



# Orientação de Objetos e Imagens por Métodos Tensoriais.

PISB - 2017

**Aura Conci**

# Física. Mecânica. Estática

- Teorias de momentos de inércia de corpo rígidos.
- Momentos geométricos (também chamados de momentos de área) .
- Características do objeto a ser analisado na imagem **independente de sua orientação, tamanho ou posição.**
- Invariância quanto à rotação e translação.

# Sistemas de Coordenadas

- O Sistema de Coordenadas nos dá uma referência sobre o tamanho e a posição dos objetos na área de trabalho;
- Existem diferentes sistemas de coordenadas para descrever os objetos.

# O que são eixos principais?

- Maior e menor momento de inércia.
- Não há produto de inércia para os eixos principais
- Podem ser entendidos como os do melhor posicionamento na captura por câmera para os objeto de interesse.

# Tensoros

São entidades geométricas introduzidas na matemática e na física para generalizar a noção de escalares, vetores e matrizes.

Assim como tais entidades, um tensor é uma forma de representação que tem um conjunto de operações especiais como a soma e o produto e mesmo uma NOTAÇÃO ESPECÍFICA.

Muitas grandezas físicas são melhor representadas por uma estrutura de dados especial que outras.

Por exemplo, o peso é escalar, mas a força é uma grandeza vetorial já a Inércia, a Tensão e a deformação são tensoriais pois usam de uma relação entre dois vetores .

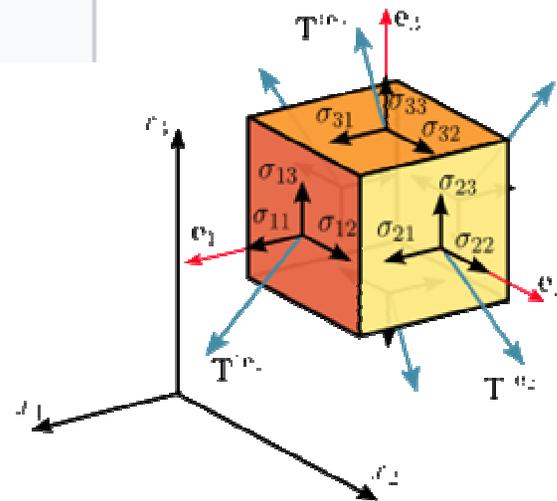
Por exemplo a tensão usa a idéia de **força** sobre a **superfície** , que na verdade é um vetor associado a **normal da área** . E assim é expressa como a relação entre estes dois vetores.

# A estrutura de dados:

Os componentes do tensor, em um sistema tridimensional de coordenadas cartesianas, formam uma matriz

$$\sigma = [ \mathbf{T}(\mathbf{e}_1) \mathbf{T}(\mathbf{e}_2) \mathbf{T}(\mathbf{e}_3) ] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \text{ cujas colunas}$$

são as forças que atuam sobre as faces  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ , e  $\mathbf{e}_3$  do cubo.

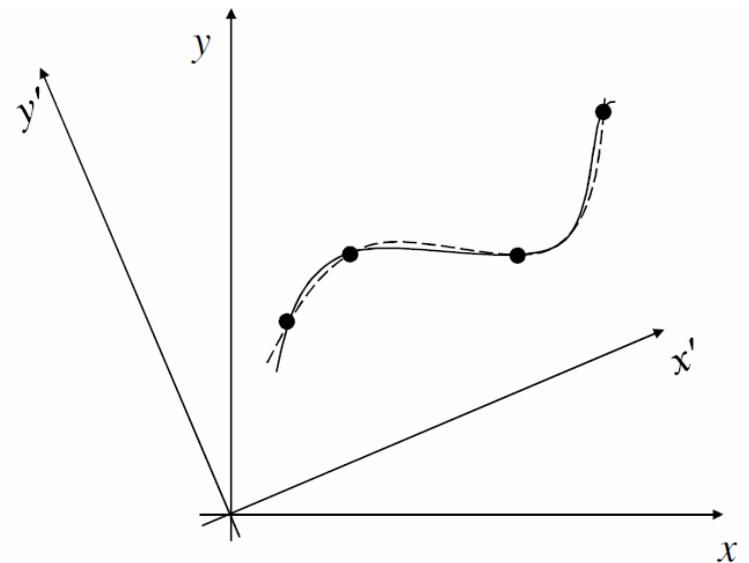


# Comportamento em relação a rotação de base

É possível obter um tensor em qualquer base de forma simples conhecendo como ele se comporta, e suas coordenadas são descritas em relação a diversos sistemas de coordenadas de base.

Um **vetor** sob mudança de base deve ser multiplicado por uma matriz adequada.

A dependência de coordenadas de um **tensor** toma a forma da transformação que relaciona a matriz de um sistema de coordenadas para o outro, **por duas multiplicações de transformações!!**



# Transformações

- ◆ Escalar.
- ◆ Vetor:
  - multiplicação de vetores ( $u, v, w$ ) e matrizes  $T$
  - soma de vetores.
  - Vetores => (linha ou coluna)
  - Transposta ( $T^T_{i,j} = T_{j,i}$ )
  - Vetor coluna ( $n \times 1$ ):  $T(u)$
  - Vetor linha ( $1 \times n$ ):  $(u') T^T$

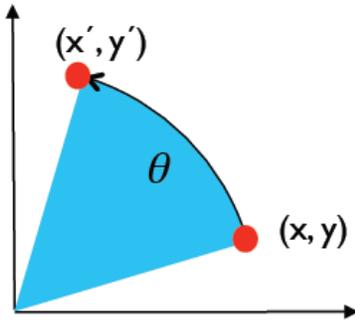
# Transformações em vetores

2D vetor coluna

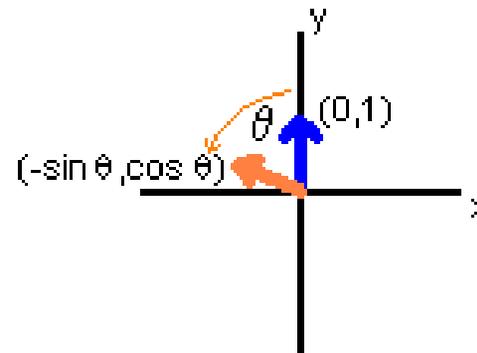
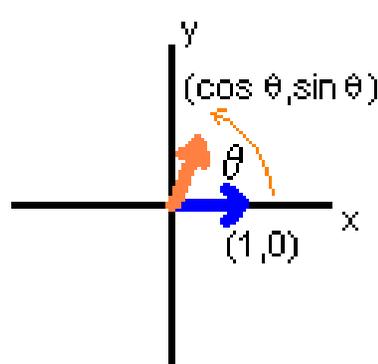
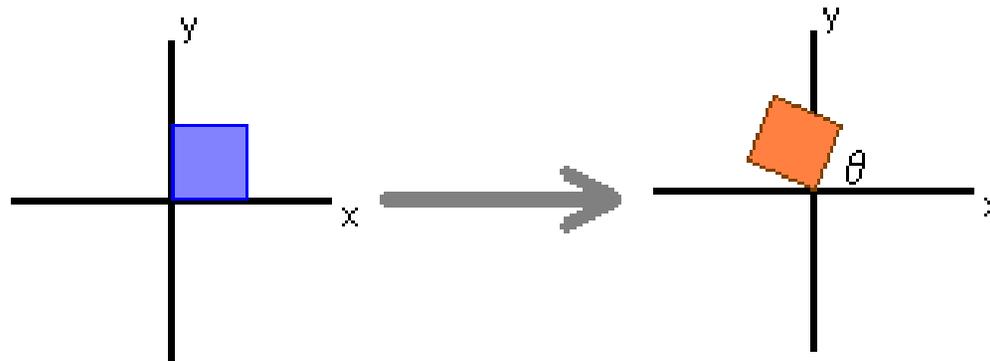
- São representadas por matrizes 2 x 2.

$$T \Rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy \\ bx+dy \end{pmatrix}$$

# Rotação em torno da origem

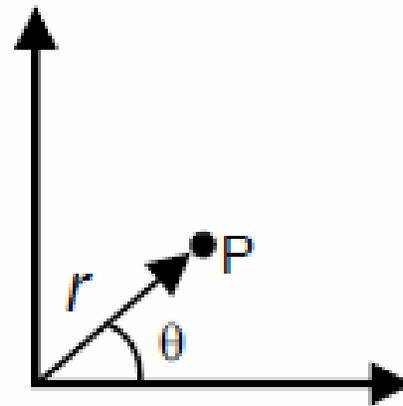


$$R_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$



# Sistemas de Coordenadas

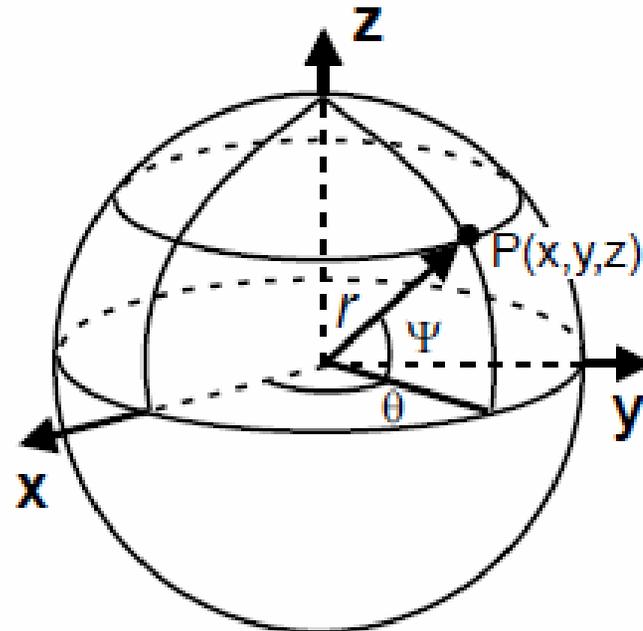
- Coordenadas Polares
  - As coordenadas são medidas por um raio e um ângulo  $(r, \theta)$ ;



**Coordenadas Polares**

# Sistemas de Coordenadas

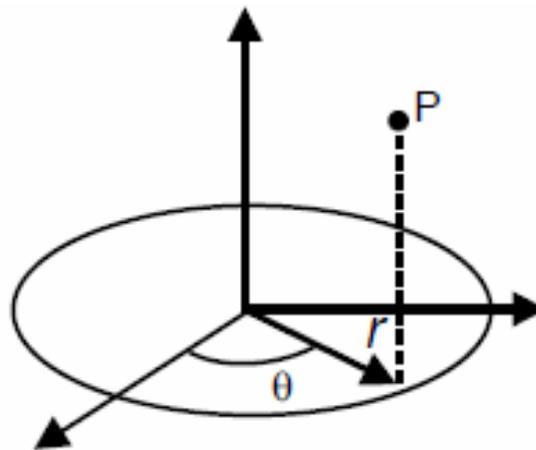
- Coordenadas Esféricas
  - As coordenadas são descritas por raio e dois ângulos ( $r$ ,  $\theta$ ,  $\Psi$ );



**Coordenadas Esféricas**

# Sistemas de Coordenadas

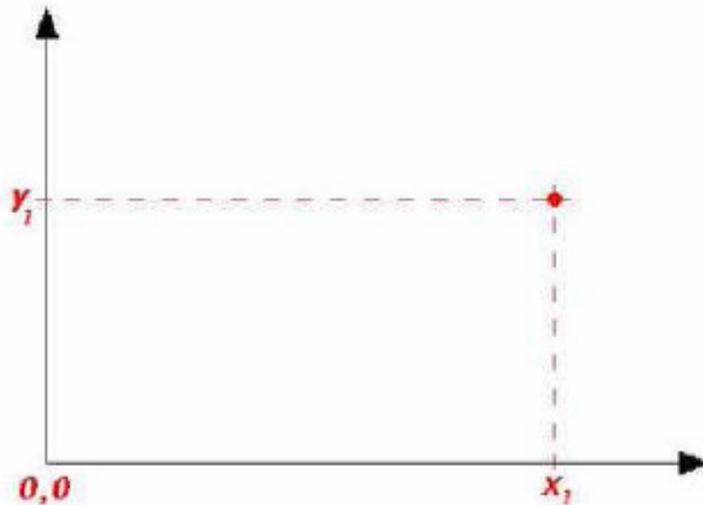
- Coordenadas cilíndricas
  - As coordenadas são descritas por raio, ângulo e comprimento ( $r$ ,  $\theta$ ,  $d$ );



**Coordenadas Cilíndricas**

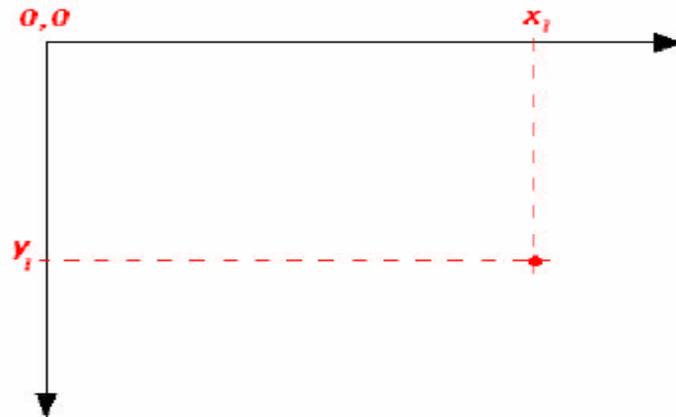
# Sistemas de Coordenadas

- Coordenadas Cartesianas Bidimensionais
  - As coordenadas são descritas pela distancia do ponto a um sistema de eixos ortogonal  $(x,y)$ ;



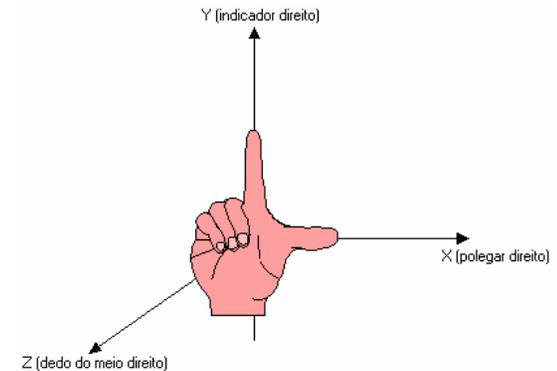
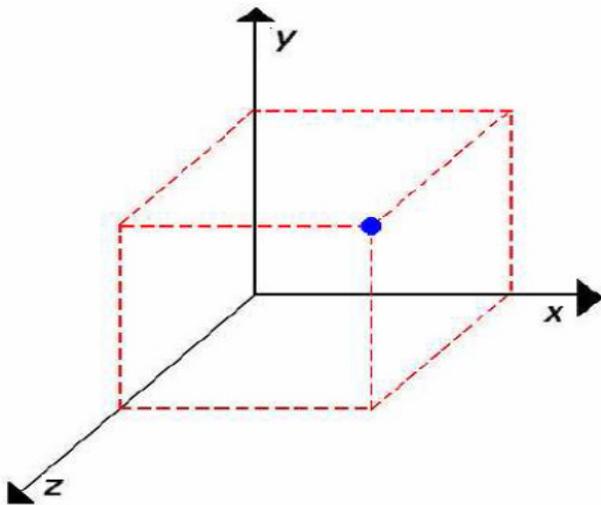
# Sistemas de Coordenadas

- Os monitores utilizam coordenadas cartesianas bidimensionais, porém a orientação do eixo vertical cresce no sentido contrário.  $(x,y)$

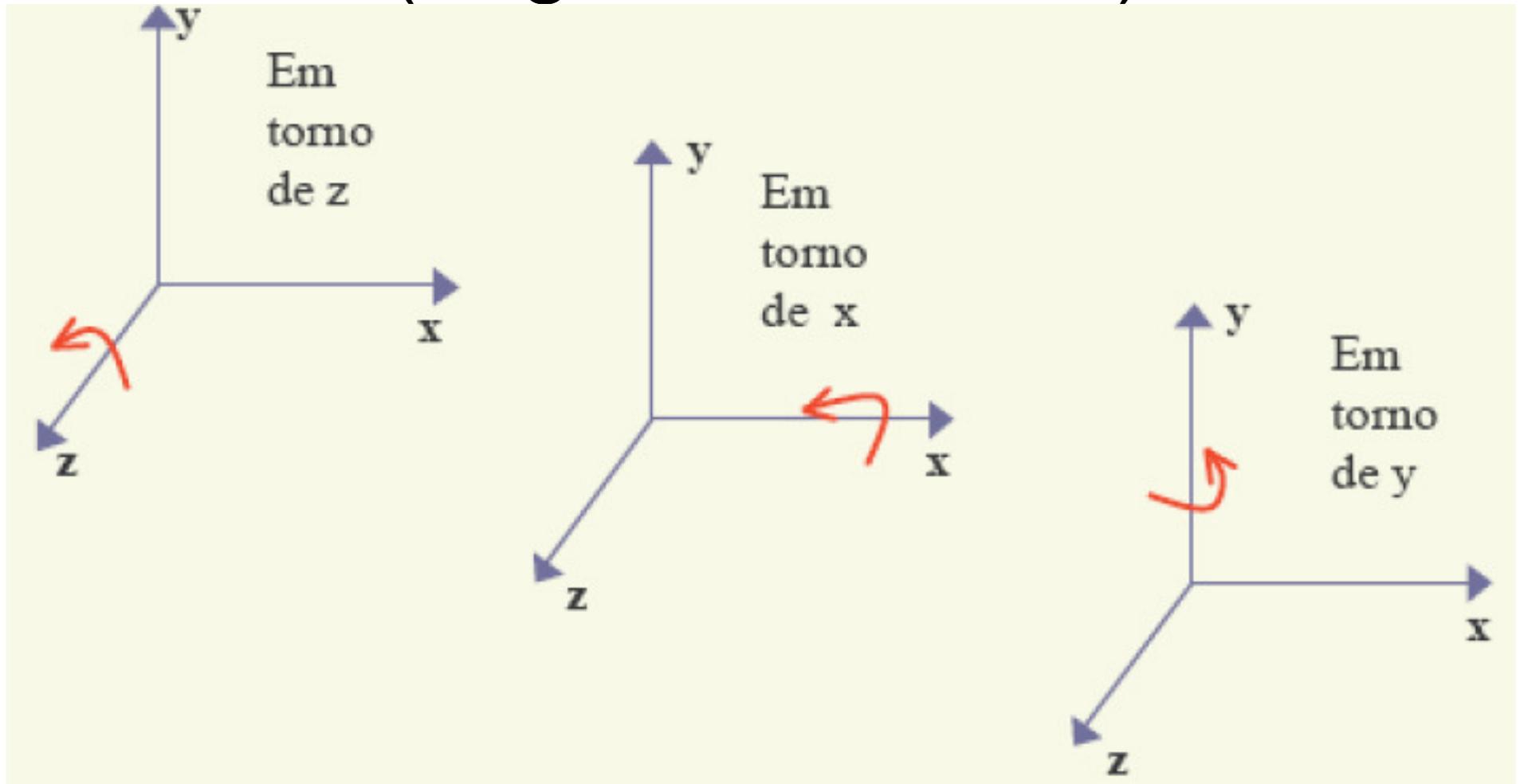


# Sistemas de Coordenadas

- Coordenadas Cartesianas Tridimensionais
  - As coordenadas são descritas por comprimento, largura e profundidade (x, y, z)



# Rotações no Espaço 3D (ângulos de Euler)



# Rotação em 3D

$$\text{Eixo z} \Rightarrow [x' \ y' \ z'] = [x \ y \ z] \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) & 0 \\ -\text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**$[x\cos(\alpha) - y\text{sen}(\alpha) \quad x\text{sen}(\alpha) + y\cos(\alpha) \quad z]$**

$$\text{Eixo x} \Rightarrow [x' \ y' \ z'] = [x \ y \ z] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & \text{sen}(\beta) \\ 0 & -\text{sen}(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

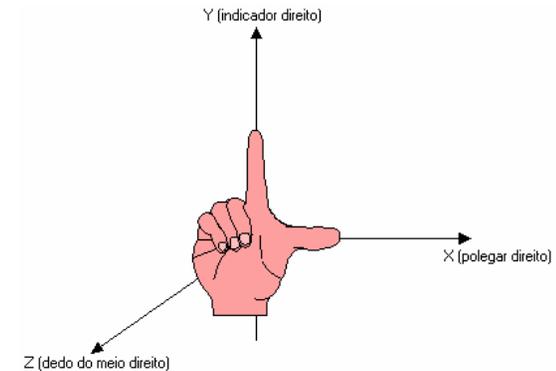
**$[x \quad y\cos(\beta) - z\text{sen}(\beta) \quad y\text{sen}(\beta) + z\cos(\beta)]$**

$$\text{Eixo y} \Rightarrow [x' \ y' \ z'] = [x \ y \ z] \begin{pmatrix} \cos(\delta) & 0 & -\text{sen}(\delta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\delta) & 0 & \cos(\delta) \end{pmatrix}$$

**$[x\cos(\delta) + z\text{sen}(\delta) \quad y \quad -\text{sen}(\delta) + z\cos(\delta)]$**

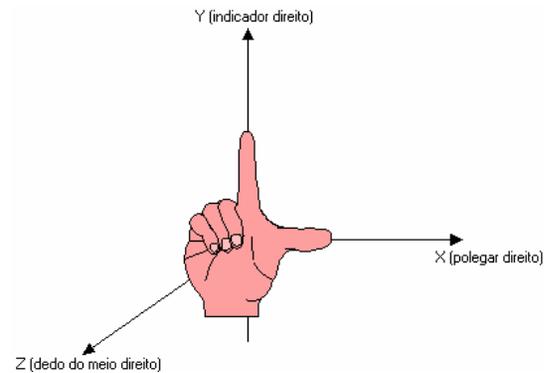
# Em torno de Z

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



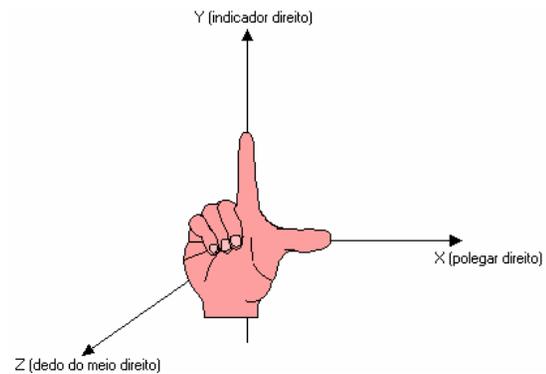
# Em torno de X

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



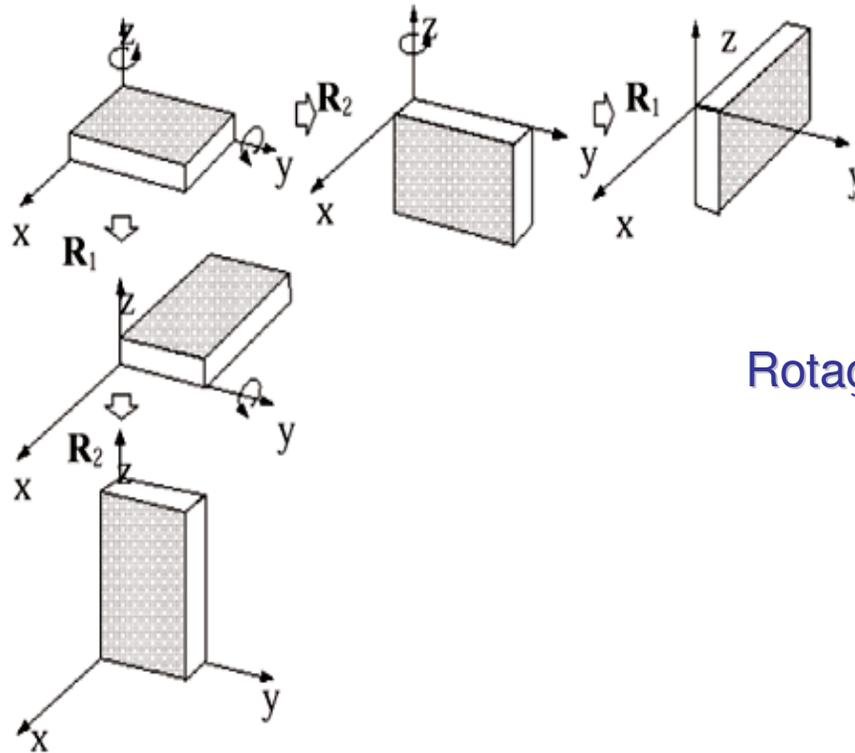
# Em torno de Y

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



Rotações são **complexas** pois:

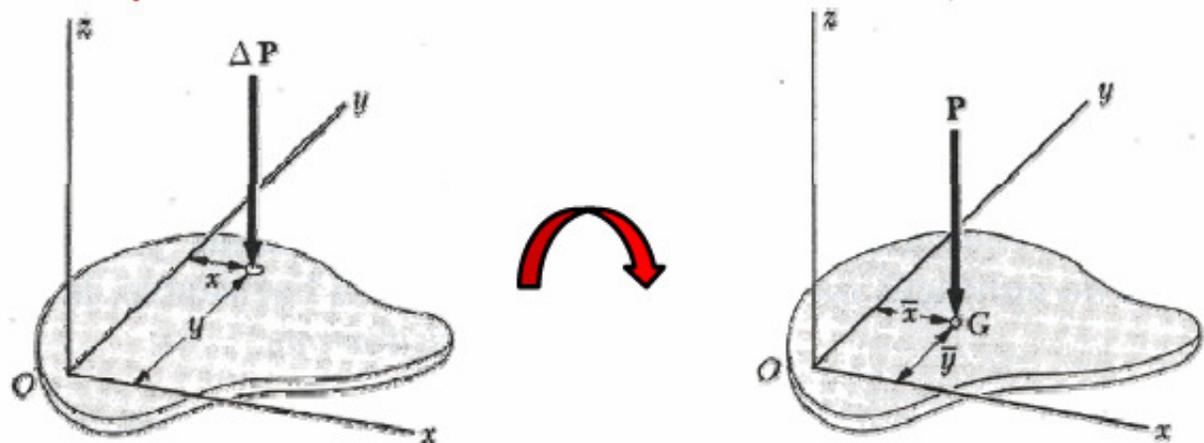
- não comutam,
- são difíceis de calcular em torno de um eixo qualquer,
- são difíceis de combinar
- são difíceis de interpolar em animações



Rotações de Euler

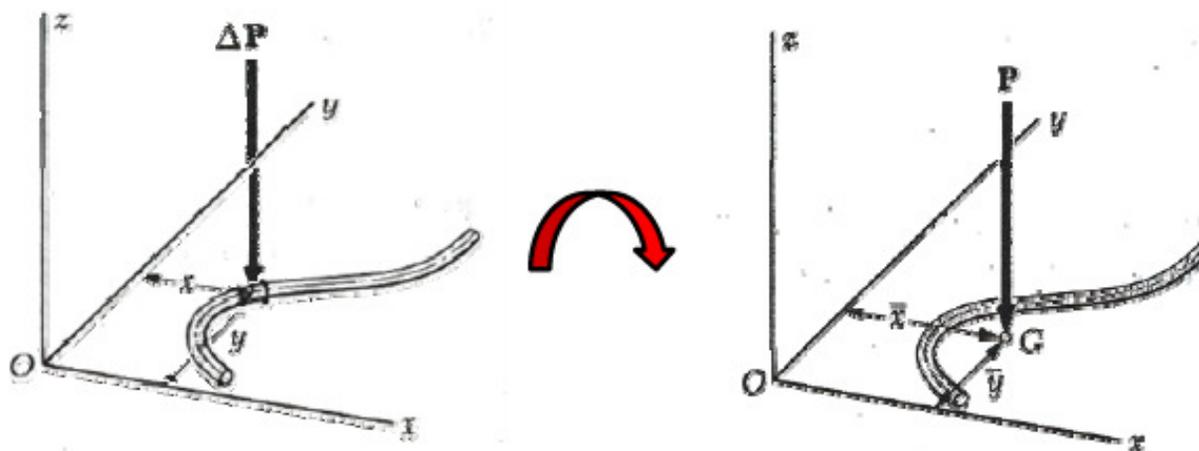
# Sistemas de Referência

- Um sistema de coordenada é denominado de **Sistema de Referência** quando servir para alguma finalidade específica.
- Como por exemplo descrever elemento da cena, referencia a posição da câmera em relação a objetos.



# Centro de Gravidade ou Baricentro

## Arames planos



### Equivalência

Força resultante

$$\sum \Delta P = P$$

Momento em torno do eixo y

$$\sum x \Delta P = \bar{x} P$$

Momento em torno do eixo x

$$\sum y \Delta P = \bar{y} P$$



# Momentos de Primeira Ordem ou Momentos Estáticos

---

As integrais pertinentes ao cálculo das coordenadas do Centróide recebem o nome de **Momentos de Primeira Ordem** em relação aos eixos  $y$  e  $x$ , respectivamente, cuja notação é expressa por:

$$\mathbf{m}_x = \bar{y}A = \int ydA \qquad \mathbf{m}_y = \bar{x}A = \int xdA$$

Cabe ressaltar que tais integrais podem ser entendidas, por analogia aos momentos dos pesos, como momentos das áreas em relação aos eixos coordenados, motivo pelo qual são denominadas **Momentos Estáticos**.



# Aplicações

---

## MASSA E CENTRO DE MASSA DE UMA LÂMINA

Suponha uma lâmina colocada em uma região  $D$  do plano  $xy$  e cuja densidade (em unidades de massa por unidade de área) no ponto  $(x,y)$  em  $D$  é dada por  $\rho(x,y)$ , onde  $\rho$  é uma função contínua sobre  $D$ . Então a massa total  $m$  da lâmina é dada por:

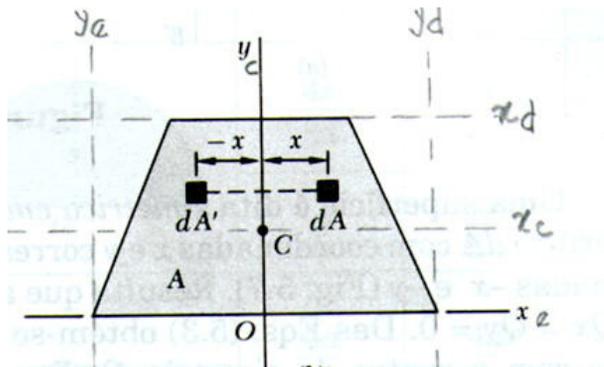
$$m = \iint_D \rho(x, y) dA$$

Além disso, o centro de massa dessa lâmina é o ponto  $(X,Y)$ , onde  $X = \frac{M_y}{m}$  e

$Y = \frac{M_x}{m}$ , sendo  $M_x = \iint_D y\rho(x, y) dA$  e  $M_y = \iint_D x\rho(x, y) dA$  os momentos em relação aos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente.

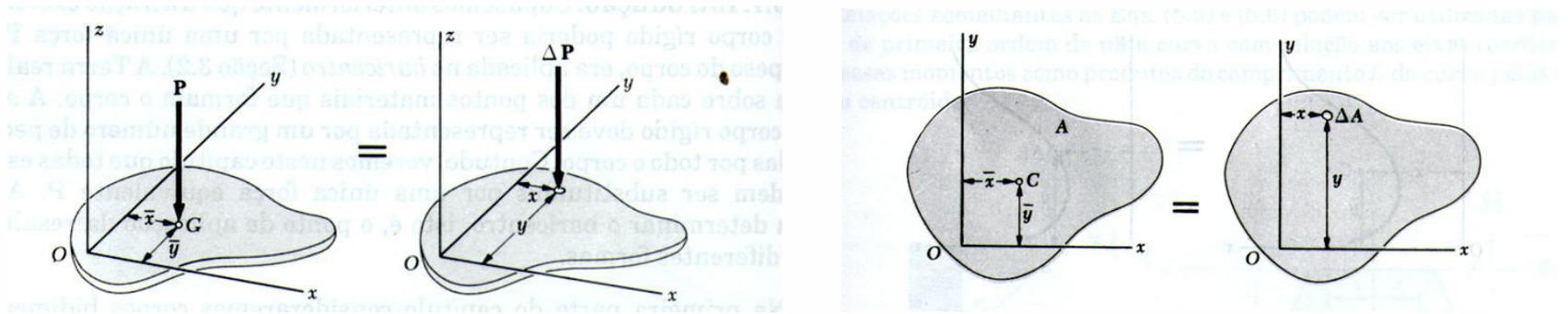
## VARIAÇÃO DE SINAIS DOS MOMENTOS ESTÁTICOS

Dependendo da posição do eixo escolhido, como referencia, o resultado numérico do **Momento Estático** pode apresentar  **sinais**  distintos ou mesmo se **anular**, conforme pode ser observado no exemplo da figura.



Para os eixos $(x y_e)$	$Q_{y_e} \rightarrow$	+
Para os eixos $(x y)$	$Q_y =$	0
Para os eixos $(x y_d)$	$Q_{y_d} \rightarrow$	-

# Baricentros e centróides



Superfície de espessura constante

Peso total  $P$ , dividida em  $n$  elementos, de pesos individuais  $\Delta P$   
O peso total  $P$  da superfície, conforme se sabe, é dado por:

$$P = \Delta P_1 + \Delta P_2 + \dots + \Delta P_n$$

sendo que, no limite:  $P = \int dP$



# Baricentros e centróides

Para determinar as **coordenadas do ponto de aplicação da resultante  $P$** , denominado **Baricentro ou Centro de Gravidade** da superfície, basta escrever **somatórios de momentos dos pesos** em relação aos eixos , ou sejam:

$$Px_c = x_1\Delta P_1 + x_2\Delta P_2 + \dots x_n\Delta P_n$$

$$Py_c = y_1\Delta P_1 + y_2\Delta P_2 + \dots y_n\Delta P_n$$

Levando tais expressões ao limite, tem-se:

$$Px_c = \int x dP \qquad Py_c = \int y dP$$

Analogamente às considerações feitas para o **Peso  $P$** , tem-se para **areas:**

$$A = \int dA \qquad x_c = \frac{\int x dA}{A} \qquad y_c = \frac{\int y dA}{A}$$

onde tem-se agora as coordenadas , denominadas **Centróide ou Centro Geométrico** da superfície **A**, neste caso particular, coincidem com as do Baricentro.

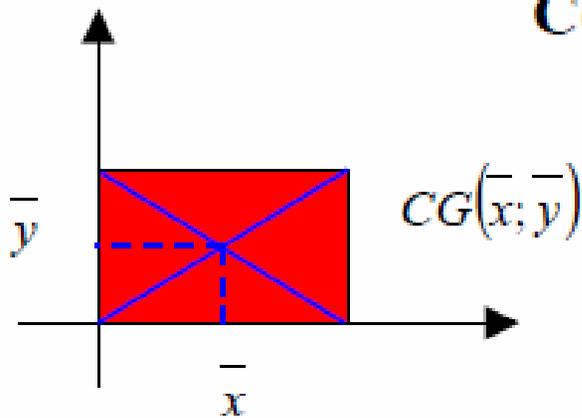


# Eixos Principais

- Se calcularmos os momentos de inércia para todos os eixos que passam pelo centro de gravidade de uma seção, notaremos que em relação a um destes eixos (eixo 1) o momento de inércia  **$I_1$  será máximo** e que em relação a outro eixo (eixo 2, ortogonal a 1) o momento de inércia ( **$I_2$** ) será mínimo.
- Estes dois eixos, denominados **eixos principais de inércia**, são os importantes para o posicionamento dos objetos no espaço.

# Momento e Centro de Gravidade de Áreas Planas

## Coordenadas do Centro de Gravidade



$$\bar{x} = \frac{m_y}{A}$$

$$\bar{y} = \frac{m_x}{A}$$

$$A = \iint_R dydx$$

$$m_x = A \cdot \bar{y}$$

$$m_y = A \cdot \bar{x}$$

$$m_x = \iint_R y dydx$$

$$m_y = \iint_R x dydx$$



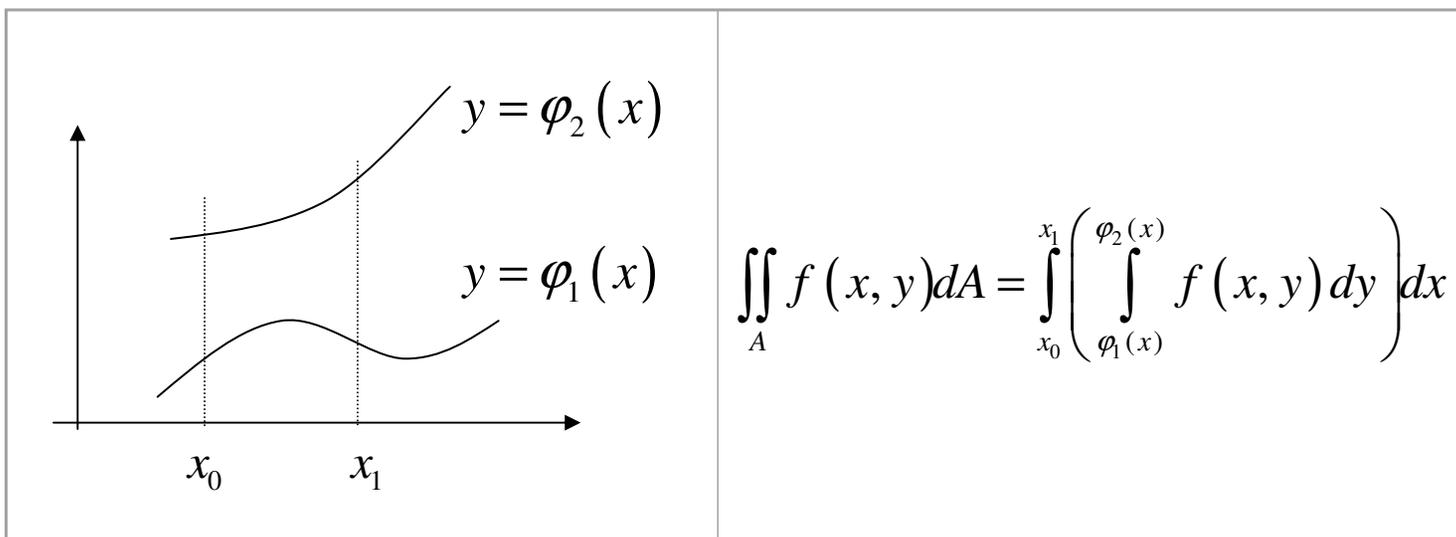
# Momentos de segunda ordem ou Momentos de Inércia

---

De modo análogo aos Momentos de Primeira Ordem, cujas expressões contêm funções  $x$  e  $y$ , as integrais do tipo abaixo são denominadas **Momentos de Segunda Ordem ou Momentos Inércia** em relação aos eixos  $x$  e  $y$  respectivamente, em notação dada por:

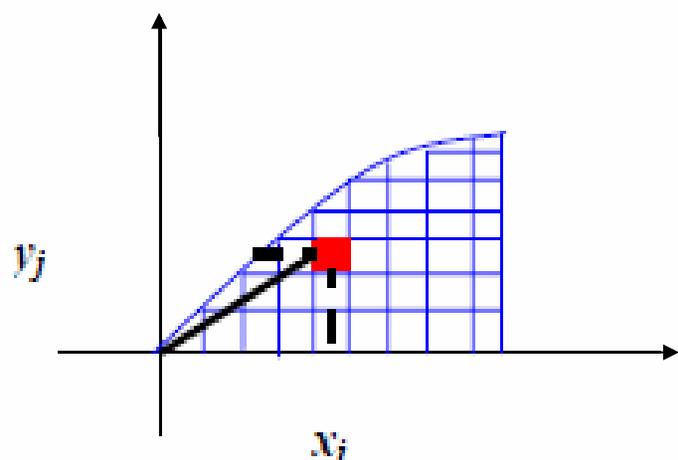
$$I_x = \int y^2 dA \qquad I_y = \int x^2 dA$$

# FÓRMULA PARA CÁLCULO DE INTEGRAL DUPLA



# Cálculo dos Momento de Inércia

---



$$I_x = \iint_R y^2 dx dy$$

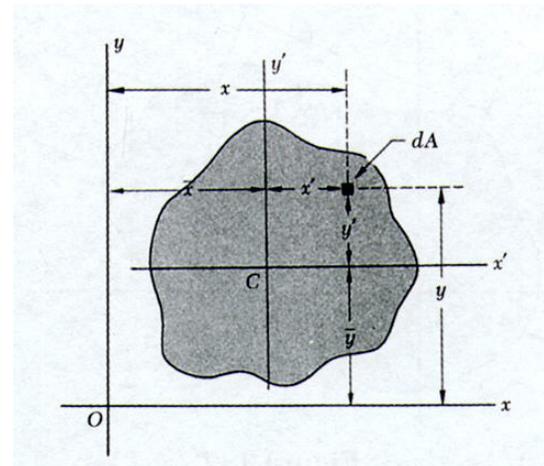
$$I_y = \iint_R x^2 dx dy$$

$$I_0 = I_x + I_y \quad \text{ou} \quad I_0 = \iint_R (x^2 + y^2) dx dy$$

**Momento de Inércia em relação ao eixo x, eixo y e ao polo O**

# Translação de eixos

Demonstra-se que é possível estabelecer uma relação entre **Momentos de Inércia** localizados em relação aos eixos passando pelo **Centróide** e **eixos paralelos quaisquer** conforme ilustra a figura, por meio do denominado **Teorema dos Eixos Paralelos (Teorema de Steiner)**.



O Momento de Inércia da superfície ao eixo  $x$ , é:

$$I_x = \int y^2 dA$$

Conhecendo-se as coordenadas  $(x_c, y_c)$  do **baricentro da área**, e havendo interesse em obter o **Momento de Inércia relativo a novo eixo  $x'$  paralelo a  $x$  passando por  $C$** , basta ter em conta que:

$$y = y' + y_c$$

Substituindo tal relação na expressão de  $I_x$  **obtem-se:**

$$I_x = \int (y' + y_c)^2 dA$$

**Desenvolvendo o termo elevado ao quadrado** e retirando das integrais as constantes pertinentes tem-se:

$$I_x = \int (y')^2 dA + 2y_c \int y' dA + y_c^2 \int dA$$

ou ainda, à vista que o **momento estático em relação ao Centróide é nulo**, resulta:

$$I_x = \int (y')^2 dA + y_c^2 \int dA \quad \text{ou} \quad I_x = I_{x'} + Ay_c^2$$

**Analogamente, para o eixo y:**

$$I_y = I_{y'} + Ax_c^2$$

Nos dois casos, conhecendo-se os **Momentos de Inércia em relação ao Centróide**, o valor do **Momento de Inércia em relação a qualquer eixo paralelo** pode ser obtido adicionando-se uma parcela correspondente ao **produto da área pelo quadrado da distância transladada ou vice versa**.

Procedimento idêntico pode ser realizado para o **Produto de Inércia em relação a novos eixos paralelos** escrevendo:

$$I_{xy} = \int x'y'dA + y_c \int x'dA + x_c \int y'dA + x_c y_c \int dA$$

**ou**

$$I_{xy} = I_{x'y'} + Ax_c y_c$$

# Teorema dos Eixos Paralelos

---

O teorema dos eixos paralelos estabelece que o momento de inércia ao redor de qualquer eixo que é paralelo e que se encontra a uma distância  $D$  do eixo que passa pelo centro de massa é

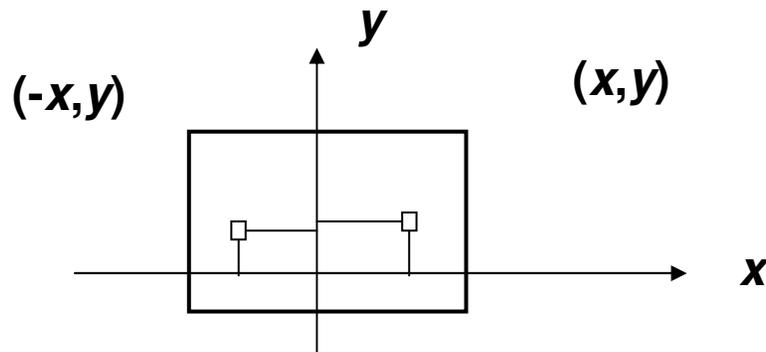
$$I = I_{\text{CM}} + MD^2$$

# Produtos de inércia

Outra característica geométrica de importância para utilização nos itens que se seguem, denomina-se **Produto de Inércia**, definido pela integral dada por:

$$I_{xy} = \int xy \, dA$$

A exemplo dos **momentos estáticos**, é fácil verificar que seu resultado **apresenta variação de sinais**, conforme mostra a figura, dependendo da posição que a área se encontrar em relação aos eixos  $(x,y)$ .

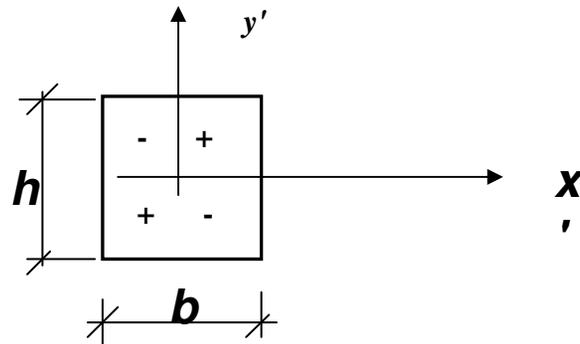


Para exemplificar, calcula-se a seguir o **Produto de Inércia do retângulo da figura**, aproveitando-se os parâmetros utilizados para o cálculo de  $I_x$ .

Nesse caso basta substituir a função na **fórmula de integração dupla**, ou seja:

$$I_{xy} = \int_0^b \left( \int_0^h xy dy \right) dx = \frac{b^2 h^2}{4}$$

**Para outra posição de eixos coordenados passando pelo Centróide**, é fácil verificar que o resultado de  $I_{xy}$  é **zero**, face à simetria e ao produto dos sinais indicados nos respectivos quadrantes.

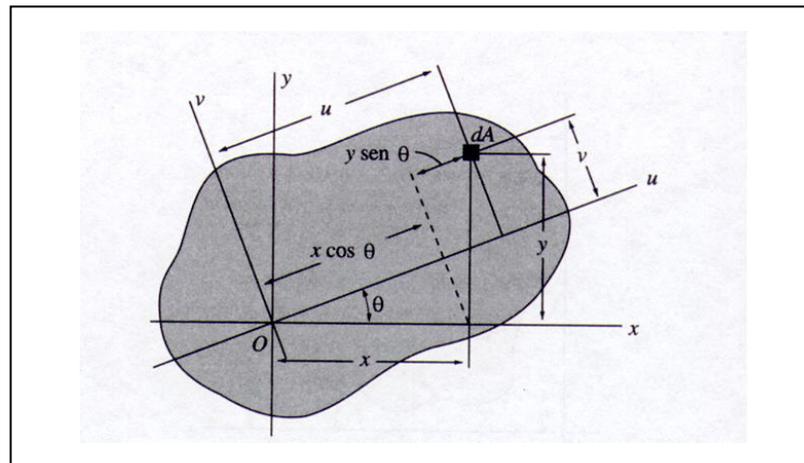


$$I_{xy} = \int_{-b/2}^{b/2} \left( \int_{-h/2}^{h/2} xy dy \right) dx = 0$$

# Rotação de eixos

Completando o estudo, passa-se à determinação das características geométricas em relação a novos eixos localizados na mesma origem e **girados de um ângulo qualquer**.

Observe-se que, em aplicações práticas **interessa facilitar a rotação ao redor dos eixos (  $x'$  ,  $y'$  ) localizados no Centróide**. Por esse motivo, é bom lembrar das **fórmulas de rotação de objetos ou para rotação das suas coordenadas**.



$$u = x' \cos \theta + y' \sin \theta$$

$$v = y' \cos \theta - x' \sin \theta$$

**Para obter  $I_u$ ,  $I_v$  e  $I_{uv}$  como funções de  $I_{x'}$ ,  $I_{y'}$  e  $I_{x'y'}$ , é o bastante substituir as novas coordenadas ( $u, v$ ) nas expressões das características geométricas relativas a esses eixos, ou sejam:**

$$I_u = \int v^2 dA \quad I_v = \int u^2 dA \quad I_{uv} = \int uv dA$$

**Após algumas manipulações algébricas, obtêm-se as seguintes fórmulas mais concisas:**

$$\begin{matrix} I_u \\ I_v \end{matrix} = \frac{I_{x'} + I_{y'}}{2} \pm \frac{I_{x'} - I_{y'}}{2} \cos 2\theta \mp I_{x'y'} \sin 2\theta$$

$$I_{uv} = \frac{I_{x'} - I_{y'}}{2} \sin 2\theta + I_{x'y'} \cos 2\theta$$

# Momentos e eixos principais de inércia

Tendo em vista que os **Momentos de Inércia**  $I_u$  e  $I_v$  estão relacionados a  $I_x$  e  $I_y$ , **apenas como funções do ângulo  $\theta$** , é possível determinar seus valores extremos, bastando para tanto derivar tais expressões, igualando-as a zero, providência que conduz a:

A solução dessa equação tem como resultado **dois valores de  $\theta$  defasados de  $90^\circ$** , que definem outro par de eixos denominados **Eixos Principais de Inércia**, indicados por  $(1, 2)$ , nos quais os **Momentos de Inércia são extremos**, e denominados **Momentos Principais de Inércia**, em notação expressa por  $(I_1, I_2)$

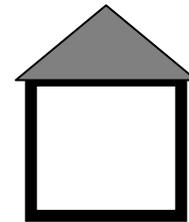
# Momentos de ordem $(p+q)$ .

$$m_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} m^p n^q b(m,n) dm dn, \quad p, q = 0, 1, 2, \dots$$

onde a função  $b(m,n)$  representa o objeto contínuo.

Se for binário,  $b(m,n) = 1$ , se  $(m,n)$  é um ponto do objeto, sendo  $m$  a posição do *pixel* na horizontal e  $n$  na vertical,

Se  $b(m,n)=0$  tem-se o fundo.



# Momentos Geométricos

A moment of order  $p$  of a continuous signal  $f(x)$  of length  $N$  is defined as follows:

$$M_p = \int_0^N f(x)x^p dx. \quad (1)$$

Similarly, for a 2-D signal  $f(x, y)$ , the moment of order  $p, q$  is defined as

$$M_{p,q} = \int_0^N \int_0^N x^p y^q f(x, y) dx dy. \quad (2)$$

However, for discrete signals, the above expressions are approximated by sums

$$M_p = \sum_{x=0}^{N-1} f(x)x^p \quad (3)$$

and

$$M_{p,q} = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)x^p y^q. \quad (4)$$

# Objetos discretizados

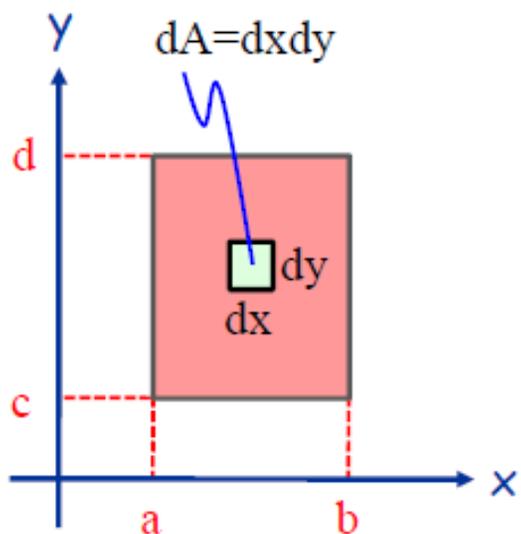
- Sendo a imagem digitalizada, o objeto a ser analisado, passa a ser representado por um arranjo retangular de  $M \times N$  pontos. Considerando  $(i, j)$  as coordenadas de cada um dos  $n = M \times N$  pontos de  $\mathbf{b}$  (binária) ou  $\mathbf{B}$  (em níveis de cinza), tem-se a seguinte notação:

0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0



# Determinação de Centróide por Integração

$$D = \{ (x, y) \mid a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d \}$$



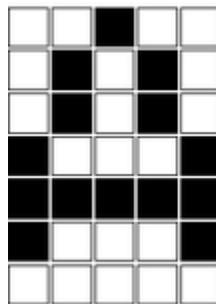
Momentos de ordem  $(p + q)$  de objetos discretos em uma imagem digitalizada:

$$m_{pq} = \sum_{k=1}^n B(i_k, j_k) (i_k)^p (j_k)^q \quad p, q = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

**Área = momento de ordem zero :**

$$m_{00} = \sum_m \sum_n B(m, n) \quad (4)$$

A área do objeto é **invariante** à translação e à rotação do objeto e do seu sistema de eixos (se sua discretização foi adequada na prática) .



Momentos de ordem  $(p + q = 1)$  de objetos discretos em uma imagem digitalizada:

$$m_{pq} = \sum_{k=1}^n B(i_k, j_k) (i_k)^p (j_k)^q \quad p \text{ ou } q = 1 \text{ (mas não ambos)}$$

### **Momentos de ordem zero: $m_{10}$ ou $m_{01}$**

Se  $p = 1$  e  $q = 0$ , tem-se o primeiro momento de área em relação ao **eixo  $m$** , ou **momento estático**.

Se  $p = 0$  e  $q = 1$ , a equação passa a corresponder ao **momento estático** ou primeiro momento de área em relação ao **eixo  $n$** .

### **Centróide : Momento estático / Área**

$$i_0 = \sum_{k=1}^n B(i_k, j_k) i_k / \sum_{k=1}^n B(i_k, j_k) = m_{10} / m_{00} \quad (5, 6)$$

$$j_0 = \sum_{k=1}^n B(i_k, j_k) j_k / \sum_{k=1}^n B(i_k, j_k) = m_{01} / m_{00}$$

# Momentos de Inércia

- Se  $p = 2$  e  $q = 0$  ou  $p = 0$  e  $q = 2$ , tem-se os **segundos momentos de área em relação aos eixos  $m$  e  $n$** , respectivamente, ou **momentos de inércia** do objeto em relação aos eixos  $m, n$ .
- Se  $p = 2$  e  $q = 0$  ou  $p = 0$  e  $q = 2$  e os eixos  $m$  e  $n$ , passarem pelos centróide tem-se os **momentos centrais de inércia** do objeto ou em relação aos eixos  $(i_0, j_0)$ .

# Sistema de eixos no centróide

- A partir da definição dos pontos de um objeto por um sistema de eixos que passa pelo seu **centro geométrico** sua orientação passa a ser **invariante a translação** do mesmo.

# Invariância a Translação

- Para se obter **momentos invariantes s** **translação** de objetos em imagens, considera-se uma translação das coordenadas  $(i, j)$  de um valor  $(i_0, j_0)$  de modo que o objeto possa ser descrito em relação a um **sistema de coordenadas que passa pelo seu centróide**.
- Com isto, pode-se definir **os momentos centrais** (ou em torno do centróide) .

# Alguns invariantes

- Sabe-se também que a soma dos momentos de área de **segunda ordem** em relação ao centróide, momentos de inércia (  $I_x + I_y$  ), é constante independente da orientação dos eixos usados para descrever estes momentos.
- Esta soma é chamada o **momento polar de inércia da área** em relação à origem.
- Assim outro **invariante à rotação** dos eixos é

$$\mu_{0,2} + \mu_{2,0}.$$

Quando os valores de  $p = q = 1$ , tem-se  $m_{1,1}$ , que representa o **produto de inércia em relação** aos eixos  $m,n$ .

## Momentos centrais :

$$\mu_{pq} = \sum_{k=1}^n B(i_k, j_k) (i_k - i_0)^p (j_k - j_0)^q \quad (7)$$

$$\mu_{0,0} = m_{0,0} \quad (\text{área})$$

$$\mu_{0,1} = \mu_{1,0} = 0 \quad (\text{para esses eixos os momentos estáticos nulos})$$

$$\mu_{0,2} = m_{0,2} - j_o^2 m_{0,1} \quad (\text{momentos de inércia } I_y)$$

$$\mu_{2,0} = m_{2,0} - i_o^2 m_{1,0} \quad (\text{momentos de inércia } I_x)$$

$$\mu_{1,1} = m_{1,1} - i_o j_o m_{1,0} \quad (\text{produto de inércia})$$

## Momentos centrais :

$$\mu_{pq} = \sum_{k=1}^n B(i_k, j_k) (i_k - i_0)^p (j_k - j_0)^q. \quad (7)$$

$$\mu_{0,0} = m_{0,0} \quad (\text{área})$$

$$\mu_{0,1} = \mu_{1,0} = 0 \quad (\text{para esses eixos os momentos estáticos nulos})$$

Se  $p = 2$  e  $q = 0$  ou  $p = 0$  e  $q = 2$ , tem-se os segundos momentos de área em relação aos eixos  $m$  e  $n$ , respectivamente, ou momentos de inércia do objeto em relação aos eixos  $m, n$ .

# Todos os objetos tem ...

- Assim, para determinar os eixos e momentos principais precisamos encontrar um valor do **ângulo  $\theta$**  que leve um momento de inércia a ser máximo ( $I_1$ ) e o outro a ser mínimo ( $I_2$ ).

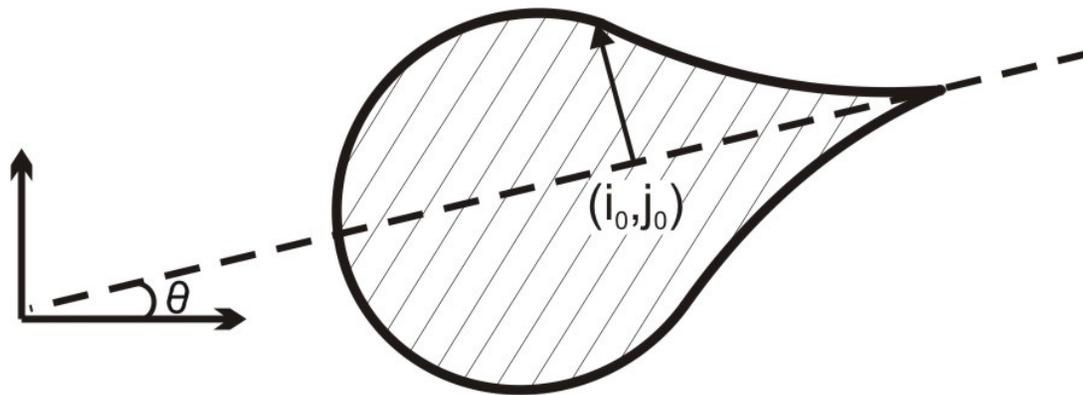
# Invariância à rotação

- De uma maneira geral, a invariância em relação à rotação do objeto pode ser obtida utilizando-se no cálculo dos momentos, **ao invés de um sistema qualquer de eixos (i , j) passando pelo centróide, um sistema que coincida com os eixos principais do objeto.**
- Neste caso, deve-se determinar o ângulo,  $\theta$ , que identifica a orientação dos eixos principais, este ângulo é:

$$\tan 2\theta = 2\mu_{1,1} / (\mu_{2,0} - \mu_{0,2})$$

$\theta$  - orientação dos eixos principais:

$$\tan 2\theta = 2\mu_{1,1} / (\mu_{2,0} - \mu_{0,2}) \quad (12)$$

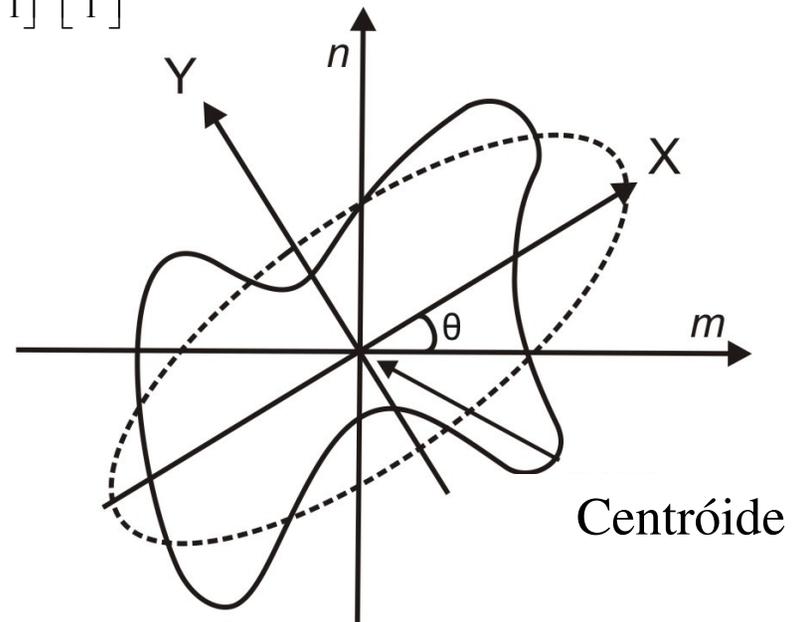
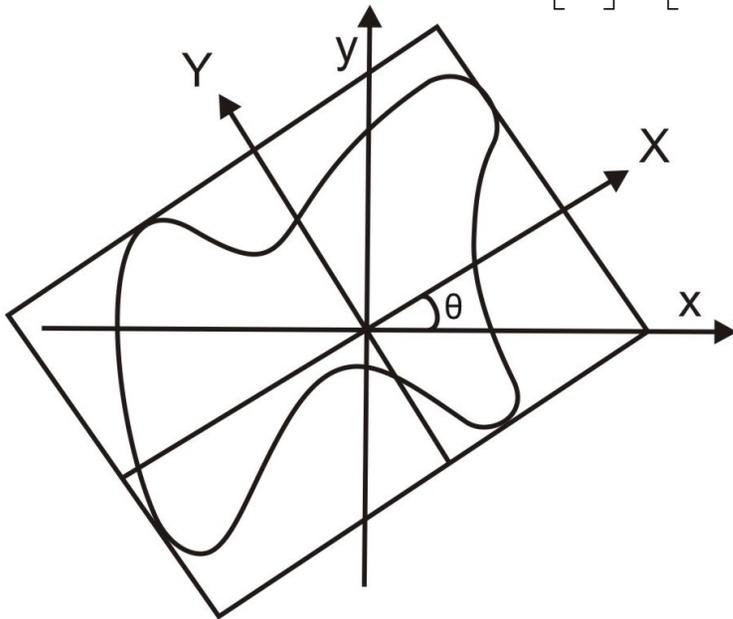


Na determinação deste ângulo, deve-se usar para garantir a unicidade dos resultados, as restrições:  $\mu_{2,0} > \mu_{0,2}$  e  $\mu_{1,1} > 0$ .

Qualquer momento obtido em relação a este par de eixos é invariante à rotação.

# XY - Eixos nas direções principais

$$\begin{bmatrix} x_d \\ y_d \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta & 0 \\ \text{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ 1 \end{bmatrix}$$



**Eixos paralelos ao quadro de captura – xy passando pelo centroide**

# Invariância a escala

- Para se obter um conjunto de momentos invariantes quanto à translação, rotação e **escala**, a partir dos momentos centrais, torna-se necessário normalizá-los:

$$\eta_{p,q} = \mu_{p,q} / \mu^{\lambda}_{0,0}$$

onde  $\lambda = (p+q)/2 + 1$ , sendo  $(p+q) = 2, 3, \dots$

A utilização de momentos invariantes a escala é útil na identificação de objetos quando a **distância de captura pode variar**.

Combinações de Momentos geométricos invariantes  
(**Hu** ,1962):

$$\phi_1 = \eta_{2,0} + \eta_{0,2} \quad (5)$$

$$\phi_2 = (\eta_{2,0} - \eta_{0,2})^2 + 4\eta_{1,1}^2 \quad (6)$$

$$\phi_3 = (\eta_{3,0} - 3\eta_{1,2})^2 + (3\eta_{2,1} - \eta_{0,3})^2 \quad (7)$$

$$\phi_4 = (\eta_{3,0} + \eta_{1,2})^2 + (\eta_{2,1} + \eta_{0,3})^2 \quad (8)$$

$$\phi_5 = (\eta_{3,0} - 3\eta_{1,2})(\eta_{3,0} + \eta_{1,2})[(\eta_{3,0} + \eta_{1,2})^2 - 3(\eta_{2,1} + \eta_{0,3})^2] +$$
$$(3\eta_{2,1} - \eta_{0,3})(\eta_{2,1} + \eta_{0,3}) [3(\eta_{3,0} + \eta_{1,2})^2 - (\eta_{2,1} + \eta_{0,3})^2] \quad (9)$$

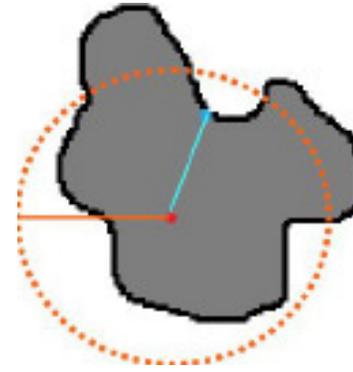
Momentos geométricos invariantes de **Hu** (1962):

$$\phi_6 = (\eta_{2,0} - \eta_{0,2})[(\eta_{3,0} + \eta_{1,2})^2 - (\eta_{2,1} + \eta_{0,3})^2] + 4\eta_{1,1}(\eta_{3,0} + \eta_{1,2})(\eta_{2,1} + \eta_{0,3}) \quad (10)$$

$$\phi_7 = (3\eta_{2,1} - \eta_{0,3})(\eta_{3,0} + \eta_{1,2})[(\eta_{3,0} + \eta_{1,2})^2 - 3(\eta_{2,1} + \eta_{0,3})^2] - (\eta_{3,0} - 3\eta_{1,2})(\eta_{2,1} + \eta_{0,3})[3(\eta_{3,0} + \eta_{1,2})^2 - (\eta_{2,1} + \eta_{0,3})^2] \quad (11)$$

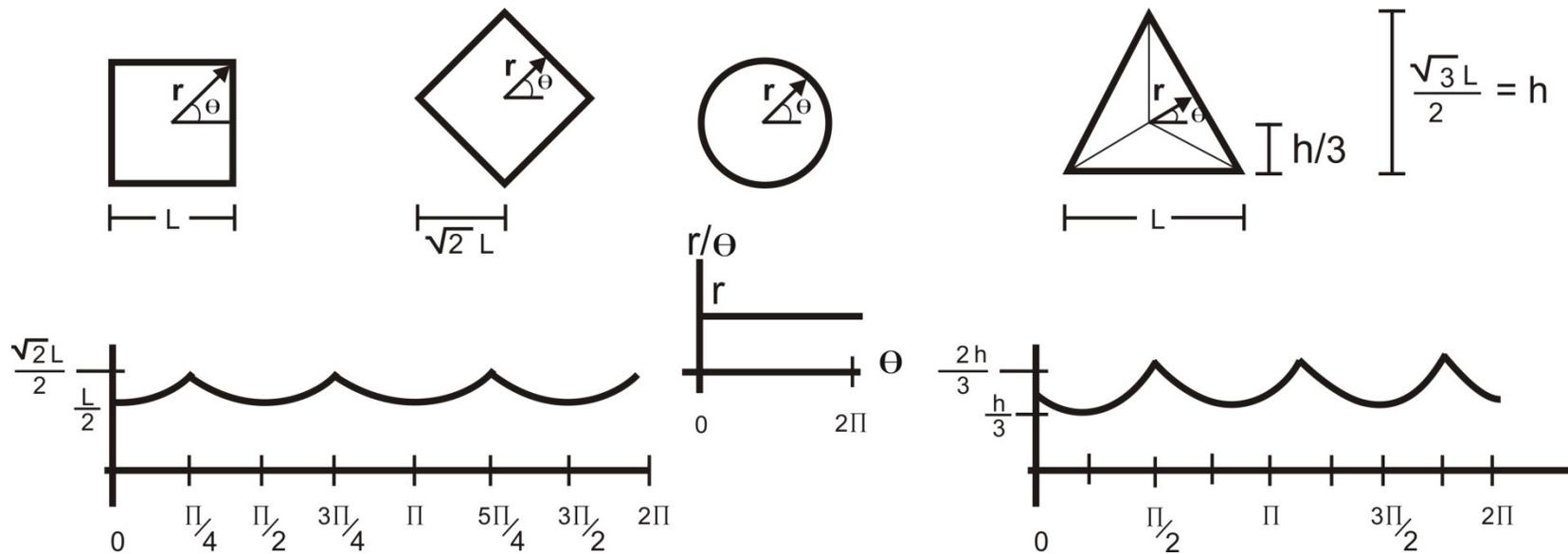
# Coordenadas polares ( raio, ângulo)

Distância radial entre o centroide da figura e o ponto a ser estimado.

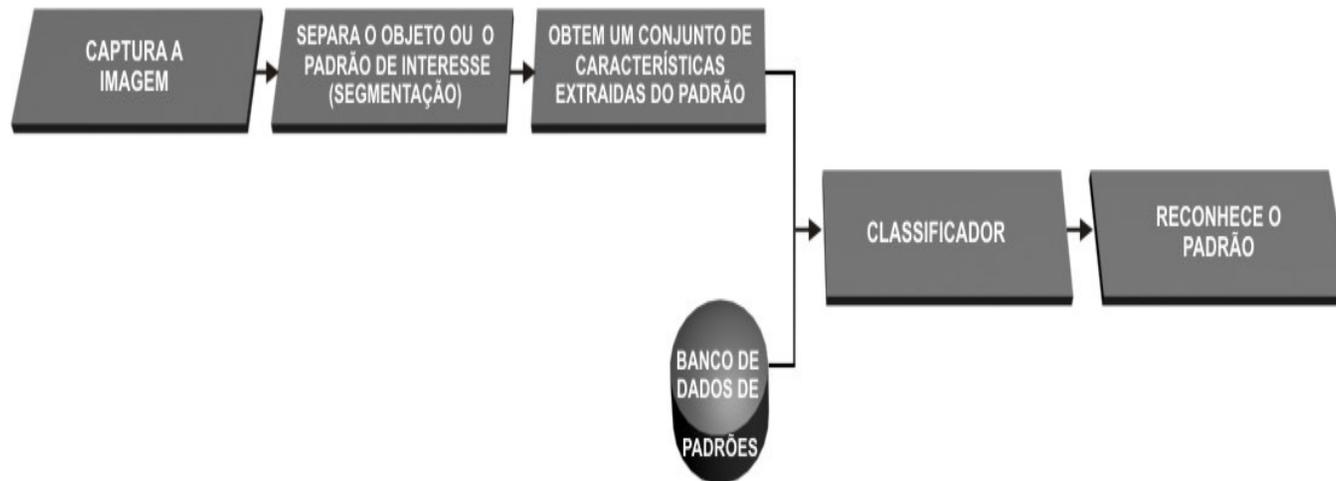


- Pontos com mesmo raio e ângulos diferentes.

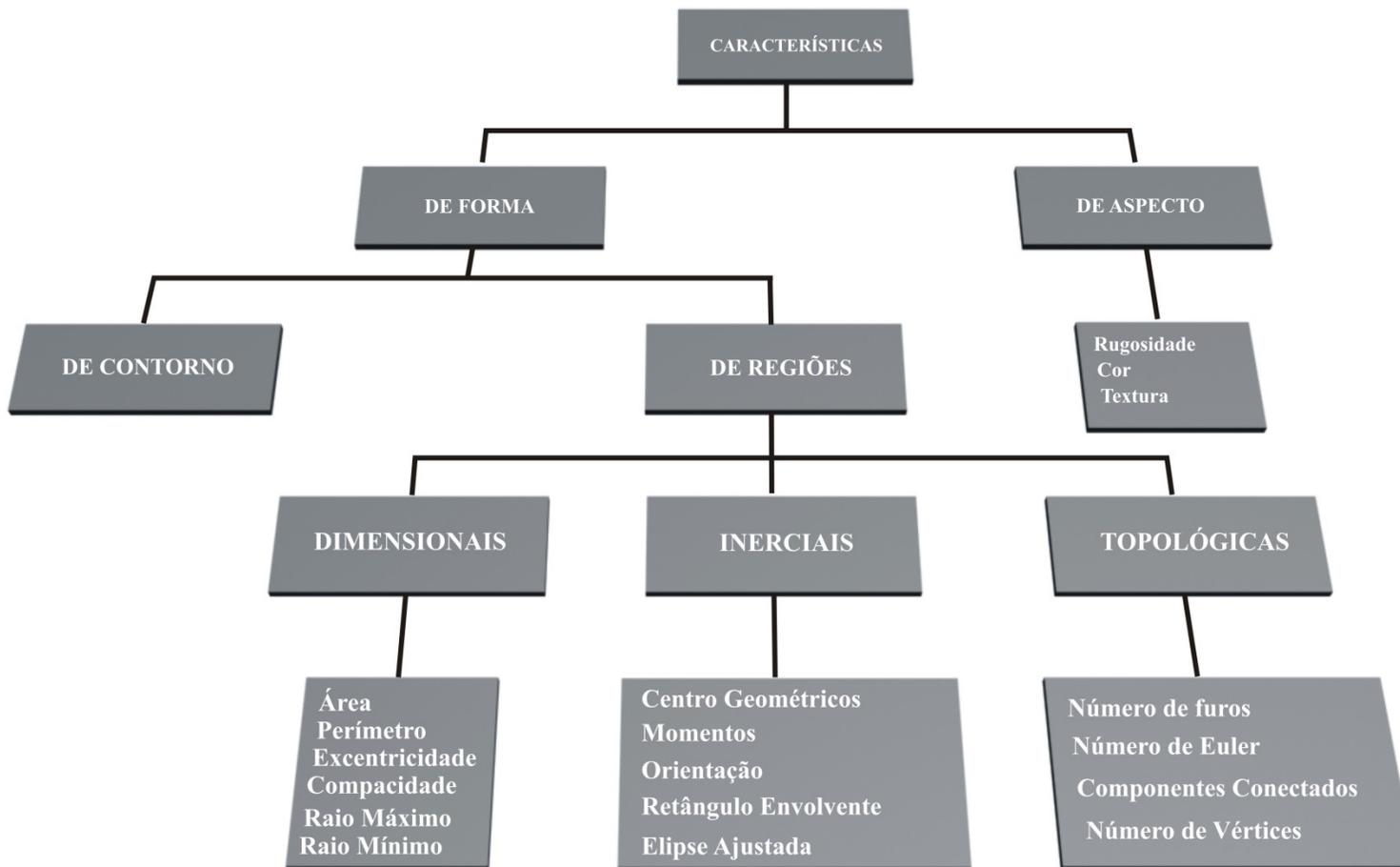
# Assinaturas ou Gráficos $r(\theta)$



Quatro objetos e suas assinaturas, ou gráficos  $r(\theta)$ .

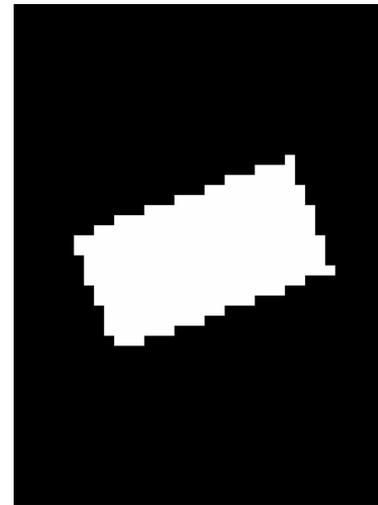
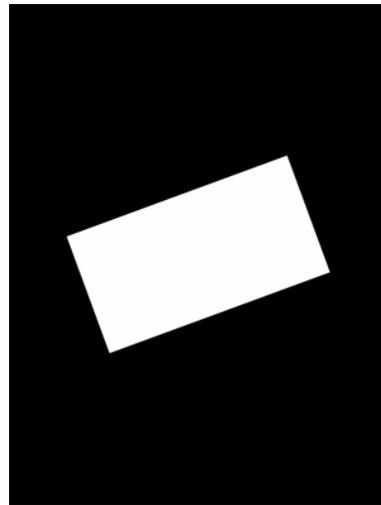


**Etapas de um sistema de reconhecimento de padrões.**

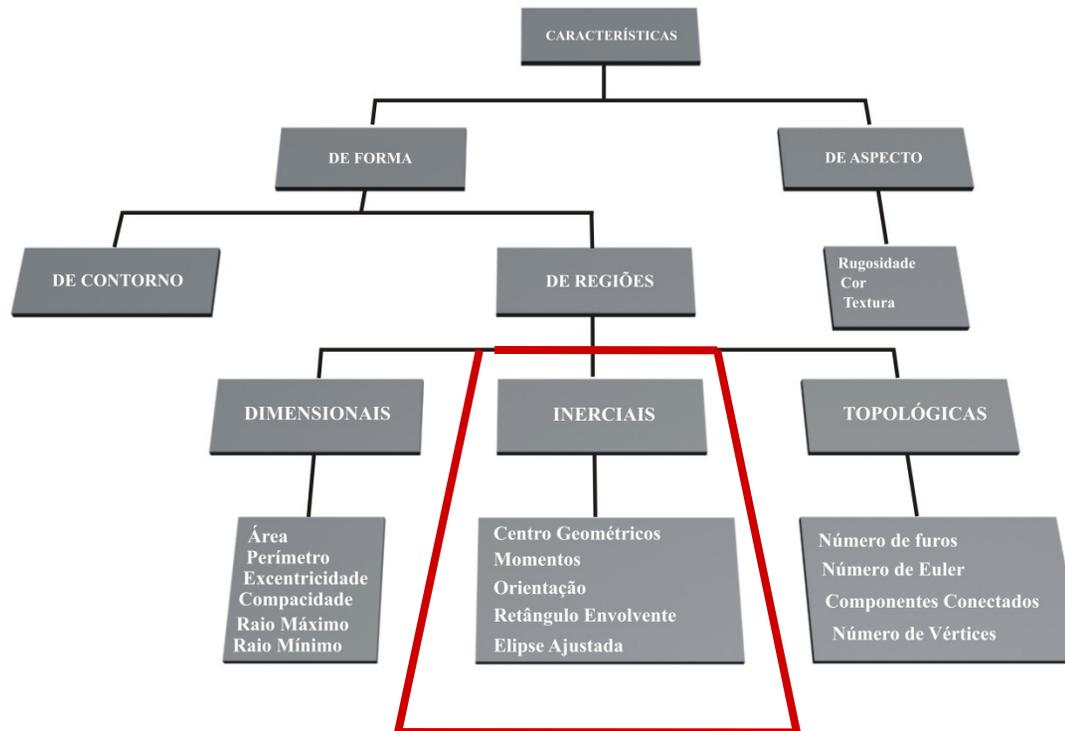


Tipos de características.

Efeito da captura na direção dos momentos principais e sempre na mesma direção sem considerar o objeto.



# Características Inerciais



Tipos de características.

# Para reconhecimento

REJ. L. FERREIRA  
**KMM-2090**

Tabela 8.1– Momentos invariantes da imagem

<b>Caracter</b>	<b>M0</b>	<b>M1</b>	<b>M2</b>	<b>M3</b>	<b>M4</b>
<b>K</b>	2.90	0.20	3.84	0.27	-1.15
<b>M</b>	2.74	0.91	0.11	0.01	0
<b>M</b>	2.78	1.32	0.09	0.01	0
<b>2</b>	3.85	7.74	2.09	0.27	-0.23
<b>0</b>	3.10	1.96	0.05	0.04	0.01
<b>9</b>	2.49	1.68	4.49	0.61	-0.50
<b>0</b>	3.18	2.32	0.04	0.02	-0.01

# 3D Momentos de Inércia de um Corpo

- O momento de inércia em relação ao eixo  $y$  é:

$$I_y = \int r^2 dm = \int (z^2 + x^2) dm$$

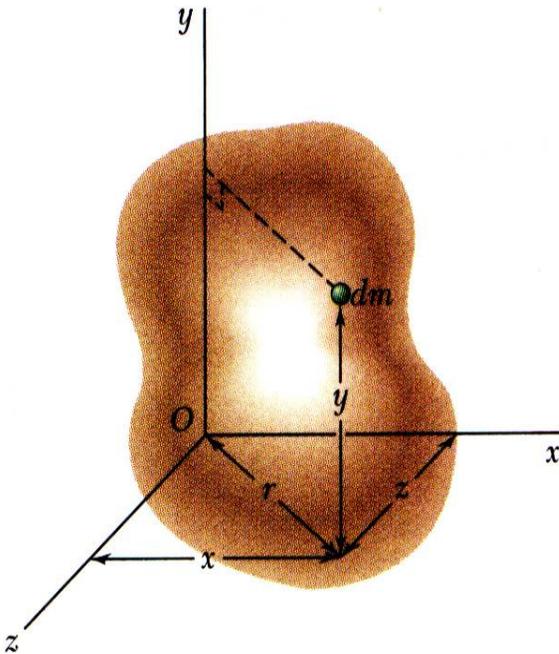
- De forma similar, os momentos de inércia em relação aos eixos  $x$  e  $z$  são:

$$I_x = \int (y^2 + z^2) dm$$

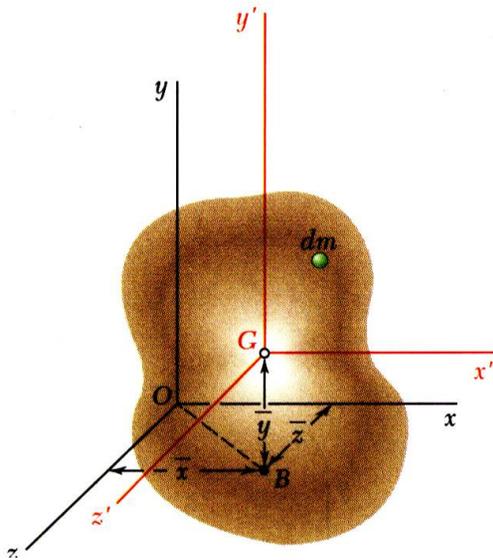
$$I_z = \int (x^2 + y^2) dm$$

- Em unidades do SI:

$$I = \int r^2 dm = (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$$



# Teorema dos Eixos Paralelos



- Para um sistema de coordenadas retangulares com origem em  $O$  e eixos paralelos aos eixos centroidais,

$$I_x = \int (y^2 + z^2) dm = \int [(y' + \bar{y})^2 + (z' + \bar{z})^2] dm$$

$$= \int (y'^2 + z'^2) dm + 2\bar{y} \int y' dm + 2\bar{z} \int z' dm + (\bar{y}^2 + \bar{z}^2) \int dm$$

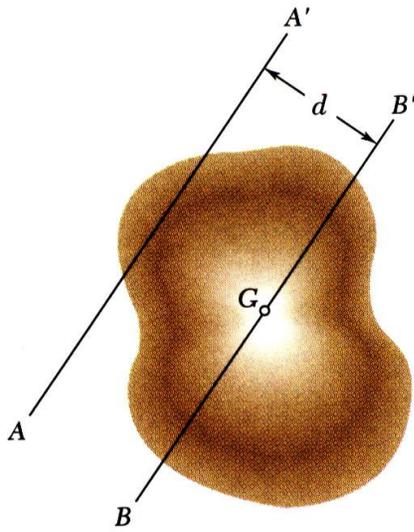
$$I_x = \bar{I}_{x'} + m(\bar{y}^2 + \bar{z}^2)$$

$$I_y = \bar{I}_{y'} + m(\bar{z}^2 + \bar{x}^2)$$

$$I_z = \bar{I}_{z'} + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$$

- Generalizando, para qualquer eixo  $AA'$  e um eixo centroidal paralelo tem-se,

$$I = \bar{I} + md^2$$



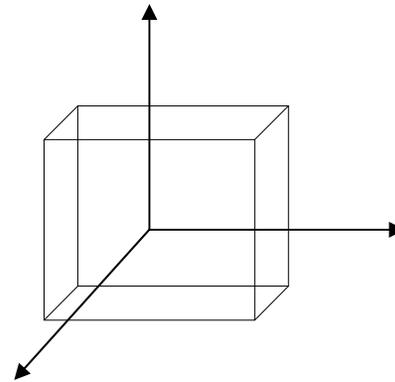
# Conhecidas as componentes

- De um tensor para 3 direções ortogonais em um ponto , as **componentes do mesmo tensor para qualquer direção de sistema de eixos ortogonais passando pelo ponto** pode ser determinada de forma simples, se feita com a **notação** adequada

# Considerando Ponto como

Algo muito pequeno mas finito e orientável:

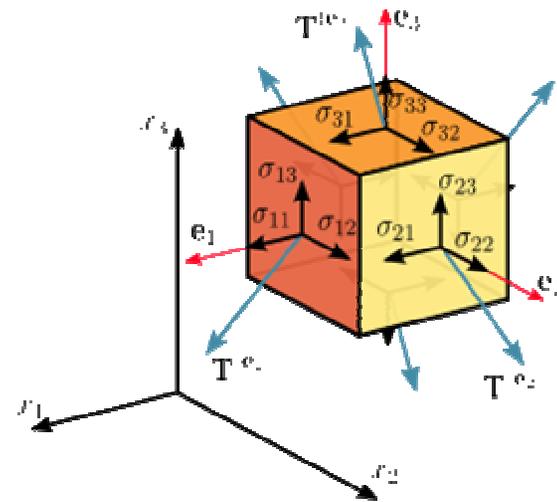
$P =$  pequeno cubo de arestas  $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3$  , ou  
 $\Delta_x \Delta_y \Delta_z$



# Notação tensorial

- Considere um ponto P paralelo a eixos de referência xyz ou 123.
- Para identificar os **elementos de um tensor** associado aos planos 123 neste ponto , usaremos **2 índices** , o primeiro identificando o plano (pela sua normal) e o segundo a direção.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$



# Tensor tem 9 componentes

$$\sigma_{ij} \quad i,j = 1,2,3,$$

*i - > indica a linha*

*j - > indica a coluna*

$$I_{ij} \quad i,j = 1,2,3,$$

Com esses 9 componentes podemos definir o estado do ponto P  
Em qualquer outra direção de eixos ortogonais.

# Áreas são caracterizadas

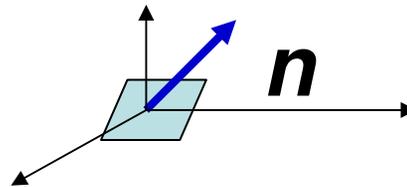
pelas suas normais ,  $n$ .

- Co-senos diretores de uma direção são os co-senos dos ângulos que essa direção faz com um sistema de eixos .
- Denotamos  $a_{nx}$   $a_{ny}$  e  $a_{nz}$  os co-senos de  $n$  com um sistema de eixos .

## 2 índices (é um tensor)

- Nesta notação o primeiro índice indica a direção da normal cuja direção se considera e o segundo a direção do sistema de eixos cujo ângulo de identificação identifica o co-seno.

$a_{nx}$  ,  $a_{ny}$  ,  $a_{nz}$



Para um conjunto de co-senos  
diretores em uma normal  $n$   
sempre tem-se

$$\mathbf{a}_{nx}^2 + \mathbf{a}_{ny}^2 + \mathbf{a}_{nz}^2 = 1$$

Recordando um pouco noções básicas de vetores tem-se

Produto interno no  $\mathbb{R}^n$ : (*inner product ou dot product*)

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^n v_i u_i = \text{produto interno}$$

- comprimento ou norma:  $\|u\| = |u| = (u \cdot u)^{1/2}$ ,

- um vetor com comprimento 1 é chamado **normalizado** ou **unitário**

- **normalizar** um vetor  $\Rightarrow u / \|u\|$

- distância entre 2 pontos:

PQ  $\Rightarrow$  comprimento do vetor Q-P

Como se calcula a distância entre os pontos (1,1,1) e (2,3,1) ?

Vendo esses pontos como vetores, como eles são transformados em vetores unitários?

Produto interno no  $\mathbb{R}^n$ :  
(*inner product ou dot product*)

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^n v_i u_i = \text{produto interno}$$

$$(u \cdot v) = |u| |v| \cos(\beta) = 0$$

ângulo entre 2 vetores:  $u, v$

arco cosseno de

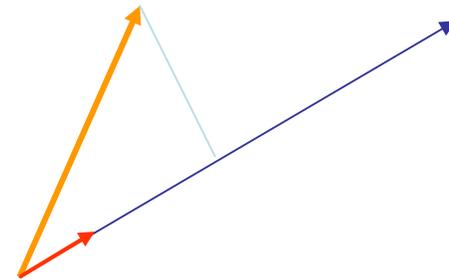
$$= (u \cdot v) / |u| |v|$$

Vendo os pontos  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$ ,  $(0,0,1)$ ,  $(1,1,1)$  e  $(2,3,1)$  como vetores, qual o co-seno do ângulo entre eles? Como se chega ao ângulo ?

Produto interno no  $\mathbb{R}^n$ :  
(*inner product ou dot product*)

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^n v_i u_i = \text{produto interno}$$

$$(u \cdot v) = |u| |v| \cos(\beta) = 0$$



a projeção de um vetor  $w$   
*perpendicularmente* em uma dada direção definida por um  
vetor  $v$  é o *produto interno* de  $w$  pelo *vetor unitário* na  
direção de  $v$  :  $u$

Projete o vetor  $(2,3,1)$  na direção de  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$ ,  $(0,0,1)$ ,  $(1,1,1)$  e  
 $(1,0,0) - (0,1,0)$ .

Produto interno no  $\mathbb{R}^n$ :  
(*inner product ou dot product*)

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^n v_i u_i = \text{produto interno}$$

2 vetores:  $u, v$

são chamados **ortogonais** se forem perpendiculares, ou seja se o ângulo ( $\beta$ ) entre eles for 90 graus

como o cosseno de 90 graus = 0

$$(u \cdot v) = |u| |v| \cos(\beta) = 0$$

Logo  $w$  e  $u$  são ortogonais a um vetor  $v$  se...

$$(u \cdot v) = |u| |v| \cos(\beta) = 0$$

# Componentes do vetor

- a projeção de um vetor  $\mathbf{A}$  3D em uma direção  $\mathbf{n}$  é obtida por  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = (A_x, A_y, A_z) \cdot (n_x, n_y, n_z)$
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = (A_x a_{nx} + A_y a_{ny} + A_z a_{nz})$
- Se  $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$  são as componentes de  $\mathbf{A}$  em um sistema de eixos, então suas componentes em qualquer outro sistema  $(x', y', z')$  “rotacionado” na mesma origem podem ser definidos pelos co-senos diretores entre as direções dos eixos  $(x, y, z)$  e  $(x', y', z')$

$$\begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \\ A_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{x'x} & a_{x'y} & a_{x'z} \\ a_{y'x} & a_{y'y} & a_{y'z} \\ a_{z'x} & a_{z'y} & a_{z'z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

(1)

# Essa transformação

- Caracteriza vetores de forma completa:
- Um vetor pode ser definido como uma entidade cujas componentes se transformam em relação a rotação do sistema de eixos com descrito pela equação anterior:
- $A_{i'} = \sum a_{i'j} A_j \quad i = x,y,z$

# Invariante de vetores

- Vetores também **têm invariantes**:
- Por exemplo:
- O módulo de um vetor independe do sistema de eixos usado para defini-lo :

$$(Ax'^2 + Ay'^2 + Az'^2) = (Ax^2 + Ay^2 + Az^2)$$

# Notação tensorial

- **Índice livre** - é o que aparece apenas uma vez como subscrito em um grupo de termos .
- $i$  é Índice livre em:  $A_i, a_{ij} A_j$
- Quando aparece um índice livre considera-se que ele pode representar qualquer uma das componentes  $x, y, z$  ou  $1, 2, 3$  etc... (  $A_x, A_y, A_z$  )

# Número de Índices livres

- Assim  $A_i$  representa um *vetor*
- $a_{ij}$  tem 2 índices livres e pode representar cada um dos 3 componentes , considerando todas as possibilidades tem-se 9 componentes:

$$\begin{pmatrix} a_{x'x} & a_{x'y} & a_{x'z} \\ a_{y'x} & a_{y'y} & a_{y'z} \\ a_{z'x} & a_{z'y} & a_{z'z} \end{pmatrix}$$

- Assim  $a_{ij}$  representa um *tensor*

# Índice provisório

- Quando as letras  $i, j, k, l, m$  são repetidas em uma expressão, faz-se a **soma** dos termos com os **índices repetidos** quando esses tomam *sucessivamente os valores dos eixos,  $x, y, z$  ou  $1, 2, 3$* .
- $a_{i k} A_k = (a_{ix} A_x + a_{iy} A_y + a_{iz} A_z)$
- E considerando todas as possibilidades para o **índice  $i$**  tem a expressão ( 1 )

índices **provisórios** repetidos = soma =  $\Sigma$

- Se houver duplos índices repetidos como na  $A_{kl} B_{kl}$ , tem-se após as multiplicações decorrentes das possíveis substituições de cada índice, a soma dos 9 termos.
- Com essa idéia de troca dos símbolos é irrelevante qual letra  $i, j, k, l, m$  é usada.
- Com essa notação a equação de transformação de vetores fica:

$$A_i = a_{ij} A_j$$

# Transformação de tensores

- São tensores qualquer conjunto de 9 quantidades  $A_{ij}$  que se transforma por rotação do sistema de eixos como:

$$A'_{ij} = a_i^k a_j^l A_{kl}$$

- (que é o mesmo que pré e pós multiplicar pela rotação transposta)

# Se os tensores em uma direção

$x y z$  forem

- $T_{ij} = \begin{pmatrix} -3,5 & 0 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0,7 & 0 & 5,6 \end{pmatrix}$

- *Como ele é representado em uma referencia  $x'y'z'$  que faz 30 graus em torno do eixo z.*

- Quais os  $a_{ij}$  ?  $\begin{pmatrix} a_{x'x} & a_{x'y} & a_{x'z} \\ a_{y'x} & a_{y'y} & a_{y'z} \\ a_{z'x} & a_{z'y} & a_{z'z} \end{pmatrix}$

- *Cada  $a_{ij}$  representa o ângulo entre  $i$  e  $i'$*

# Se os tensores em uma direção

$x y z$  forem

- $T_{ij} = \begin{pmatrix} -3,5 & 0 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0,7 & 0 & 5,6 \end{pmatrix}$

- *Como ele é representado em uma referencia  $x'y'z'$  que faz 30 graus em torno do eixo z.*

- Quais os  $a_{ij}$  ?

$$\begin{pmatrix} a_{x'x} & a_{x'y} & a_{x'z} \\ a_{y'x} & a_{y'y} & a_{y'z} \\ a_{z'x} & a_{z'y} & a_{z'z} \end{pmatrix}$$

- *Cada  $a_{ij}$  representa o ângulo entre  $i$  e  $i'$*

# Cossenos diretores

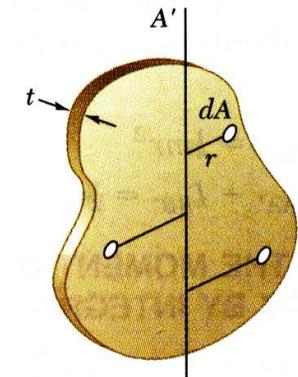
$$\left( \begin{array}{lll} \mathbf{a}_{x'x} = \cos 30 & \mathbf{a}_{x'y} = \cos 60 & \mathbf{a}_{x'z} = \cos 90 \\ \mathbf{a}_{y'x} = \cos 120 & \mathbf{a}_{y'y} = \cos 30 & \mathbf{a}_{y'z} = \cos 90 \\ \mathbf{a}_{z'x} = \cos 90 & \mathbf{a}_{z'y} = \cos 90 & \mathbf{a}_{z'z} = \cos 0 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{lll} \mathbf{a}_{x'x}=0,866 & \mathbf{a}_{x'y}=0,5 & \mathbf{a}_{x'z}=0 \\ \mathbf{a}_{y'x}=-0,5 & \mathbf{a}_{y'y}=0,866 & \mathbf{a}_{y'z}= 0 \\ \mathbf{a}_{z'x} = 0 & \mathbf{a}_{z'y}= 0 & \mathbf{a}_{z'z}= 1 \end{array} \right)$$

# os tensores em uma direção $x$ $y$ $z$ forem

- $T_{ij} = \begin{pmatrix} -3,5 & 0 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0,7 & 0 & 5,6 \end{pmatrix}$  com  $i$  e  $j = x, y$
- $T_{i'j'}$  com  $i'$  e  $j' = x, y$  (uso o tensor de cosenos diretores multiplicado por  $T$ )
- $T_{i'j'} = \begin{pmatrix} -2,623 & 1,516 & -0,606 \\ 1,516 & -0,875 & 0,350 \\ -0,606 & 0,350 & 5,600 \end{pmatrix}$

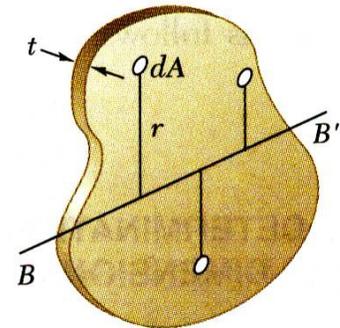
# Momentos de inércia de Placas Delgadas



- Para uma placa delgada de espessura uniforme  $t$  e feita de um material homogêneo de massa específica  $\rho$ , o momento de inércia da placa em relação ao eixo  $AA'$  contido no plano do placa é

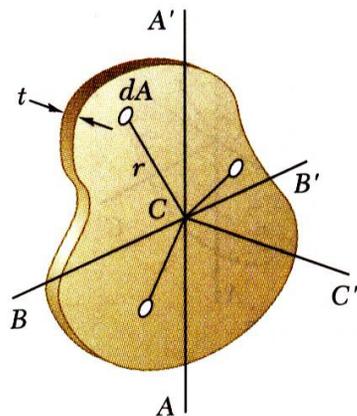
$$I_{AA'} = \int r^2 dm = \rho t \int r^2 dA$$

$$= \rho t I_{AA', \text{área}}$$



- De forma similar, para um eixo  $BB'$  perpendicular a  $AA'$  que também está contido no plano da placa, tem-se

$$I_{BB'} = \rho t I_{BB', \text{área}}$$



- Para o eixo  $CC'$  que é perpendicular ao plano da placa,

$$I_{CC'} = \rho t J_{C, \text{área}} = \rho t (I_{AA', \text{área}} + I_{BB', \text{área}})$$

$$= I_{AA'} + I_{BB'}$$

# tensores 2D só na direção $x' y'$

- $T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} \\ T_{yx} & T_{yy} \end{pmatrix}$  com  $i e j = x, y, z$

$$T_{i'j'} = \begin{pmatrix} T_{x'x'} & T_{x'y'} \\ T_{y'x'} & T_{y'y'} \end{pmatrix} \quad \text{com } i' e j' = x, y, z$$

- Os Co-senos diretores são 2D ângulos entre os sistemas de eixos .
- Denotamos  $a_{nx}$  e  $a_{ny}$  os co-senos entre os sistema de eixos

# E ficam as matrizes de rotação

$$T_{ij'} = \begin{pmatrix} T_{x'x'} & T_{x'y'} \\ T_{y'x'} & T_{y'y'} \end{pmatrix} = R^T \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} \\ T_{yx} & T_{yy} \end{pmatrix} R$$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

# A forma pode conter informações importantes.

- A literatura de processamento de imagens apresenta vários descritores ou medidas geométricas. Entre eles, destacam-se a compacidade, excentricidade, circularidade, descritores Fourier, desproporção circular, densidade circular e descritores de Feret, descritores baseados em momentos e curvatura.
- Para o cálculo de tais medidas não são levados em conta os níveis de cinza presentes nos objetos, ou seja, o objeto é binarizado.
- Somente suas propriedades geométricas, tais como área e perímetro são utilizados nos cálculos.

# Bibliografia

1. D. Cyganski and J.A. Orr - Object Recognition and Orientation Determination by Tensor Methods , (Chapter 4) , In T. S. Huang Editor- Advances in Computer Vision and Image Processing , vol. 3, 1988 - Time-varying Imagery Analysis