhamos visto isso?

- (quando imaginávamos o que faria a parte que ainda não estávamos usando da matriz de transformação ! ! !)

Transformação Perspectiva

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ p & q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ px+qy+1 \end{pmatrix}$$

Por exemplo um paralelogramo qualquer ficará um trapezio!!!



(10,10)
(100,10)
(100,100)
(10,100)

p=0,2 e q = 0,1
(x, y, 1) - > (x, y, px+qy+1)

(10/4,10/4) = (2,5 ; 2,5)
(100/22,10/22)=(4,5 ; 0,5)
(100/31,100/31)= (3,2 ; 3,2)
(10/13,100/13)= (0,7 ; 7,7)

E aquela historia de que as **retas paralelas se encontram no infinito**!!!

Coordenadas homogeneas deixam a gente ter o efeito de um ponto no infinito bem facil !!!

(pedindo desculpa aos matemáticos pela notação!
Os pontos 2D (x,0,0) (0,y,0) ou os
pontos 3D (x,0,0, 0)
(0,y,0, 0) (0,0,z, 0) seriam infinitos nas direções do eixos x,y,z ......)
e para onde esse ponto seria projetado?

Vejamos na nossa Transformação Perspectiva 2D genérica:

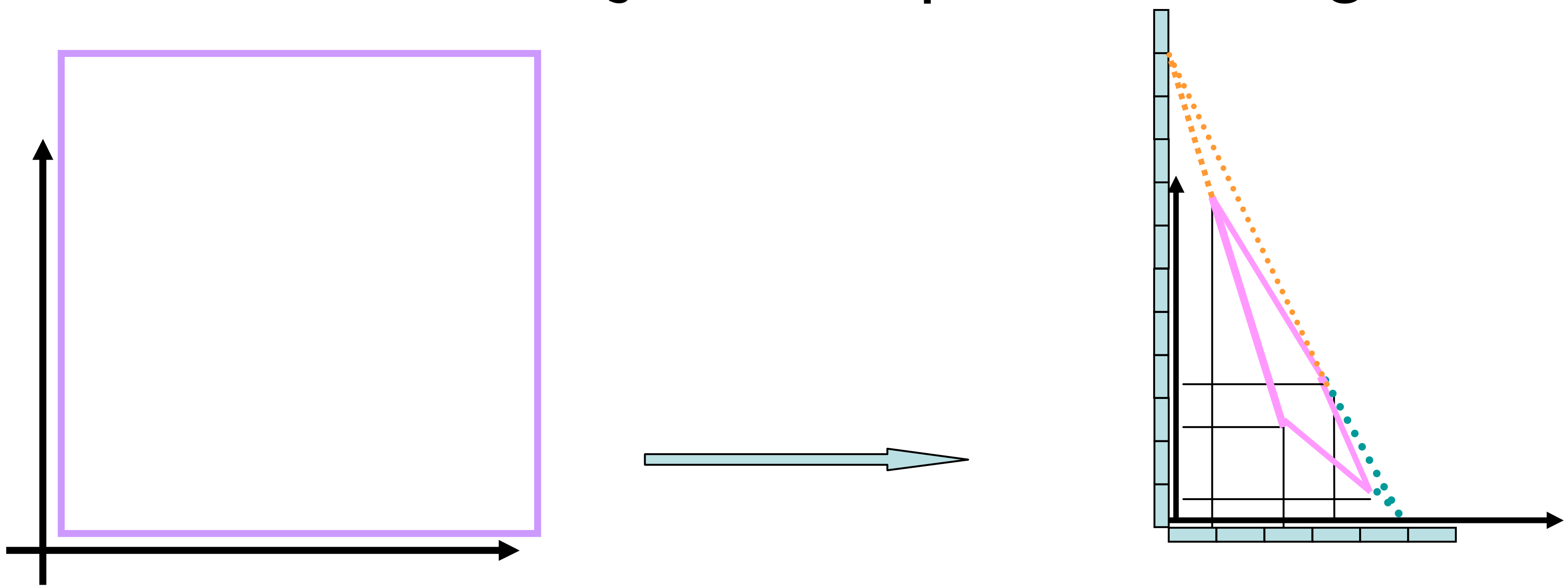
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ p & q & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ px+qy \end{pmatrix}$$

Os pontos 2D (x,0,0) (0,y,0) vão parar

Em: $x/(px)=1/p$, $y/(qy)=1/q$

Esse é o .....

um ponto que as **retas paralelas nas direções x e y se encontram** na nossa Transformação Perspectiva 2D genérica...



Ou seja a matriz 2D

- De projeção:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ p & q & 1 \end{pmatrix}$$

- Tem 2 pontos de fuga
- Localizados no eixo x em (1/p , 0, 1) e no eixo y em (0 , 1/q, 1)

Matriz Projetiva

- Uma transformação projetiva *M* do R^3 é uma transformação linear do R^4.
- A matriz 4 x 4 de uma transformação projetiva representa uma transformação afim tridimensional.

$$M = \begin{pmatrix} a & d & g & m \\ b & e & h & n \\ c & f & i & o \\ p & q & r & s \end{pmatrix}$$

Transformação Perspectiva

- Ponto P do espaço afim é levado no hiperplano $w = r\,z + 1$
- Se $z = -1/r$, então P é levado em um ponto no infinito.
- Pontos do espaço afim com $z = 0$ não são afetados.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ rz+1 \end{pmatrix}$$

Ponto de Fuga Principal

- A imagem do *“ponto infinito”* na direção *z*, tem coordenadas [0, 0, 1/*r*, 1]
  - Este é o ponto de **fuga principal** da direção *z*.
  - Semi-espaço infinito $0 < z \leq \infty$ é transformado no semi-espaço finito $0 < z \leq 1/r$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ r \end{pmatrix}$$

Mais de Um Ponto de Fuga

- A transformação perspectiva com **3 centros de projeção**:
- Tem **3 pontos de fuga**, principais sobre os eixos x,y,z nos pontos:
  - [1/*p*, 0, 0, 1]
  - [0, 1/*q*, 0, 1]
  - [0, 0, 1/*r*, 1]

$$M=\begin{pmatrix} a & d & g & m \\ b & e & h & n \\ c & f & i & o \\ p & q & r & s \end{pmatrix}$$

O mesmo resultado é obtido com a aplicação em cascata de 3 transformações perspectivas, com um único ponto de fuga em cada eixo.

conclusão

- Vimos como dados de 1 a 3 centros de projeçao definir as matrizes perspectivas correspondentes.
- Depois dado uma certa matriz de projeção com 1 a 3 pontos de fuga, vimos como dessa matriz definir as coordenadas destes pontos de fuga.
- Ou seja: sabemos como fazer tudo o que é possivel neste tipo de representação 3D.

Considerações finais:

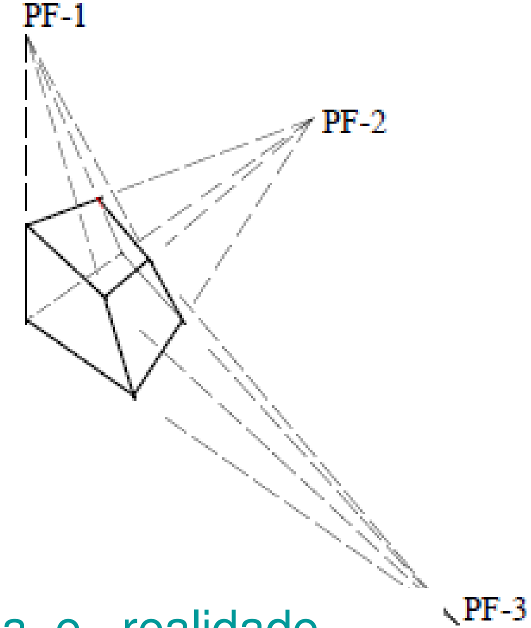
- Muitas vezes tem-se o mesmo efeito por mais de um caminho ....

Basta Implementar Transformações Com um Único Ponto de Fuga

- Transformações perspectivas com dois pontos de fuga equivalem a combinação de:
  - rotação ao redor de um eixo perpendicular ao eixo que contém o centro de projeção.
  - transformação perspectiva com um único ponto de fuga.
- Com duas rotações, obtêm-se transformações com três pontos de fuga.

Algumas posições dos pontos de fuga podem não ser realista a menos que você esteja vendo a cena de uma posição muito particupar

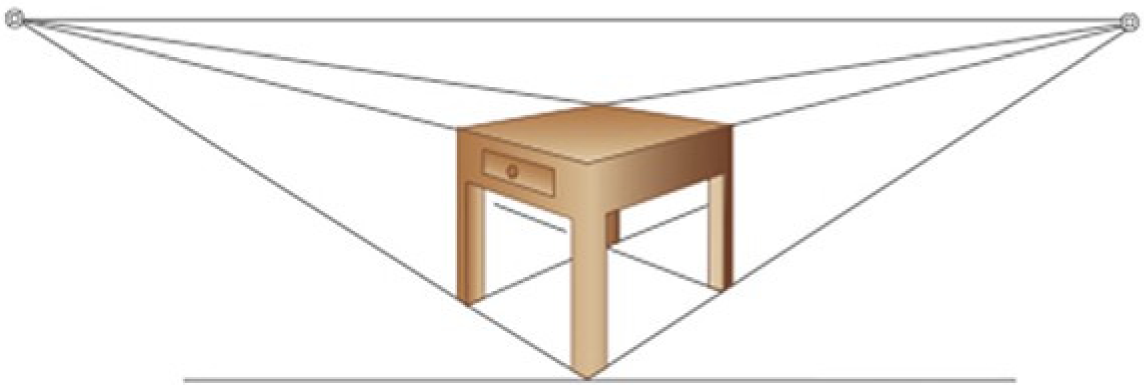
Projeções perspectivas de três pontos-de-fuga são usadas menos frequentemente, dado que elas acrescentam pouco realismo ao já alcançado pelas projeções de dois pontos-de-fuga.



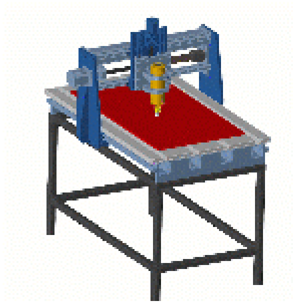
3 pontos de fuga e realidade

Antes de seguir a diante

- Com maiores niveis de realismo



- E animação!

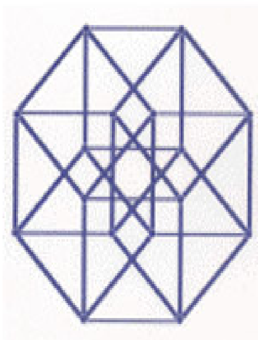


Lembre que projetar Sempre Acarreta Perder Informação

Curiosidades: Como podemos ver um **cubo no R4**?
Pelas suas projeções do R3!
Que também precisam ser projetadas para desenharmos em um plano!!!

http://isgg.net

International Society for Geometry and Graphics



ISGG

Referências

- E. Azevedo, A. Conci, C. Vasconcelos, Computação Gráfica Teoria e Prática: Geração de Imagens, Elsevier; 2018, Rio de Janeiro.
- Vera B. Anand, Computer Graphics and Geometric Modeling, John-Wiley,1993. BCTC/UFF - 006.6 A533 1993