

# Avaliação da Geometria dos Meios Porosos por Imagens Binárias\*

Aura Conci, Inhaúma Neves Ferraz, Ana Cristina Bicharra Garcia,  
Evelyn de Almeida Vieira† e Rafael Heitor Correia de Melo †

Depto de Ciências de Computação, IC, UFF- Universidade Federal Fluminense,

Rua Passo da Pátria 156, 24210 -240, Niterói, RJ

E-mails: aconci@ic.uff.br , ferraz@dcc.ic.uff.br, bicharra@dcc.ic.uff.br ,  
evelyn@addlabs.uff.br, heitor@addlabs.uff.br

## Resumo

Na área de análise de imagens, se excluirmos alguns problemas específicos de reconhecimento de padrões e restauração, a maioria das aplicações precisa caracterizar os objetos descritos pelas imagens usando a noção de forma ou estrutura. Essa estrutura ou forma é definida como o conjunto de relações entre elementos ou partes dos objetos, ou seja, sua morfologia. Desde seu surgimento em 1964, na *École des Mines de Paris*, a morfologia matemática vem se desenvolvendo continuamente e sendo usada para quantificar e qualificar minérios em petrografia, auxiliando a previsão das propriedades de solos e rochas. Este trabalho aborda os fundamentos teóricos da morfologia matemática utilizados na implementação de um sistema de caracterização de grãos por imagens binárias (preto e brancas). Discute-se, por exemplos, os resultados obtidos com as duas técnicas implementadas, verificando seus limites de aplicabilidade na resolução do problema petrográfico de contagem e medição de grãos constitutivos dos meios porosos.

## Introdução

A contagem e a medição de grãos de um dado material (figura 1) é útil a engenheiros, geólogos, agrônomos, biólogos e cerealistas, pois, através da determinação de freqüências de tamanhos de grãos, presentes em amostras do material, é possível conhecer suas propriedades ou classificar um produto.

Para rochas, a contagem e a medição de grãos é feita através de peneiras, ou seja, fisicamente. A aplicação que ilustra este trabalho surgiu da idéia de automatizar este processo, através da análise das imagens que contenham grãos, o que é tratado pela granulometria.

Na medição de grãos usando imagens pode-se estabelecer um paralelo com o processo que ocorre no peneiramento físico de um material. Depois do peneiramento, tem-se dois conjuntos de materiais: o material que ficou retido e o que passou pela peneira.

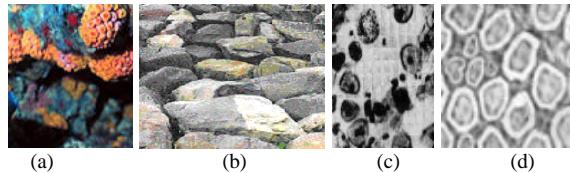


Figura 1: Imagens reais a serem analisadas. Em (a) grãos tridimensionais usadas para caracterização de substratos de barragens; em (b) grãos tridimensionais usadas para definição das características de agregados na engenharia civil, em (c) lamínulas de células cancerígenas e em (d) e seção histológica dos olhos, todas exemplos onde o estudo de granulometria é relevante

Pela contagem ou pesagem dos materiais retidos na peneira é estabelecido um histograma que relaciona o tamanho do grão com a quantidade de material. Este histograma é chamado de curva granulométrica. Assim, uma definição adequada do tamanho do grão presente no material depende da escolha do conjunto e do tamanho de malhas de peneiras usadas.

Existem diferentes formas de representação das curvas granulométricas em função do tamanho das peneiras: por número ou por medidas (peso ou volume). No primeiro caso, a cada partícula é atribuído o mesmo valor, independente de sua massa, ou tamanho. No segundo caso, a cada partícula é atribuído um valor proporcional a medida considerada. Esses dois tipos de granulometrias algumas vezes são relacionáveis.

Neste trabalho consideramos a primeira forma de granulometria. Faremos, na próxima seção, uma apresentação dos conceitos da teoria a ser utilizada. Depois apresentaremos, por exemplos, a idéia de dois algoritmos de granulometria usando imagens. À medida que são comentadas as limitações de cada algoritmo prossegue-se explicando os detalhes que incluído solucionarão estas limitações. Diversos exemplos, para ilustrar as aplicabilidades de cada algoritmo apresentado, são analisados.

## Morfologia Matemática

A morfologia matemática foi desenvolvida para ser utilizada como uma ferramenta para a extração de elementos das imagens e sua descrição em termos da qualificação das formas relevantes e sua quantificação [Serra, 1982]. Esta teoria sempre associa as imagens aos objetos que elas representam e as operações

\*Realização SBMAC, apoio FAPESP, URL:  
<http://www.ibilce.unesp.br/eventos/cnmac/home.htm>

†Bolsistas do laboratório ADDLabs

realizadas aos elementos que se procura nestas imagens. Usa a idéia de que perceber uma imagem é transformá-la. Assim seus operadores são construídos para produzir efeitos e usando um conjunto mínimo de operações elementares denominadas dilatação e erosão.

A morfologia digital é uma ciência relativamente recente [Matheron, 1975], os matemáticos a consideram uma aplicação da teoria de conjuntos. A morfologia oferece uma abordagem não linear bem estruturada, unificada e poderosa para numerosos problemas de processamento de imagens [Soille, 1999].

Os conjuntos em morfologia matemática representam as formas dos objetos em uma imagem. Por exemplo, o conjunto de todos os pixels, suas cores e sua posição em uma imagem digital é uma descrição completa dessa imagem.

Em imagens binárias, os conjuntos em questão são membros do espaço bidimensional de números inteiros  $Z^2$ , em que cada elemento do conjunto é um vetor bidimensional cujas coordenadas são as coordenadas  $(i,j)$  (por convenção) dos pixels ligados ou relevantes da imagem. Por exemplo, se considerarmos relevantes os pixels pretos e o início dos eixos a posição central, a imagem da figura 2(c) é equivalente ao conjunto  $\{(1,1);(1,-1);(-1,-1);(-1,1)\}$ .

Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos de  $Z^2$ , com componentes  $a=(a_1, a_2)$  e  $b=(b_1, b_2)$ , respectivamente. A **translação** de  $A$  por uma distância  $x$  ou um vetor  $x = (x_1, x_2)$ , denotada por  $(A)_x$ , é definida como:

$$(A)_x = \{c \mid c = a + x, \text{ para } a \in A\}$$

A **reflexão** em torno da origem de um conjunto  $B$ , é denotada por  $\hat{B}$  e é definida como:

$$\hat{B} = \{x \mid x = -b, \text{ para } b \in B\}$$

O **complemento** de um conjunto  $A$  é denotado por  $A^c$ . Esse conjunto é definido como todos os elementos do espaço subjacente, que não são elementos de  $A$ :

$$A^c = \{x \mid x \notin A\}$$

Finalmente, a **diferença** entre dois conjuntos  $A$  e  $B$ , denotada por  $A-B$  (ou  $A/B$ ) é definida como:

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\} = A \cap B^c$$

No caso dos meios porosos, uma abordagem por teoria dos conjuntos também é possível. Neste caso vamos chamar de conjunto  $A$  os componentes sólidos do meio (a união de todos os grãos) e  $A^c$  sua rede de poros. Este meio será "escaneado" por uma figura  $B$  que fará o papel de uma sonda coletora de informações. No caso de granulometria, mais do que um conjunto  $B$  pensaremos em escolher um famílio  $\beta$  de possíveis "sondas". A relação mais elementar entre esse "coletor de informações" e o meio é que  $B$  deve estar contido no conjunto de grãos do meio, isso é  $B \subset A$ , ou  $B \subset A^c$  [Matheron, 1967].

Um conceito importante na morfologia matemática é a definição de elemento estruturante. O elemento estruturante é um conjunto definido e conhecido (forma e tamanho), que é usado em uma operação com o conjunto da imagem para salientar determinado

aspecto. Ele pode assumir várias formas dependendo do efeito a ser obtido e sua origem pode ser definida em qualquer ponto. Alguns elementos estruturantes são exemplificados na figura 2. Fazendo uma analogia com os meios porosos, elementos estruturante convexos podem ser visualizados como os "coletores de informações" do meio.

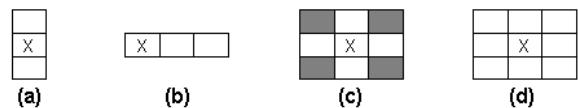


Figura 2: Exemplo de elementos estruturantes: (a) em coluna, (b) em linha, (c) em cruz e (d) quadrado

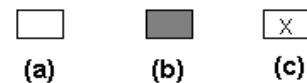


Figura 3: Convenção de representação dos pixels para imagens binárias: (a) pixel ligado (branco), (b) pixel desligado (preto) e (c) origem do elemento estruturante

A **dilatação** da imagem  $A$  pelo elemento estruturante  $B$  é uma das operações fundamentais da morfologia matemática e pode ser (há outras definições equivalentes) definida por:

$$A \oplus B = \{x \mid (\hat{B})_x \cap A \neq \emptyset\}$$

A dilatação expande uma imagem tornando-a maior ou igual à imagem original, conecta formas separadas na imagem e preenche os vazios menores que o elemento estruturante. Tem diversas propriedades interessantes. A dilatação é uma transformação contínua, comutativa:

$$A \oplus B = B \oplus A$$

e associativa:

$$A \oplus (B_1 \oplus B_2) = (A \oplus B_1) \oplus B_2$$

A dilatação é crescente, ou seja:

$$\text{Se } X \subset Y \text{ então } X \oplus B \subset Y \oplus B$$

A dilatação é extensiva, isto é o conjunto transformado contém o conjunto inicial:  $A \oplus (A \oplus B) = A \oplus B$ .

Outra operação fundamental da morfologia matemática é a **erosão** da imagem  $A$  pelo elemento estruturante  $B$ , que pode ser definida por:

$$A \ominus B = \{x \mid (B)_x \subseteq A\}$$

A erosão não é comutativa, nem associativa. Mas ela é uma transformação contínua e crescente como a dilatação, isso é:

$$\text{Se } X \subset Y \text{ então } X \ominus B \subset Y \ominus B$$

Para a erosão a seguinte propriedade também é válida:

$$(A \ominus B_1) \ominus B_2 = A \ominus (B_1 \oplus B_2)$$

A erosão é anti-extensiva, ou seja, a imagem resultante da erosão é sempre menor ou igual à imagem original:  $(A \ominus B) \subset A$ . Intuitivamente a erosão remove todas as posições onde o elemento estruturante não couber completamente e aumenta vazios interiores presentes nas formas da imagem.

A operação de **abertura** faz o uso das duas operações básicas da morfologia. É definida como uma erosão seguida de dilatação com o mesmo elemento estruturante. A operação de erosão remove os ruídos e os contornos dos objetos menores que o elemento estruturante. Na etapa seguinte, a dilatação vai restaurar a maioria dos pixels do contorno sem restaurar os pixels referentes aos ruídos. Assim, a operação de abertura suaviza o contorno de uma imagem, elimina pontas agudas e formas presentes na imagem que sejam menores do que o elemento estruturante utilizado nesta abertura.

A abertura da imagem  $A$  pelo elemento estruturante  $B$  pode ser definida por:

$$A \circ B = (A \Theta B) \oplus B$$

A abertura é anti-extensiva ( $X \circ B \subset X$ ), crescente:

$$\text{Se } X \subset Y \text{ então } X \circ B \subset Y \circ B$$

e idempotente, o que quer dizer que, repetindo-se a operação mais de uma vez, não se tem mais nenhum efeito adicional, ou seja:

$$(A \circ B) \circ B = A \circ B$$

A contagem e medição de grãos, problema considerado neste trabalho através da granulometria, pode ser tratado usando morfologia matemática, pois, através desse método, podemos simular o processo de peneiramento. Para isto, utilizamos “peneiras virtuais”, onde processamos uma imagem por uma “família” de elementos estruturantes ( $I, B$ ). Essa família é definida pela multiplicação de todos os elementos de  $B$  por um número positivo  $I$ , de forma a produzir um conjunto contínuo  $IB = \{ Ix, x \in B \}$ .

## Granulometria Simples

Um conceito importante na granulometria é o de curva granulométrica (ou histograma de distribuição de tamanhos) que é uma função do número de grãos (ou outra medida) pelos seus respectivos tamanhos. Representamos o tamanho de um grão pelo seu diâmetro que é definido como sendo a maior distância entre dois pontos deste grão. Podemos observar um exemplo de curva granulométrica por número de grãos na figura 4.

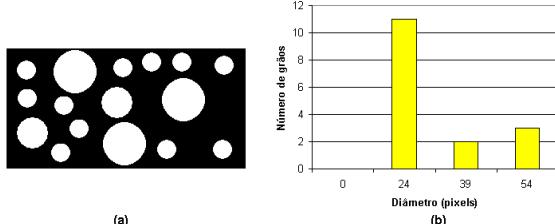


Figura 4: Exemplo de curva granulométrica: (a) Imagem de entrada e (b) Curva granulométrica

Essa curva granulométrica pode ser aproximada pela operação de abertura da imagem por uma família de elementos estruturantes ( $I, B$ ), um conjunto de aberturas crescentes de tamanho  $I=2, 3, 4, \dots$  onde  $B$

seria o elemento estruturante mostrado na figura 3(c), ou seja,  $IB$  pode ser, neste caso, o tamanho do lado da matriz quadrada que representa o elemento estruturante. À medida que aplicamos esta sequência de aberturas na imagem, os grãos vão diminuindo até eventualmente desaparecer.

Estas operações de abertura correspondem à passagem da imagem por “peneiras virtuais”, considerando a forma e o tamanho do elemento estruturante usado na abertura como sendo equivalentes às formas e tamanhos dos buracos da malha desta peneira. Conforme os grãos presentes na imagem vão passando por estes buracos da “peneira virtual”, na imagem, eles irão desaparecendo. Após a aplicação da abertura com um determinado elemento estruturante, é feita uma subtração entre a imagem do passo anterior e atual e os pixels que desaparecem neste passo vão sendo marcados, atribuindo-lhes o tamanho  $I$  do elemento estruturante  $IB$ .

Para uma família de elementos estruturantes convexos ( $I, B$ ), um sub-conjunto  $A$  do espaço Euclidiano  $E=\mathbb{R}^d$  e para  $I > 0$ , uma granulometria é definida como o mapeamento  $I \otimes y_I(A)$  onde

$$y_I(A) = A \circ IB = \cup \{ IB_x, x \in E, IB_x \subset A \}$$

Uma granulometria  $y_I$  satisfaz as condições [Matheron, 1975- p. 24] :

- (1)  $y_0(A) = A$ , e se  $I > 0$  então  $y_I(A) \subset y_m(A)$ ;
- (2) para  $I > 0$  e  $C \subset D$ ,  $y_I(C) \subset y_I(D)$ ; e
- (3) para  $I > m > 0$ ,  $y_I(y_m(A)) = y_m(y_I(A)) = y_{sup(I,m)}(A)$ .

A primeira propriedade indica que, a medida em que se segue no conjunto de aberturas (peneiramentos), obtém-se conjuntos que estão contidos nos conjuntos dos resultados dos peneiramentos anteriores. Ou em outras palavras, os conjuntos transformados tem cada vez menos material.

A segunda propriedade diz que a granulometria de uma parte do conjunto deve estar contida no resultado do todo. É um consequência direta da abertura ser uma operação crescente. Esse resultado será importante no caso de usar-se amostras com níveis de resolução diversas. Partes do solo devem estar contidas na representação do todo.

A terceira propriedade está relacionada com a idempotência da operação de abertura. E nos diz que o resultado de duas operações com aberturas consecutivas deve ser o mesmo independente na ordem em que é feito, e igual ao do peneiramento com a peneira de malha maior.

A seguir, exemplifica-se o funcionamento do algoritmo de granulometria através de um exemplo utilizando uma imagem com grãos de formas exatamente iguais a família de elementos estruturantes usados.

Neste exemplo, consideramos a imagem binária da figura 5(a) como entrada da granulometria. Para a forma quadrada da família  $IB$  usada, o algoritmo de granulometria começa aplicando uma abertura com um

elemento estruturante  $2 \times 2$ : o resultado desta abertura pode ser visualizado na figura 5(b). Este resultado servirá de entrada para a próxima etapa. A subtração do conjunto da figura 5(a) pelo da figura 5(b) mostra os pixels que desapareceram da imagem nesta primeira etapa. Eles são marcados em uma imagem inicialmente vazia com o valor do lado  $I$  do elemento estruturante  $IB$  usado, como podemos observar na figura 5(c).

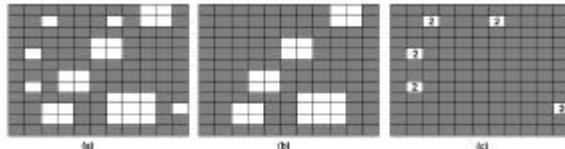


Figura 5: Exemplo da primeira etapa da granulometria: (a) Imagem original, (b) Imagem com abertura por elemento quadrado  $2 \times 2$ , (c) Imagem resultante.

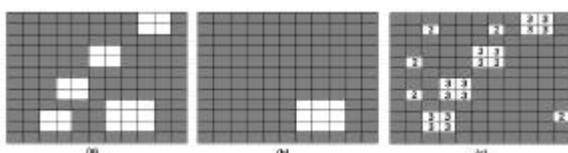


Figura 6: Exemplo da segunda etapa da granulometria: (a) Imagem referente a abertura da primeira etapa, (b) Imagem com abertura por elemento quadrado  $3 \times 3$ , (c) Imagem resultante

Na segunda etapa, ilustrada pela figura 6, a "malha virtual" cresce, ou seja, é aplicada a abertura com um elemento estruturante maior. Neste caso, o tamanho seguinte é  $3 \times 3$ . A figura 6(a) é a imagem de entrada desta etapa; a figura 6(b) corresponde a esta imagem depois de aplicada a abertura. Da mesma forma que na etapa anterior, os pixels que desapareceram da imagem, nesta segunda etapa, são marcados em uma imagem resultante (figura 6(c)) que neste exemplo já possui marcações da etapa anterior.

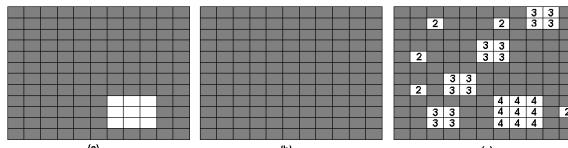


Figura 7: Exemplo da terceira etapa da granulometria: (a) Imagem referente a abertura da segunda etapa, (b) Imagem com abertura por elemento quadrado  $4 \times 4$ , (c) Imagem resultante.

Na terceira etapa, ilustrada pela figura 7, o tamanho do elemento estruturante passa a ser  $4 \times 4$ . A figura 7(a) é a imagem de entrada desta etapa; a figura 7(b) corresponde a esta imagem depois de aplicada a abertura. Como nas etapas anteriores são feitas as marcações dos pixels que desapareceram após a abertura (figura 7(c)). Neste exemplo, esta é a última etapa da granulometria, já que a entrada da próxima etapa seria a figura 7(b) que não possui elementos a serem analisadas (imagem não possui nenhum pixel ligado): logo, todas as formas foram "peneiradas". Se isto não tivesse acontecido neste momento, as etapas continuariam a acontecer da mesma forma até que se chegasse a uma imagem sem nenhum pixel ligado.

O resultado final da granulometria [Matheron, 1975]

é obtido através da curva granulométrica, que é calculada a partir das últimas imagens resultantes das etapas da granulometria, neste exemplo, resumida na figura 7(c). Assim é calculado o histograma desta imagem que indicará o número de pixels que desapareceram em cada passo. Este histograma está representado na figura 8, em relação ao tamanho do elemento estruturante do passo em que os pixels desapareceram *versus* o número de pixels a desaparecerem, ou seja usando como medida o número de pixels.

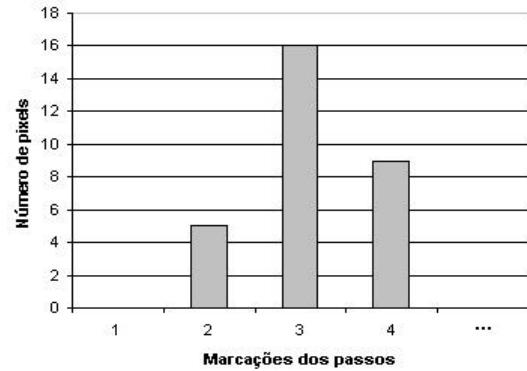


Figura 8: Histograma obtido a partir da imagem 8(c).

Depois de calculado este histograma, é necessário calcular a curva granulométrica. Neste exemplo, consideraremos a curva granulométrica na forma de número *versus* diâmetro de grãos. Para isso, dividimos o número de pixels desaparecido em cada passo (histograma da figura 8) pela área do grão que desaparece no passo (elemento estruturante imediatamente inferior ao utilizado neste passo). Isto porque, como vimos na definição de abertura, a abertura de uma imagem por um elemento estruturante quadrado  $3 \times 3$  por exemplo, faz com que desapareçam desta imagem todos os grãos com área menor do que a área deste elemento estruturante. Como neste método utilizamos uma seqüência crescente de aberturas ( $2, 3, 4, \dots$ ) os grãos que somem em cada passo são sempre imediatamente menores do que o tamanho do elemento estruturante utilizado. O resultado deste cálculo indica o número de grãos presentes na imagem com tamanho (diâmetro) imediatamente menor do que o valor deste passo (que corresponde ao valor do lado do elemento estruturante). A figura 9 ilustra a curva granulométrica obtida para este exemplo.

## Analisando Imagens Binárias

A aplicação implementada para análise granulométrica foi desenvolvida em C++, empregando paradigmas da orientação a objetos. As classes que representam os filtros utilizados para o processamento das imagens foram desenvolvidos em dll's. Estas fazem uso de uma biblioteca de visualização e processamento de imagens chamada CxImage [Pizzolato, 2003], bem como de uma biblioteca de manipulação gráfica denominada GraphCtrl [Yuantu

Huang, 2000] e de uma biblioteca de desenho de tabelas chamada GridCtrl [Maunder, 2002] que serão utilizadas na exibição dos resultados. Todas essas bibliotecas são de código aberto e se encontram disponíveis na Internet. Inicialmente foram implementadas as operações morfológicas binárias básicas (erosão e dilatação), a abertura e, posteriormente, a granulometria.

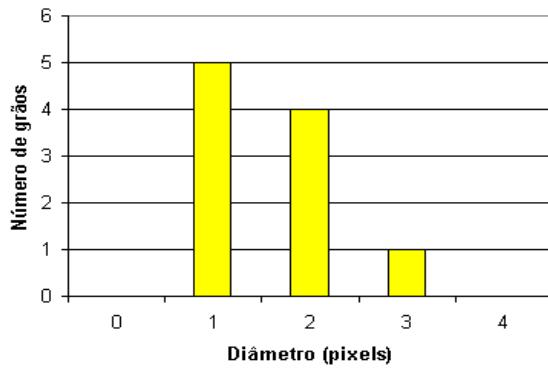


Figura 9: Curva granulométrica

Com relação ao elemento estruturante, neste algoritmo inicial, fizemos vários testes quanto à sua forma. Inicialmente, utilizamos somente o elemento estruturante quadrado, depois foram testados elementos estruturantes com formatos de círculo e losango (com todos os ângulos iguais). Isto foi feito para permitir que grãos com estas formas fossem detectados com mais facilidade. Assim, ao se iniciar o processo da granulometria, o usuário tem a opção de definir a forma que melhor representa os grãos presentes na imagem. Como veremos a seguir a seguir a forma da família usada nas aberturas é um aspecto fundamental.

Para validar o algoritmo proposto, executamos a granulometria simples em imagens com resultado facilmente verificáveis (número de formas e seus respectivos diâmetros). Calculamos o resultado esperado e comparamos com os resultados obtidos pelo método proposto. Estes testes são apresentados a seguir. Todas as imagens usadas (a menos que comentado explicitamente) possuem a resolução de 300 x 180 pixels. No primeiro exemplo, optamos por testar o método com 25 formas quadradas de 5 tamanhos diferentes. A imagem usada para este teste foi a da figura 10, que possui 5 quadrados de cada tamanho (os lados são: 9, 14, 19, 24, 34 pixels). O resultado do cálculo feito a partir de elementos estruturantes quadrados de 2x2, incrementados de 1 em 1 pixel por passada, teve 100% de acerto como é mostrado na tabela 1.

No segundo teste, também foram usadas formas quadradas, desta vez 30 quadrados com 4 tamanhos em números diferentes. A imagem usada para este teste foi a da figura 11. Na tabela 2 é mostrado o número de vezes que cada quadrado aparece na figura e o valor detectado pelo programa, bem como o valor do seu lado em pixels. Foi usado o mesmo procedimento de

incremento do exemplo 1. O mesmo resultado de 100% de acerto ocorreu. Resultados completamente corretos são obtidos pelo método para qualquer exemplo de formas quadradas disjuntas, ou seja para formas quadradas e elementos estruturantes quadrados obtém-se sempre 100% de acerto pelo algoritmo de granulometria simples.

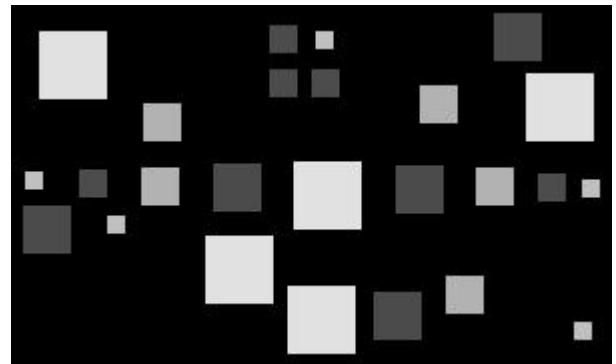


Figura 10: exemplo 1 (25 formas quadradas)

diâmetro	imagem	algoritmo
9	5	5
14	5	5
19	5	5
24	5	5
34	5	5

Tabela 1 - Comparaçao entre os valores da curva granulométrica da imagem da figura 10 e os resultados obtidos a partir do programa.

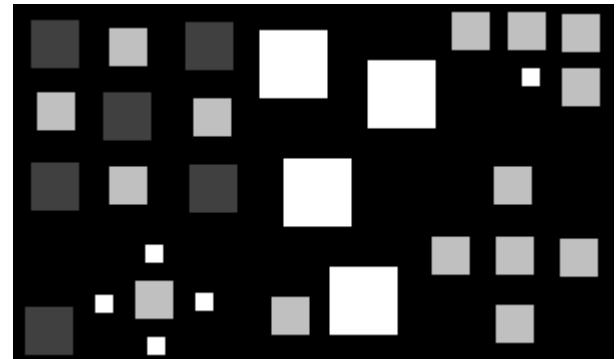


Figura 11: Segundo exemplo de validação com formas quadradas

Considerando outras formas, o losango foi a forma seguinte a ser analisada, já que o usuário, antes da análise, pode escolher e usar elementos estruturante desta forma, se mais adequados às presentes na imagem (ou grãos). A imagem usada para este teste é mostrada na figura 12, que contém 16 losangos com suas diagonais nos tamanhos mostrados na coluna diâmetro da tabela 3. Neste exemplo, também se obteve 100% de acerto. Para ser possível a construção de elementos estruturantes com formas losangulares de quinas agudas, os incrementos neste caso são de 2 em dois pixels a partir de um elemento em cruz 3x3, isto é

apenas tem-se elementos estruturantes de diagonal (ímpares): 3,5,7,9, etc.

diâmetro	imagem	algoritmo
9	5	5
19	15	15
24	6	6
34	4	4

Tabela 2 - Comparação entre os valores da curva granulométrica da imagem da figura 11 e os resultados obtidos a partir do programa

Resultado 100% corretos ocorrem para qualquer número de formas losangulares com ângulos retos e diagonais com números ímpares de pixels. Neste caso há uma correspondência exata entre as formas do elemento estruturante da família usada para fazer a abertura e as imagens presentes para qualquer tamanho  $\lambda$  do elemento estruturante usado.

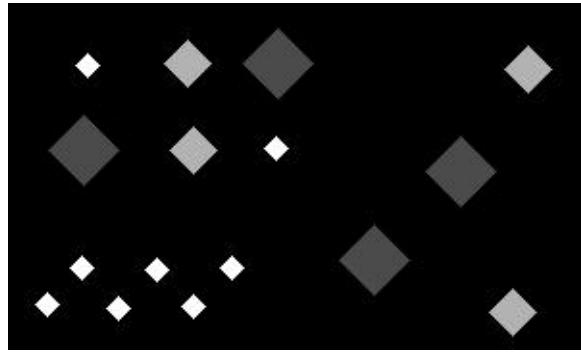


Figura 12: Exemplo 3 (validação com formas losangulares)

diâmetro	imagem	algoritmo
13	8	8
25	4	4
37	4	4

Tabela 3 - Comparação entre os valores da curva granulométrica da imagem da figura 12 e os resultados obtidos a partir do programa

Considerando ainda testes com grãos de mesma forma dos elemento estruturantes, o círculo é a próxima forma testada (como dito anteriormente, o usuário pode escolher o elemento estruturante mais adequado às formas presentes na imagem antes da análise). A imagem usada para este teste é mostrada na figura 13, com 20 círculos com 4 diâmetros diferentes: 4 círculos de diâmetro 7; 6 círculos de diâmetro 15; 6 círculos de diâmetro 23 e 4 círculos de diâmetro 35. A curva granulométrica obtida pelo programa, usando crescimento incremental de grãos é mostrada na figura 14. Foram usados incrementos de diâmetros de 2 em 2 pixels, a partir de um diâmetro inicial de 3 pixels (onde

o círculo acaba sendo aproximado pelo elemento estruturante mostrado na figura 2(c)). Para este crescimento incremental foi usado um algoritmo de geração de círculos a partir de um dado diâmetro [7].

No histograma representado na figura 14 pode-se perceber que, diferentemente dos outros testes com elementos quadrados e em formato de losango com lados a  $90^\circ$  (onde em cada passo o elemento estruturante usado cobrem perfeitamente a forma do grão presente na imagem) neste caso não se tem 100% de acerto.

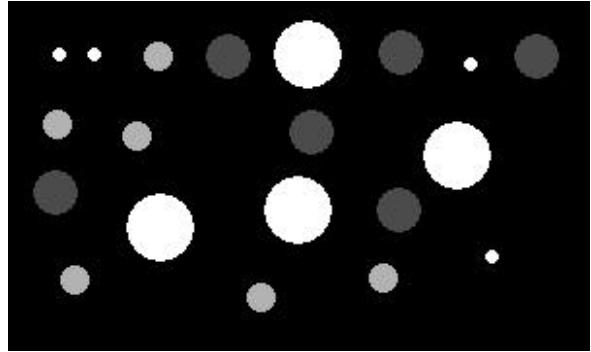


Figura 13: Exemplo 4 (validação com formas circulares)

O teste com elementos estruturantes com formatos não exatamente iguais aos grãos não apresenta o resultado esperado. Isto se deve ao fato de que quando as formas não se encaixam perfeitamente, pixels de contorno são perdidos durante as operações de abertura. Mesmo quando o formato dos grãos é uniforme e o elemento estruturante aproxima bem a forma do grão, como no caso deste exemplo, pode ocorrer perdas nos contornos.

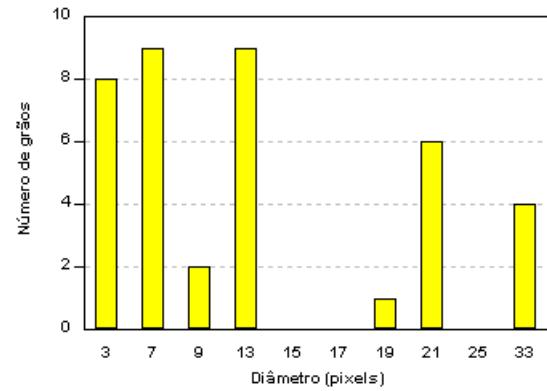


Figura 14: Curva granulométrica do exemplo 4 usando algoritmo simples.

O mesmo ocorre se o crescimento das famílias se fizer de maneira que os elementos não se encaixem perfeitamente nos grãos, havendo perda de partes dos grãos maiores na abertura pelos elementos estruturantes menores. Veja o que ocorre por exemplo, ao se operar o elemento estruturante da figura 2(c), que é o primeiro elemento da série de aberturas circulares, com o grão em formato circular ampliado na figura 15.

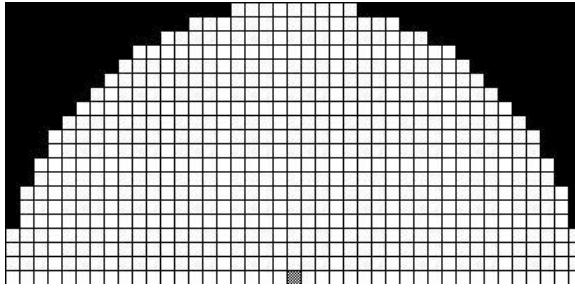


Figura 15: Ampliação de um grão circular. Repare que um elemento em cruz 3x3, que é o primeiro elemento estruturante da aproximação de grãos circulares não se encaixa em muitas posições do contorno, fazendo com que partes do grão sejam perdidas.

A perda de partes do grão faz com que não haja mais 100% de acerto. Pois os pixels eliminados vão sendo identificados como grãos, ao mesmo tempo que os grãos existentes perdem elementos e sejam identificados como sendo menores do que o seu tamanho real. Assim famílias de elementos estruturantes que não se encaixam exatamente em todos os grãos faz com que alguns grãos inexistentes sejam identificados como presentes na imagem (normalmente os de tamanhos menores). Isto inviabiliza a utilização deste algoritmo simples quando o formato do elemento estruturante pode não coincidir exatamente com os dos grãos, ou no caso de grãos irregulares. Assim, se o propósito for usar grãos irregulares ou grãos com formas não tão simples como os dos primeiros exemplos o algoritmo básico precisa ser adequado para o método que discutiremos na próxima seção.

Para respaldar esse argumento, a mesma imagem da figura 13 foi processada apenas com um conjunto de elementos estruturantes que eliminam, na erosão, completamente os grãos que constam na imagens, ou seja, círculos com diâmetros com 9, 17, 25 e 37 pixels. O resultado obtido foi: 8 grãos de tamanho 7, 6 de diâmetro 13, 6 de diâmetro 23 e 4 de diâmetro 35. Neste caso as respostas se apresentam corretas para todos os diâmetros a menos do primeiro, onde 4 grãos inexistentes na imagem foram detectados.

A seguir, a imagem da figura 13 foi transformada de modo a se eliminar nela os 4 círculos menores. Nesta nova imagem obteve-se com uso dos mesmos elementos estruturantes (9, 17, 25 e 37 pixels de diâmetro) 4 grãos de tamanho 7, 6 de diâmetro 13, 6 de diâmetro 23 e 4 de diâmetro 35. Ou seja, mesmo assim 4 grãos continuam a ser detectados para o primeiro diâmetro de peneira, esses correspondem a partes dos grãos maiores. Não deixar que essas partes de grãos maiores sejam eliminados por elementos estruturantes menores e sejam considerados grãos individuais é o objetivo principal do segundo algoritmo que comentaremos na próxima seção.

## Granulometria Condisional

Na realidade, raras são as aplicações onde os grãos

tem exatamente a forma dos elementos estruturantes. Arrumar regras de crescimento da família de elementos estruturantes que acrescente a cada elemento a ser operado apenas um pixel por passo (em cada posição possível na horizontal e na vertical) poderia ser uma solução, mas, mesmo se tal regra de crescimento fosse desenvolvida, o processo de "peneiramento virtual" seria muito lento.

Acontece que no peneiramento real só são separados grãos inteiros e no processo do algoritmo simples a operação de abertura acaba eliminando partes de grãos onde o elemento estruturante não se encaixa completamente. Essas partes de grãos é que são contadas erroneamente como grãos menores na geração da curva granulométrica. Para ilustrar isso vejamos o que ocorre se os grãos da amostra da figura 7(a) não forem tão bem comportados, como os da figura 16(a) por exemplo.

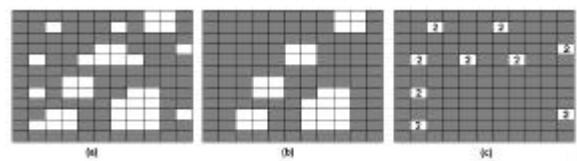


Figura 16: Exemplo com grãos irregulares: (a) Imagem original, (b) Imagem com abertura com elemento quadrado 2x2, (c) Imagem resultante da subtração do conjunto em (a) pelo conjunto em (b) onde os pixels resultantes são marcados com o lado do elemento estruturante.

Neste caso se for usado o algoritmo simples após cada etapa tem-se as imagens mostradas nas figuras 16 (b) e (c), 17 e 18.

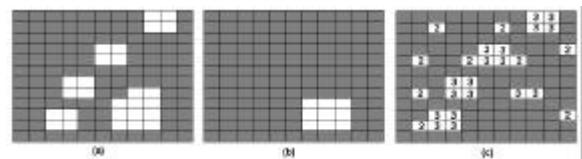


Figura 17: Exemplo com grãos irregulares: (a) Imagem resultante da primeira etapa, (b) Imagem com abertura por um elemento quadrado 3x3, (c) Imagem resultante da subtração do conjunto em (a) pelo conjunto em (b) marcada com "3" e as marcações do passo anterior.

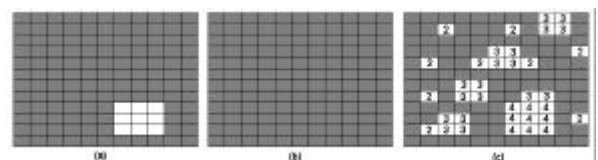


Figura 18: Exemplo da terceira etapa com grãos irregulares: (a) Imagem resultante da segunda etapa, (b) Imagem com abertura com elemento quadrado 4x4, (c) Imagem resultante da subtração do conjunto em (a) pelo conjunto em (b) marcada com "4", além das marcações dos passos anteriores, usada para o histograma.

Se o histograma do número de pixels que desaparece por passo fosse gerado a partir da figura 18(c), agora teríamos os resultados da figura 19.

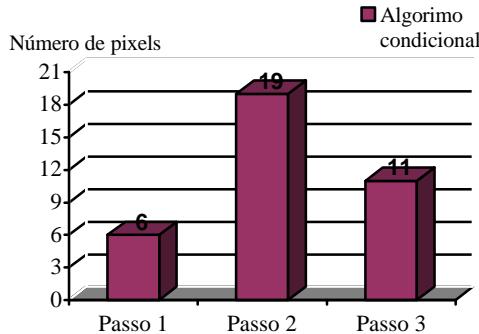


Figura 19 - Histograma obtido a partir da imagem, 18(c), resultado do algoritmo simples

Este histograma levaria a um resultado errado da curva granulométrica. Teríamos 14 grãos, enquanto na imagem real são contados apenas 11 grãos. Isso acontece porque no processo de abertura partes de grãos são contados como se fossem grãos inteiros, o que é impossível em um processo de peneiramento real, onde um grão fica retido inteiro ou passa na peneira inteiro, mesmo que isso ocorra porque só uma das dimensões ficou retida. Uma melhoria na direção de uma solução para isso é substituir a etapa de subtração da imagem inicial do passo pela resultante de cada abertura (imagens 16c, 17c e 18c), por uma subtração condicionada a não serem considerados pixels que tenha vizinhança em contato com os elementos que ficaram na imagem após o processo de abertura. Em outras palavras, a idéia básica de uma melhoria no algoritmo é não se considerar mais partes de grãos. Deixar presente nas imagens do final do processo apenas os grãos isolados. Neste caso as novas imagens seriam as mostradas nas figuras 20 e 21.

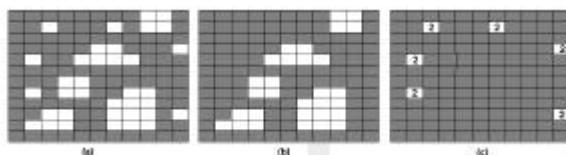


Figura 20: Exemplo com grãos irregulares e algoritmo de subtração condicional: (a) Imagem original, (b) Imagem do final do passo, resultado da imagem original subtraída do resultado da abertura com elemento quadrado 2x2 (figura 16 b), condicionada a só ser eliminado pixel não vizinhos a elementos acessos, (c) Imagem usada no cálculo da granulometria

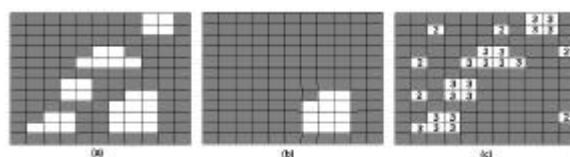


Figura 21: Exemplo com grãos irregulares e algoritmo de subtração condicional: (a) Imagem inicial do passo, (b) Imagem do final do passo, resultado da subtração da imagem inicial com o resultado da abertura com elemento quadrado 3x3, condicionado a só ser eliminado pixel não vizinhos a elementos acessos, (c) Imagem usada no cálculo da granulometria.

Usando assim uma subtração condicionada a não ser considerado partes de grãos na contagem dos pixels que saem em determinado passo, tem-se, para esse exemplo, o histograma mostrado na figura 22. Este histograma melhora o resultado da curva granulométrica.

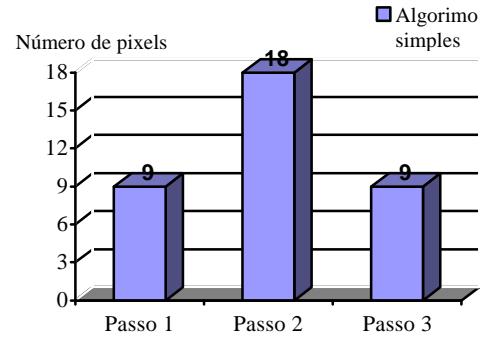


Figura 22: Histograma obtido a partir da imagem, 21 (c), resultado do algoritmo com subtração condicional

## Resultados com Subtração Condicional

Utilizando o algoritmo da seção anterior a curva granulométrica da imagem com círculos da figura 13 passa a ser descrita pelo histograma mostrado na figura 23, ou seja obtém-se resultados 100% corretos. Esse mesmo resultado sempre é obtido ao se testar o algoritmo em grãos com formas simétricas, para os quais seja possível projetar uma família de elementos estruturantes com mesma forma, como os da figura 4.

Continuando na verificação das limitações do método passamos a testar grãos não simétricos como o dos losangos mostrados na imagem de 150x150 pixels da figura 24(a). Estes possuem diagonais distintas com 53 e 37 pixels, sendo representados 4 vezes na imagem de teste, com a diagonal maior vertical ou horizontalmente direcionada.

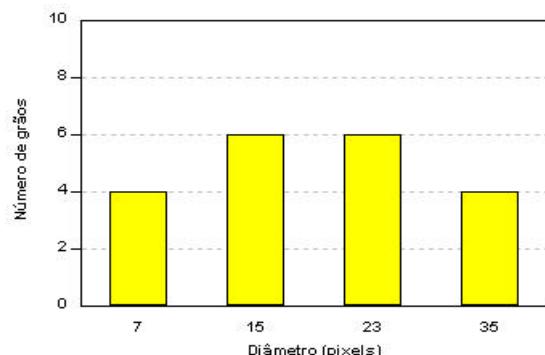


Figura 23: Curva granulométrica do exemplo 4 usando agora o algoritmo com subtração condicional.

O resultado obtido processando esta imagem com o algoritmo simples é apresentado na figura 25. Repare que foram obtidos um total de 15 grãos, todos de diâmetros bem menores do que os presentes na

imagem, enquanto que o com o algoritmo usando subtração condicional obtém-se grãos apenas com diagonal de 37 pixels. Assim, neste último algoritmo, o erro no processo se concentra em interpretar como diagonal do grão a menor diagonal do losango e não a sua maior diagonal.

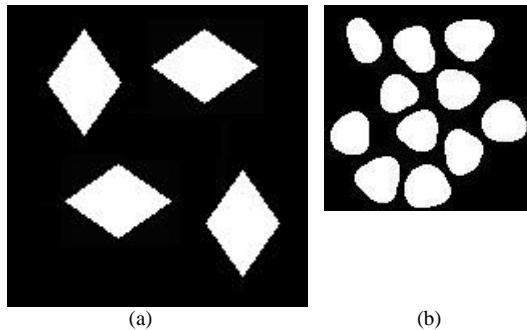
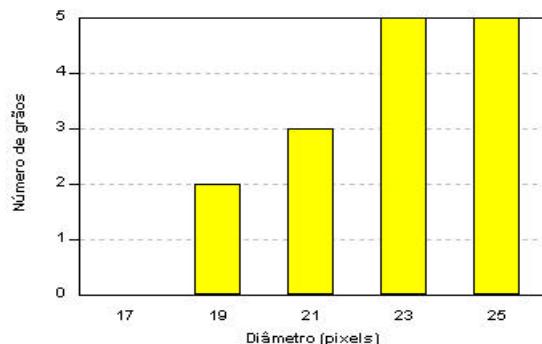


Figura 24 : Exemplos 5 (a) e 6 (b): verificando formas não idênticas as dos elementos estruturantes formas irregulares.



.Figura 25 : Curva granulométrica do exemplo 5 usando o algoritmo simples.

Como um último exemplo de teste das limitações do algoritmo apresentado, tem-se o conjunto de grãos irregulares mostrado na figura 24 (b). Como há poucos elementos na imagem os diâmetros destes grãos podem ser medido manualmente permitindo verificar-se a adequação do algoritmo. Diferente dos exemplos anteriores não é óbvio definir qual o tipo de família de elementos estruturantes a ser usada neste caso Assim todas foram testadas. Os resultados para cada família são mostrados nas figuras 26 a 31.

Analizando esses gráficos observa-se claramente que o algoritmo simples gera muito mais grãos que os 11 presentes na imagem, sendo inadequado para análise de grãos irregulares.

No caso das análises com o algoritmo condicional, verifica-se melhor resultado com os elementos circulares, o que corrobora a importância do uso de elementos estruturantes similares às formas dos grãos da imagem. Mas, mesmo neste caso, o diâmetro considerado como o do grão é na realidade o do maior círculo circunscrito ao grão.

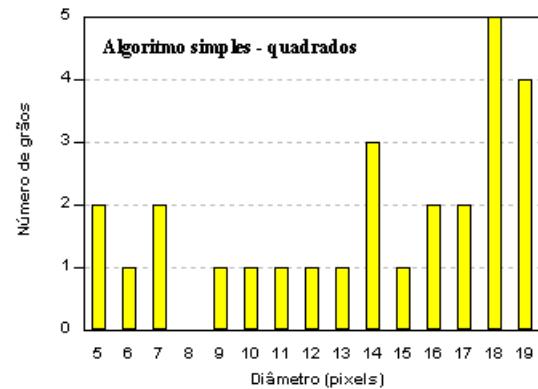


Figura 26 : Curva granulométrica do exemplo 6 usando família de elementos quadrados e o algoritmo simples.

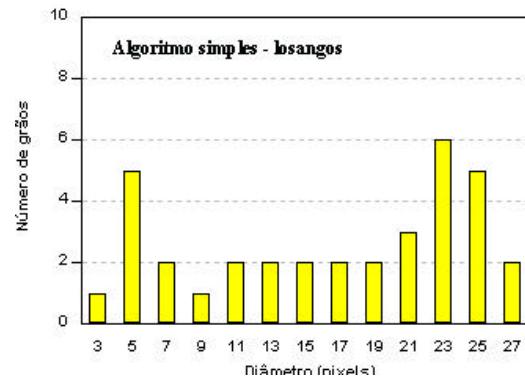


Figura 27 : Curva granulométrica do exemplo 6 usando agora elementos estruturantes losangulares com diagonais iguais com o algoritmo simples.

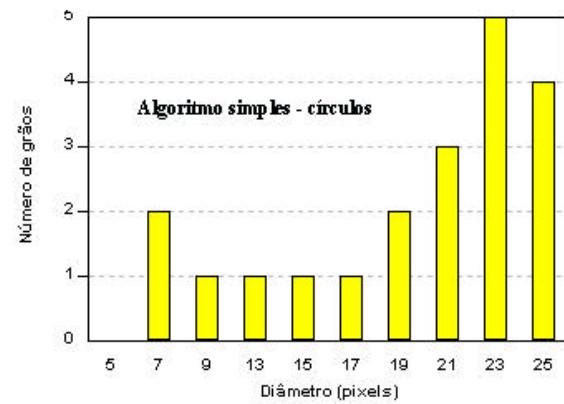


Figura 28:- Curva granulométrica do exemplo 6 usando agora elementos circulares com o algoritmo simples.

## Conclusões

Apresentamos neste trabalho duas formas de avaliar com boa aproximação o diâmetro e o número de elementos presentes em imagens binárias ou em tons de cinza que possam ser transformadas adequadamente para preto e branco. As aplicabilidades e limitações de cada um destes algoritmos foram detalhadamente comentadas por exemplos ilustrativos. Devido a importância da granulometria na análise de meios poroso e diversas outras aplicações ainda há melhorias

a serem feitas até que um processo ótico totalmente equivalente ao processo de peneiramento mecânico seja obtido. Um passo posterior nesta direção seria incluir no algoritmo a possibilidade de utilização de imagens em tons de cinza (como as da figura 1) e a possibilidade dos grãos se tocarem ou se sobreponem.

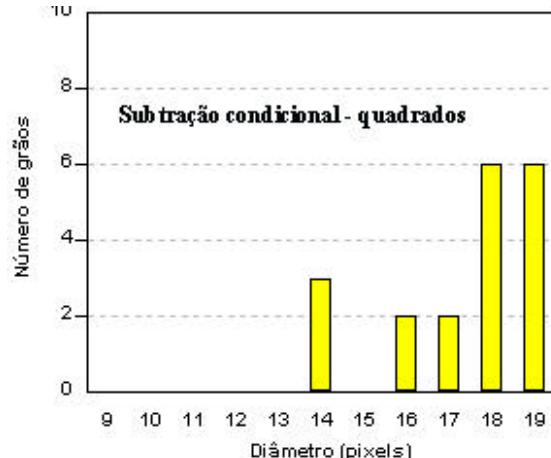


Figura 29:- Curva granulométrica do exemplo 6 usando família de elementos quadrados com o algoritmo com subtração condicional.

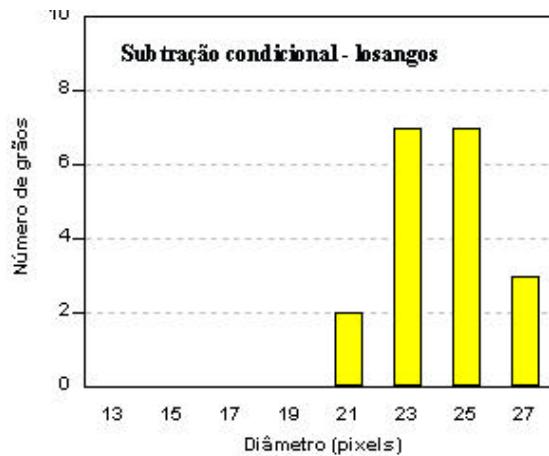


Figura 33: Curva granulométrica do exemplo 6 usando agora elementos estruturantes losangulares com diagonais iguais com o algoritmo com subtração condicional.

De maneira geral, pode-se afirmar que o algoritmo simples apresentado apenas se mostra adequado para avaliações de imagens com grãos regulares onde é possível a utilização de elementos estruturantes com as formas dos grãos presentes na imagem. O algoritmo condicional pode ser utilizado em casos mais genéricos. Mesmo assim pode haver falha na interpretação do diâmetro do grão encontrado, e sua substituição pelo do diâmetro do elemento estruturante.

Pode-se ainda afirmar que o primeiro tipo de granulometria , a granulometria por número comentada na introdução, só faz sentido em alguns poucos casos. Por exemplo, se as partículas forem separáveis, ou em linguagem da teoria de conjuntos a imagem a ser analisada for composta de subconjuntos disjuntos (sem interseção). Considerando o aspecto visual esse primeiro tipo só apresenta resultados adequados se os

grãos que aparecerem na imagem sem sobreposição ou contatos e em casos onde é possível estabelecer uma relação adequada entre a quantidade de pixels dos grãos (isto é sua área) e a forma do elemento estruturante.

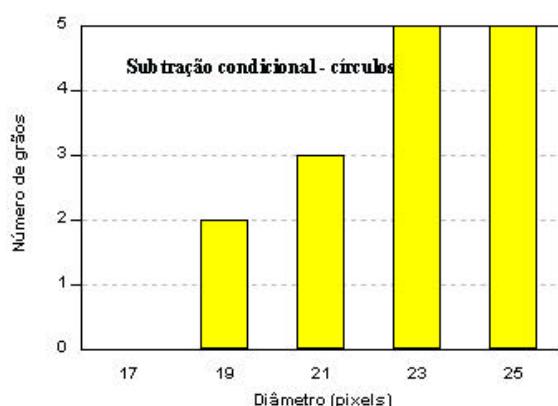


Figura 31: Curva granulométrica do exemplo 6 usando agora elementos circulares com o algoritmo com subtração condicional.

## Referências

- [1] G. Matheron, Random Set and Integral Geometry, New York, J. Wiley, 1975.
- [2] G. Matheron, Elements pour une théorie des milieux poreux, Masson, Paris, 1967.
- [2] J. Serra, Image Analysis and Mathematical Morphology. Orlando, Academic Press, 1982, vol 1.
- [3] E. A. Vieira, R. H. C. Melo "Granulometria:UMA Aplicação para Contagem e Medição de Grãos em Imagens Digitais" Monografia Dep. de Ciência da Computação - da Universidade Federal Fluminense para obtenção do grau de Bacharel, 2004.
- [4] D. Pizzolato, CxImage. 2003. disponível em: <http://www.codeproject.com/bitmap/cximage.asp?target=CxImage>. Acesso em 30 out. 2003.
- [5] C. Maunder, MFC Grid control 2.24. 2002, <http://www.codeproject.com/miscctrl/gridctrl.asp?target=GridCtrl>. Acesso em 5 jan. 2002.
- [6] Yuantu Huang, Simple to Use, Yet Powerful Graphics Classes. 2000. Disponível em: <http://codeguru.earthweb.com/controls/GraphicsClasses.shtml>. Acesso em 15 jan. 2002.
- [7] SDC Information Systems: Create a disk or a semi-sphere structuring element. 1998. Disp. em: <http://www.mmorph.com/pymorphpro/morph/morph/mmsedisk.html>. Acesso em 10 nov. 2003.
- [8] P. Soille, Morphological Image Analysis: Principles and Applications, Springer, Berlin, 1999.