Programando o curso de

MÉTODOS NUMÉRICOS

TCC00325
G1
2024 / 1

Sistemas lineares

Métodos InDiretos

Nos **métodos iterativos:**
para resolver sistemas lineares

O sistema

$$Ax = b$$

é transformado em um
sistema equivalente

$$x = Cx + d$$

Método de Gauss-Jacobi

Faz o isolamento o vetor x
pela diagonal principal

Método de Gauss-Seidel

Idem e para cada nova
aproximação, usa os
componentes
da aproximação anterior, e os já
calculados
desta nova aproximação

Método de Gauss-Jacobi

se os elementos da **diagonal da matriz** *A* são não nulos , o sistema é **reescrito como iteração** a partir desta diagonal

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ -x_1 & + & 4x_2 & = & -5 \end{array}$$

isolando o $\boldsymbol{x_1}$ *da equação 1* e o $\boldsymbol{x_2}$ ***da equação 2*** , e escrevendo como iterações de $\boldsymbol{x_2}$ e $\boldsymbol{x_1}$ temos:

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= \frac{1}{2}(1 - x_2^k) \\ x_2^{k+1} &= \frac{1}{4}(-5 + x_1^k) \end{aligned}$$

Iniciando de $x^0 = (0,0)$

- teremos

Tolerância menor que 1x 10[5]

k	x_1^k	x_2^k
0	0,00000	0,00000
1	0,50000	− 1,25000
2	1,25000	− 1,25000
3	1,06250	− 0,96875
4	0,98438	− 0,98438
5	0,99219	− 1,00391
6	1,00195	− 1,00195
7	1,00098	− 0,99951
8	0,99976	− 0,99976
9	0,99988	− 1,00006
10	1,00003	− 1,00003
11	1,00001	− 0,99999
12	1,00000	− 1,00000

Convergiu na décima segunda!

O sistema linear tem solução exata $\bar{x} = (1, -1)$

O sistema foi se aproximando dela rapidamente : CONVERGIU !

Faca o mesmo iniciando agora com outro valor

- Por exemplo (0,5 ; -0,5)

- Ou (2 ; -2)

- Ou (0,9 ; -0,9)

CONVERGIU ainda?

Resumido o método

Iterativo de Gauss-Jacobi faz :

....

(descreva com suas palavras....)

Carl Gustav Jakob Jacobi

Em linguagem matemática

- Dado

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array},$$

- Reescrevemos

$$\begin{array}{ccl} x_1 & = & \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n) \\ x_2 & = & \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n) \\ \vdots & & \qquad\qquad\vdots \\ x_n & = & \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{nn}x_n) \end{array},$$

- E tornamos iterações

$$\begin{array}{ccl} x_1^{k+1} & = & \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \cdots - a_{1n}x_n^k) \\ x_2^{k+1} & = & \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^k - a_{23}x_3^k - \cdots - a_{2n}x_n^k) \\ \vdots & & \qquad\qquad\vdots \\ x_n^{k+1} & = & \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^k - a_{n2}x_2^k - \cdots - a_{nn}x_n^k) \end{array}.$$

convergência

E quando as coisas não convergem?

- Trocar o **valor inicial** ou a **ordem das linhas e colunas** do sistema pode ajudar!

Alguém descobriu uma coisa bem legal:

*Se **as linhas e colunas** estiverem em uma ordem tal que **ao se somar os valor absoluto dos coeficientes de cada uma** (menos o da diagonal principal) e **dividir pelo coeficiente da diagonal principal**, o valor máximo, disto for **menor que 1**, então o sistema sempre vai convergir ! .*

Isto quer dizer:

$$\alpha_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}| + \cdots |a_{1n}|}{|a_{11}|}$$

$$\alpha_2 = \frac{|a_{21}| + |a_{23}| + |a_{24}| + \cdots |a_{2n}|}{|a_{22}|}$$

$$\alpha_3 = \frac{|a_{31}| + |a_{32}| + |a_{34}| + \cdots |a_{3n}|}{|a_{33}|}$$

$$\vdots$$

$$\alpha_n = \frac{|a_{n1}| + |a_{n2}| + |a_{n3}| + \cdots |a_{n,n-1}|}{|a_{nn}|}$$

Em linguagem matemática

Isto virou um **teorema**, na forma:

Seja:

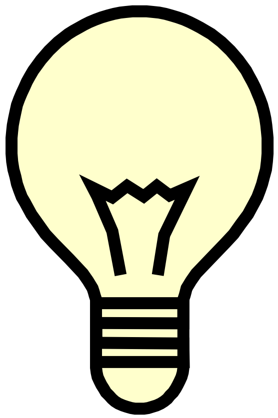
$$\alpha_k = \frac{1}{|a_{kk}|}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|.$$

Se $\alpha = \max\{\alpha_k : k = 1, 2, \ldots, n\} < 1$, *então o método de Gauss-Jacobi gera uma sequência* $\{x_k\}$ *convergente para a solução do sistema dado, independente da escolha da aproximação inicial* x_0.

A linguagem matemática

- Ajuda muito a gente a memorizar as coisas!!

- Grande aliada da gente , essa linguagem!!



Método de Gauss-Seidel

É uma variação do método anterior em que, para o cálculo de uma nova aproximação, já são usados os resultados recém calculados.

As iterações ficam:

$$
\begin{aligned}
x_1^{k+1} &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - a_{14}x_4^k - \cdots - a_{1n}x_n^k) \\
x_2^{k+1} &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k - a_{34}x_4^k - \cdots - a_{2n}x_n^k) \\
x_3^{k+1} &= \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1} - a_{34}x_4^k - \cdots - a_{3n}x_n^k) \\
\vdots & \qquad\qquad \vdots \\
x_n^{k+1} &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{k+1} - a_{n2}x_2^{k+1} - a_{34}x_4^{k+1} - \cdots - a_{nn}x_n^{k+1})
\end{aligned}
$$

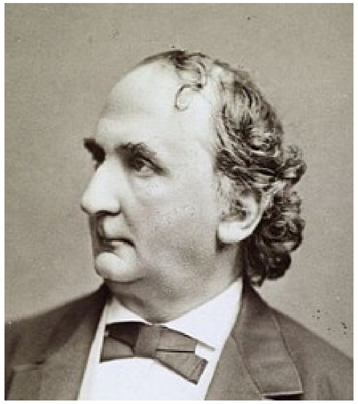
nome é

uma homenagem aos matemáticos alemães

Carl Friedrich Gauss

E

Philipp Ludwig von Seidel



Notou a leve diferença?

Resumido o método Iterativo de Gauss-Seidel consiste em:

....

(descreva com suas palavras....)

Refazendo o exemplo anterior

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ -x_1 & + & 4x_2 & = & -5 \end{array}$$

O processo iterativo agora fica:

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= \frac{1}{2}(1 - x_2^k) \\ x_2^{k+1} &= \frac{1}{4}(-5 + x_1^{k+1}) \end{aligned} .$$

Com a mesma aproximação inicial $x^0 = (0,0)$

Tolerância menor que 1x 10^5

considerando as iterações de exemplo

teremos

k	x_1^k	x_2^k
0	0,00000	0,00000
1	0,50000	− 1,12500
2	1,06250	− 0,98438
3	0,99219	− 1,00195
4	1,00098	− 0,99976
5	0,99988	− 1,00003
6	1,00001	− 1,00000
7	1,00000	− 1,00000

Convergiu na setima!

E a convergência?

- Pode ser usado **o mesmo critério do método anterior** e mais uma: o **critério de Sassenfeld** (que no fundo considera as atualizações novas que forem ocorrendo) !
- Esse é satisfeito sempre que o critério das linhas for satisfeito.
- O critério de Sassenfeld apresenta uma condição menos restritiva que o critério das linhas.
- Quando não satisfeito pode-se tentar uma nova disposição de linhas e colunas, trocando suas ordens e re-examinar o critério.

critério de Sassenfeld

- Seja um sistema linear Ax = b e seja

$$\beta_1 = \frac{|\, a_{12} \,| + |\, a_{13} \,| + |\, a_{14} \,| + \cdots + |\, a_{1n} \,|}{|\, a_{11} \,|} \longrightarrow \alpha_1 = \frac{|\, a_{12} \,| + |\, a_{13} \,| + |\, a_{14} \,| + \cdots |\, a_{1n} \,|}{|\, a_{11} \,|}$$

$$\beta_2 = \frac{\beta_1 \,|\, a_{21} \,| + |\, a_{23} \,| + |\, a_{24} \,| + \cdots + |\, a_{2n} \,|}{|\, a_{22} \,|}$$

$$\beta_3 = \frac{\beta_1 \,|\, a_{31} \,| + \beta_2 \,|\, a_{32} \,| + |\, a_{34} \,| + \cdots + |\, a_{3n} \,|}{|\, a_{33} \,|}$$

$$\vdots$$

$$\beta_n = \frac{\beta_1 \,|\, a_{n1} \,| + \beta_2 \,|\, a_{n2} \,| + \beta_3 \,|\, a_{n3} \,| + \cdots + \beta_{n-1} \,|\, a_{n,n-1} \,|}{|\, a_{nn} \,|}$$

Se

$$\beta = \max_{1 \leq i \leq n} \beta_i \; < \; 1$$

então o método de Gauss-Seidel converge para a solução do sistema linear, independentemente da aproximação inicial.

Exercício:

Esse sistema

$$\begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & & & + & 3x_3 & = & 3 \end{cases}$$

satisfaz o critério das linhas?

Isto é: quanto fica nesta disposição:

$$\alpha_1 = \frac{|\,a_{12}\,| + |\,a_{13}\,|}{|\,a_{11}\,|} =$$

$$\alpha_2 = \frac{|\,a_{21}\,| + |\,a_{23}\,|}{|\,a_{22}\,|} =$$

$$\alpha_3 = \frac{|\,a_{31}\,| + |\,a_{32}\,|}{|\,a_{33}\,|} =$$

Não! Precisamos tentar trocas

Se permutamos a primeira e terceira linhas e a primeira e terceiras colunas, obtemos

$$\begin{cases} 3x_3 & & + & x_1 & = & 3 \\ x_3 & - & x_2 & & = & 2 \\ 3x_3 & + & x_2 & + & 2x_1 & = & 1 \end{cases}$$

mas o valor Maximo é 1 e não menor que 1 !

E o critério de Sassenfeld?

$$\beta = \max_{1 \le i \le n} \beta_i \; < \; 1$$

onde

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}| + \cdots + |a_{1n}|}{|a_{11}|}$$

$$\beta_2 = \frac{\beta_1 |a_{21}| + |a_{23}| + |a_{24}| + \cdots + |a_{2n}|}{|a_{22}|}$$

$$\beta_3 = \frac{\beta_1 |a_{31}| + \beta_2 |a_{32}| + |a_{34}| + \cdots + |a_{3n}|}{|a_{33}|}$$

$$\vdots$$

$$\beta_n = \frac{\beta_1 |a_{n1}| + \beta_2 |a_{n2}| + \beta_3 |a_{n3}| + \cdots + \beta_{n-1} |a_{n,n-1}|}{|a_{nn}|}$$

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}|}{|a_{11}|} = \frac{|0| + |1|}{|3|} = \frac{1}{3} < 1$$

$$\beta_2 = \frac{\beta_1 |a_{21}| + |a_{23}|}{|a_{22}|} = \frac{(1/3)|1| + |0|}{|-1|} = \frac{1}{3} < 1$$

$$\beta_3 = \frac{\beta_1 |a_{31}| + \beta_2 |a_{32}|}{|a_{33}|} = \frac{(1/3)|3| + (1/3)|1|}{|2|} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} < 1$$

criterio de Sassenfeld
é satisfeito !

Resolva com tolerância $< 0,1$

- Mas lembre que a ordem do valor inicial será $x = (x_3, x_2, x_1)$, pois o sistema para convergir ficou:

$$\begin{cases} 3x_3 & & + & x_1 & = & 3 \\ x_3 & - & x_2 & & = & 2 \\ 3x_3 & + & x_2 & + & 2x_1 & = & 1 \end{cases}$$

Na forma de iterações: $x_3^{k+1} = 1 - x_1^k / 3$

$$x_2^{k+1} = x_3^{k+1} - 2$$

$$x_1^{k+1} = 0.5(1 - 3x_3^{k+1} - x_2^{k+1})$$

Iteragindo a partir do valor (0,0,0)

Iteração	x_3	x_2	x_1
1	1.000000000000000	−1.0000000000000000	−0.500000000000000
2	1.166666666666667	−0.8333333333333333	−0.833333333333333
3	1.277777777777778	−0.7222222222222221	−1.055555555555556
4	1.351851851851852	−0.6481481481481481	−1.203703703703704
5	1.401234567901235	−0.5987654320987652	−1.302469135802470
6	1.434156378600823	−0.5658436213991767	−1.368312757201647
7	1.456104252400549	−0.5438957475994510	−1.412208504801098

a tolerância < 0,1 foi atingida na sexta iteração!

As incógnitas são aproximadamente x_3=1,45 ; x_2=-0,54 e x_1=-1,35

Com outro valor inicial a tabela ficará outra!

- Podendo demorar mais ou menos para convergir, mas deve convergir também!!
- Devido ao critério de Sassenfeld .

Referências

- https://www.ime.unicamp.br/~valle/Teaching/MS211/Aula07.pdf

- https://www.respondeai.com.br/conteudo/calculo-numerico/sistemas-lineares-e-nao-lineares/metodo-de-gauss-jacobi/1196