Transformada de Fourier

2017/2 - Curso PISB:

Processamento de Imagens e Sinais Biológicos

Cap. 2 :

K. Najarian and R. Splinter, **Biomedical Signal and Image Processing** CRC Press - Taylor & Francis Group, 2006

Transformada de Fourier

- A teoria de Fourier diz que **qualquer sinal**, ou imagens, pode ser expresso como uma **soma de** uma série de sinusóides (**senos e cossenos**).

- No caso de imagens visuais normais (**I**) , essas são variações sinusoidais na **intensidade luminosa** da imagem.

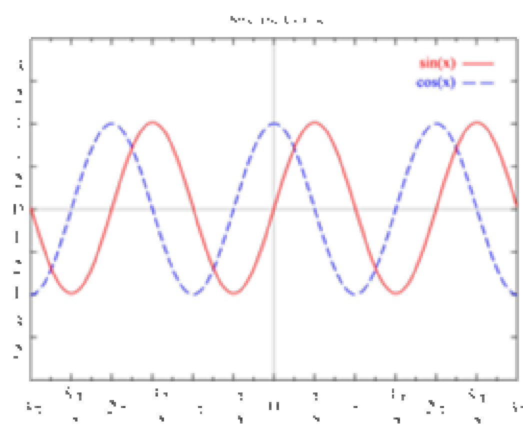
No caso de imagens biomédicas (B) , essas são variações sinusoidais no elemento que se está medindo na aquisição como:

- temperatura;
- intensidade da absorção do raio x;
- eco do ultra-som medido;
- atenuação da ressonância do pixel da imagem;
- etc...

Relembrando:

- A **senóide** (também chamada de **onda seno**, **onda senoidal**, **sinusóide** ou **onda sinusoidal**) é uma função cujo gráfico é idêntico ao do seno generalizado.
  –

$$y = A\sin(kx - \omega t - \varphi) + D$$



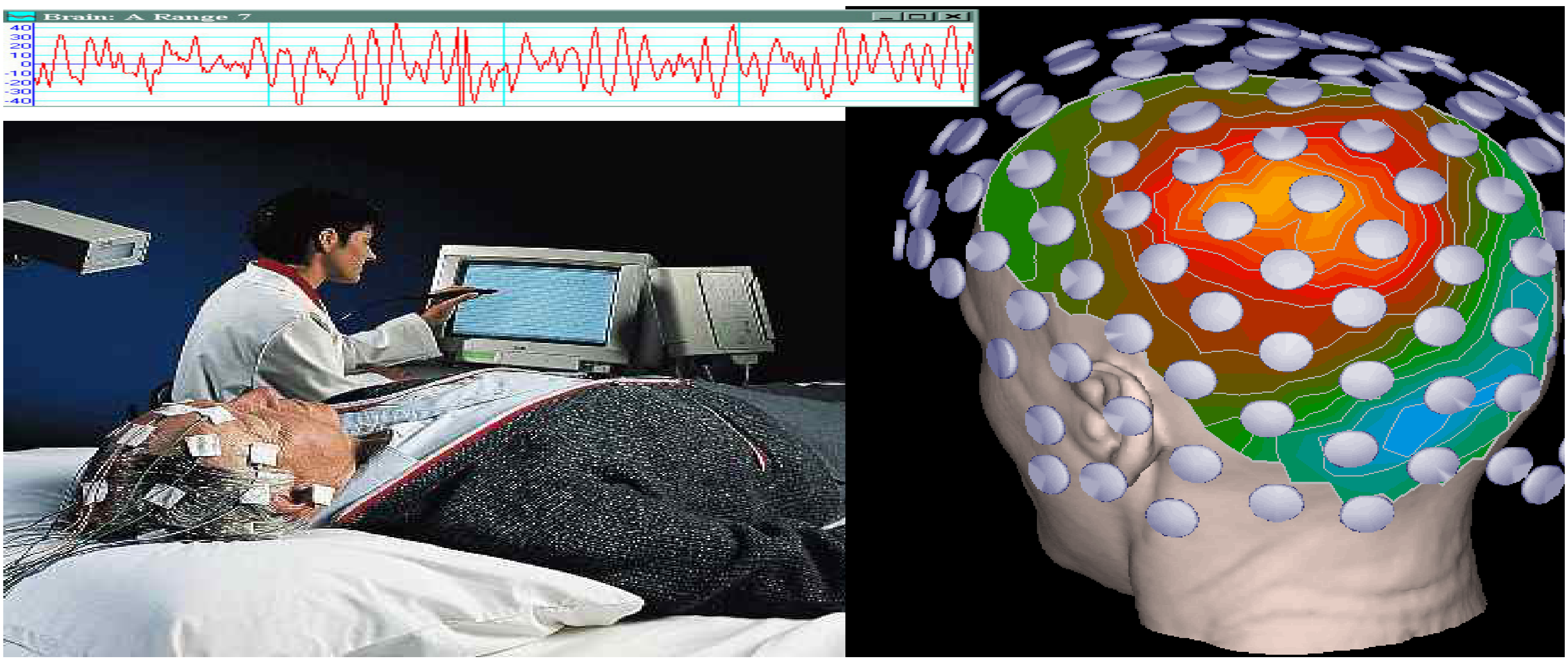
- Onde:
- *A* é amplitude
- *k* é o número de onda
- ω é a freqüência angular
- ϕ é o ângulo de fase
- *D* é a distância vertical

Séries de Fourier

- Em 1822, o matemático francês **Jean-Baptiste Joseph Fourier** mostrou que ondas sinusoidais podem ser usadas como bases para descrever, **qualquer tipo de função**.
- Fourier usou isso como ferramenta analítica no estudo das ondas e dos fluxos de calor.
- A técnica para se **transformar** uma forma complexa em suas componentes sinusoidais é chamada **Transformada de Fourier**.

Aplicações:

- Muitas vezes ao invés de saber onde ou quando algum sinal é mais intenso precisa-se saber quanto **freqüentemente** alguma intensidade ocorre, ou quanto por cento está acima de um certo valor, etc....



Aplicações: (cont.)

- Detalhes deste tipo são melhor respondido levando o sinal para o **domínio da freqüência**.

- A transformada de Fourier TF faz essa transformação!

- No entanto nenhum domínio **muda** (aumenta ou

diminui) a informação contida no sinal.

- Mas os cálculo, a análise e a visibilidade dos dados são facilitados **usando domínio adequado** ao que ser quer conhecer!

Transformada de Fourier de funções continuas:

Números Complexos

- São os elementos do conjunto ***C*** , uma extensão do conjunto dos ***R***, onde existe um elemento que representa a raiz quadrada de -1 (chamado imaginário)

- Cada número complexo ***C*** pode ser representado na forma: ***a + b i***

- onde ***a*** e ***b*** são números reais conhecidos como ***parte real*** e ***parte imaginária*** de ***C*** e ***i*** é o imaginário puro

Note: Em **processamento de sinais** usa-se a notação ***j*** para o imaginário ***i***

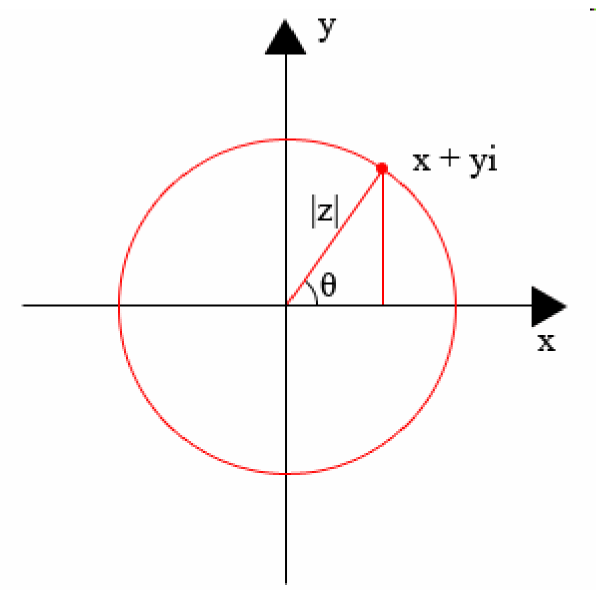
$$j = \sqrt{-1}$$

Plano complexo

- Também chamado de **plano de Argand-Gauss** é uma representação do conjunto dos números complexos.

- Da mesma forma como a cada ponto da reta está associado um ponto do conjunto dos reais , ***R***, o plano complexo , ***C***, associa o ponto *(x,y)* ao número complexo *x+iy*.

- Podem ser representados em **coordenadas polares** : como (z , θ) , *i.e.* amplitude e ângulo



A transformada de Fourier *F(u),* de uma função contínua ***f(x)*** de uma variável real ***x*** pode ser definida como:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp[-j2\pi u x] dx \qquad \text{onde} \quad j = \sqrt{-1}$$

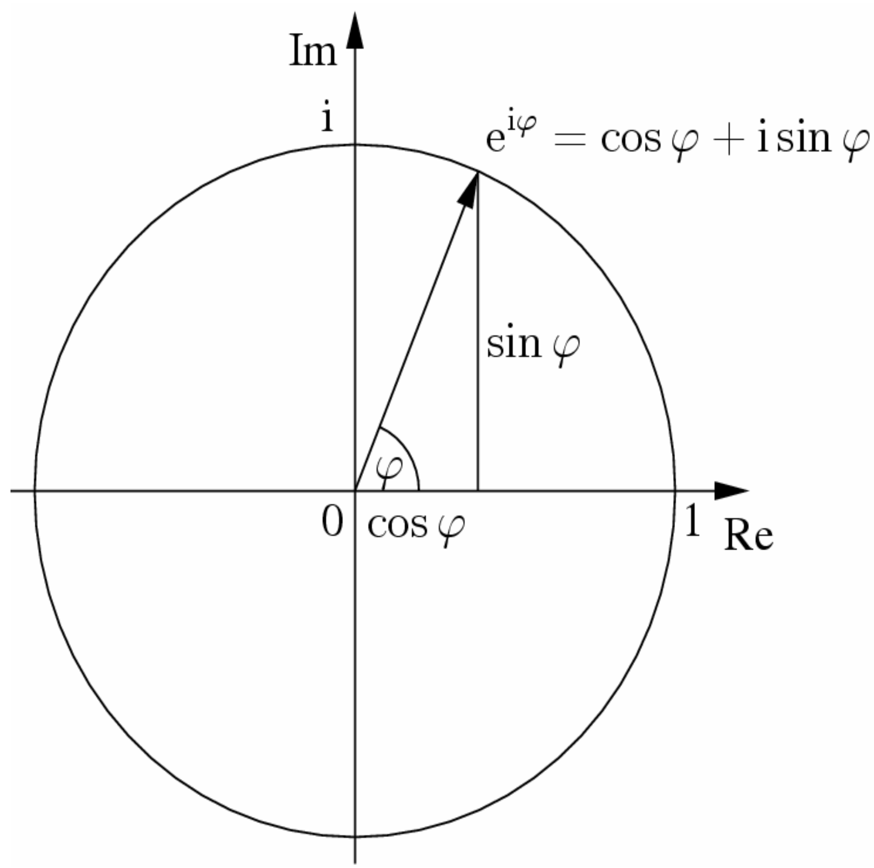
A partir de ***F(u),*** pode-se obter ***f(x)*** através da transformada **inversa** de Fourier:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \exp[j2\pi\, u\, x] du$$

Essas duas equações são chamadas de **par de transformada de Fourier** e podem existir se ambas forem integráveis e se *f(x)* for contínua.

Fórmula de Euler

- mostra a relação entre :
  - a função ***exp*** ou ***e*** ,
  - a função ***seno*** e
  - a função ***cosseno***:



$$e^{ix} = \cos(x) + i\,\mathrm{sen}\,(x)$$

A transformada de Fourier de uma função ***f(x)*** é uma função **complexa**, *i.e.* tem parte **real** e **imaginária**:

$$F(u) = R(u) + j\,I(u) \qquad j = \sqrt{-1}$$

Como outras funções complexas pode ser **escrita** na forma também na **forma exponencial:**

$$F(u) = \left|F(u)\right| e^{j\theta(u)} = \left|F(u)\right| \exp[\,j\,\theta(u)]$$

Chama-se **espectro de Fourier ***, **ângulo de fase** e **espectro da potência** , respectivamente a:

$$|F(u)| = \left[R^2(u) + I^2(u)\right]^{1/2}$$

$$\phi(u) = \tan^{-1}\left[I(u)/R(u)\right]$$

$$P(u) = R^2(u) + I^2(u)$$

* O espectro indica em que freqüências existem sinais

Algumas transformadas de Fourier:
função impulso => função constante

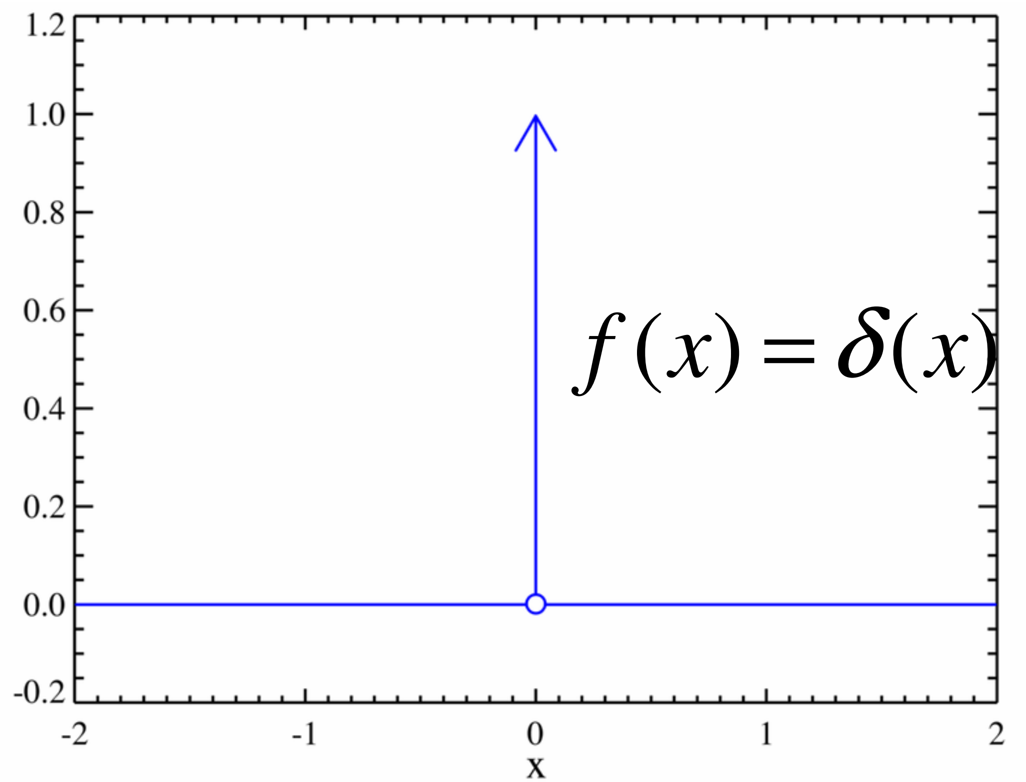
$$\delta(x) = 0 \text{ se } x \neq 0$$

$$\delta(0) = \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

Delta de Dirac

(introduzida por Paul Dirac)



f(x)	*F(u)*
$\delta(x)$	1

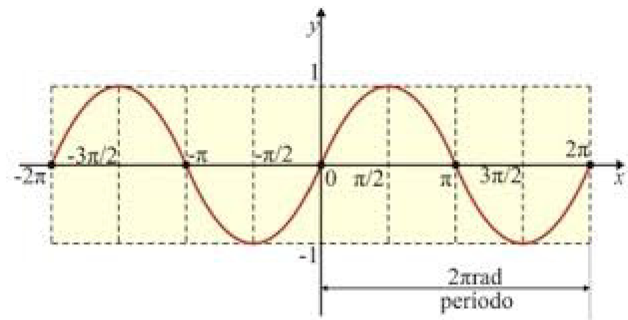
No Cap. 2 ,exemplo 2.2 é mostrado como se chega a esses valores.

K. Najarian and R. Splinter, **Biomedical Signal and Image rocessing** CRC Press - Taylor & Francis Group, 2006

Algumas transformadas de Fourier:

cosseno => par de funções impulso

Função coseno



f(x)	***F(u)***
$\cos(u_0 x)$	$\pi[\delta(u-u_0)+\delta(u+u_0)]$

No Cap. 2 , tabela 2.1 há também outros valores de TF.

K. Najarian and R. Splinter, **Biomedical Signal and Image rocessing** CRC Press - Taylor & Francis Group, 2006

Transformada de Fourier de funções discretas e digitais:

Se um sinal for considerada discreto

- pode-se representá-lo por amostras de *N* valores com intervalos uniformemente espaçados através da seqüência: *{f(0), f(1), f(2),..., f(N-1)}*.

- Pode-se definir o par de **transformadas discretas de Fourier** como sendo uma soma finita de exponenciais complexas.

- o domínio da freqüência também é considerando discreto e representado por
  - $u = (0, \Delta u, 2\Delta u, \ldots, (N-1)\Delta u)$, onde $\Delta u = 1/N\Delta x$.

- A **transformada discreta de Fourier** se obtém através de:

$$F(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\exp\left[-j2\pi ux/\mathrm{N}\right]$$

Se uma imagem for considerada 1D

A transformada discreta de Fourier se obtém através de:

$$F(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\exp\left[-j2\pi ux/\mathrm{N}\right]$$

- e sua inversa por: $$f(x) = \frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1} F(u)\exp\left[j2\pi ux/\mathrm{N}\right]$$

- Considerando a partir daqui ***x*** uma “discretização” no espaço ou tempo , para *x* = (*0,1,2,...,N-1*) e ***u*** uma “discretização” na freqüência , para *u* = (*0,1,2,...,N-1*) .

Transformada de Fourier de funções 2D continuas:

Compreendendo a Transformada de Fourier 2D

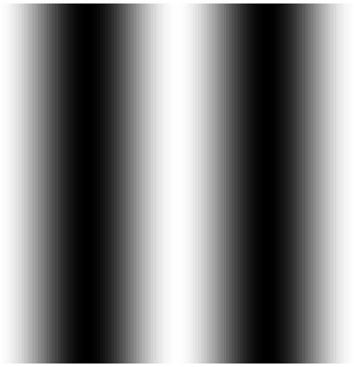
- Por exemplo, o padrão sinusoidal mostrado nas figuras abaixo pode ser capturado em apenas um termo Fourier que codifica:

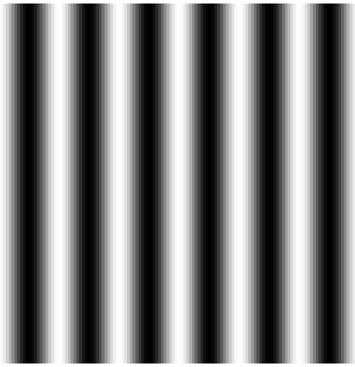
  a freqüência espacial,

  a magnitude (positiva ou negativa),

  o ângulo de fase.

- Esses três valores capturam toda a informação na imagem sinusoidal.
- A freqüência espacial é a freqüência através do espaço (o eixo x nesse caso) com a qual se representa a intensidade luminosa no ponto.
- Por exemplo, a segunda imagem abaixo à direita mostra uma sinusóide com uma freqüência espacial mais alta que a primiera.





Significado da Transformada de Fourier

- A magnitude da sinusóide corresponde a seu contraste, ou a diferença entre os picos mais escuros e mais claros da imagem.

- Uma magnitude negativa representa um contraste reverso, *i.e.* : o claro se torna escuro e vice-versa.

- O angulo de fase representa como a onda é deslocada com relação a origem,: representando o quanto a sinusóide está deslocada para a esquerda ou direita.

- Uma transformada Fourier codifica uma série completa de sinusóides através de uma faixa de freqüências espaciais a partir do zero (*i.e*. sem modulação, brilho médio da imagem completa) durante todo o caminho até a "freqüência de Nyquist“ (isto é freqüência espacial de maior intensidade que pode ser codificada na imagem digital, a qual está relacionada a resolução, ou tamanho dos pixels.)

- A transformada Fourier codifica todas as freqüências espaciais presentes em uma imagem simultaneamente.

- Um sinal contendo apenas uma freqüência espacial única de freqüência , f , é representado como um pico único no ponto f ao longo do eixo de freqüência espacial, a altura do pico correspondente a **amplitude**, ou contraste daquele sinal sinusoidal.

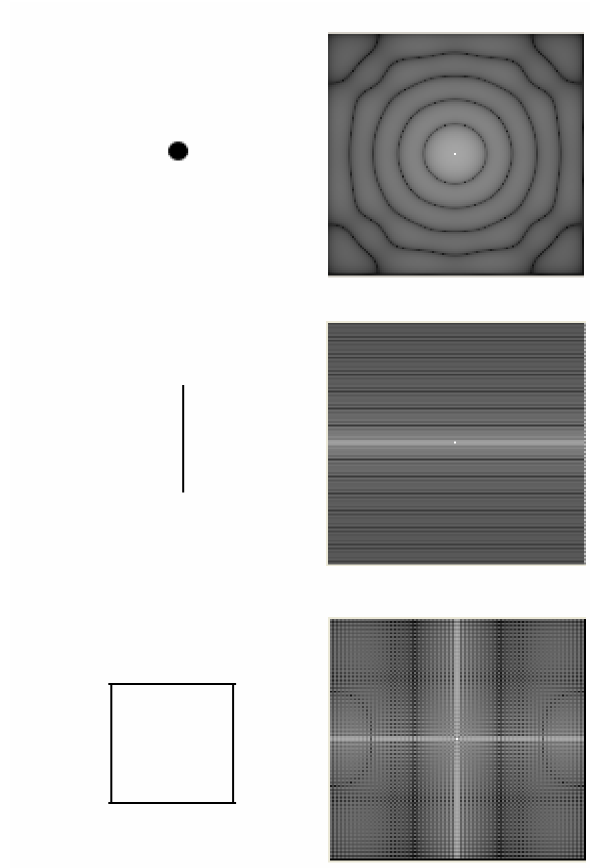
Transformada de Fourier **bidimensional**:

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\exp[-j2\pi(ux+vy)]dxdy$$

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)\exp[j2\pi(ux+vy)]dudv$$

Transformada de Fourier 2D

Algumas imagens representadas como funções bidimensionais e seus espectros de Fourier.



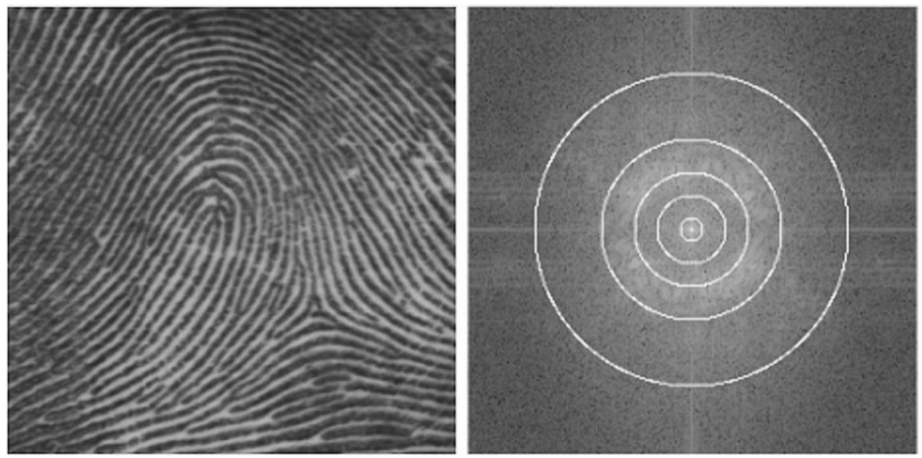
Em 2D , tem-se o **espectro de Fourier**, o **ângulo de** fase e o **espectro da potência bidimensionais,** descritos como:

$$\left|F(u,v)\right| = \left[R^2(u,v) + I^2(u,v)\right]^{1/2}$$

$$\phi(u,v) = \tan^{-1}\left[I(u,v) / R(u,v)\right]$$

$$P(u,v) = R^2(u,v) + I^2(u,v)$$

A maior parte da informação de uma **imagem normal** se concentra em baixas freqüências



Raio	Energia
5	94.18%
15	94.70%
25	96.09%
40	99.62%
70	99.95%

Exemplo de uma imagem e seu espectro de Fourier, os círculos são falsamente incluídos para se ter uma idéia em que freqüência se concentram

Exercício:

- Transforme o sinal de ECG forma temporal (t) para o **domínio de Fourier. Depois** construa seu espectro de potência e mostre e freqüência no principal (e as informações do zero deste espectro).

- A gora faça o mesmo com as imagens termicas que usou no trabalho de registro. Em outras palavras: Cada um dos alunos do curso deve calcular (pode-se usar sistemas já prontos) e mostrar o **espectro de Fourier e** o **ângulo de** fase **bidimensionais** da parte das imagens originais do Trab. anterior e também da imagens depois do registro.
- Esse resultado sera idêntico para as mesmas imagens após você usar o seu programa de registro?

- Cuide para que **no gráfico do espectro de Fourier a energia máxima fique centrada**

- *Use a imagem como N x N , de modo que* $N = 2^n$ *(dyadic lengths N*) , ou seja tenha por exemplo *N = 64,* 128, 256, 512 etc...

Transformada de Fourier de funções 2D discretas ou digitais:

Aplicando TF para uma função bidimensional discreta:

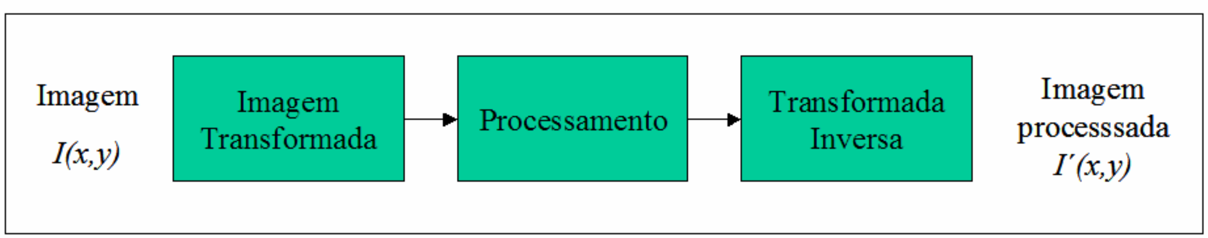
- o par de transformadas discretas de Fourier passa a ser:

$$F(u,v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \exp\left[-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right) \right]$$

- para *u* e *v*, “discretizados” com *u* = (*0,1,2,...,M-1*) e *v* = (*0,1,2,...,N-1*) e a inversa

$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) \exp\left[j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right) \right]$$

- para *x* e *y* assumindo valores discretos, isto é: *x* = (*0,1,2,...,M-1*) e *y* = (*0,1,2,...,N-1*), onde $\Delta u=1/M\Delta x$ e $\Delta v=1/N\Delta y$



Discrete Fourier Transform (DFT)

- Obs: número de freqüências corresponde ao número de pixels do domínio espacial, ou seja, a imagem do domínio espacial e Fourier são do mesmo tamanho

$$F(k,l) = \frac{1}{N^3} \sum_{a=0}^{N-1} \sum_{b=0}^{N-1} f(a,b)\, e^{-\iota 3\pi\left(\frac{ka}{N} + \frac{lb}{N}\right)}$$

F (0,0) representa o componente DC (direct current ou corrente contínua) da imagem

- que corresponde à média de brilho e
- F (N-1, N-1) representa a maior freqüência.

http://lodev.org/cgtutor/fourier.html#dc

- Ao descrever uma função periódica no domínio da freqüência, a componente DC, ou coeficiente DC é o valor médio da onda .

A transformada de Fourier inversa é dada por

$$f(a,b) = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} F(k,l)\, e^{\iota 2\pi \left(\frac{ka}{N} + \frac{lb}{N}\right)}$$

- a Transformada de Fourier 2D **é separável** :

$$F(k,l) = \frac{1}{N} \sum_{b=0}^{N-1} P(k,b)\, e^{-\iota 2\pi \frac{lb}{N}} \qquad P(k,b) = \frac{1}{N} \sum_{a=0}^{N-1} f(a,b)\, e^{-\iota 2\pi \frac{ka}{N}}$$

Complexidade computacional e tamanho da série N

- Expressando a TF 2D em termos de 2 séries unidimensionais diminui o número de cálculos necessários.

- a DFT unidimensional tem complexidade N^2. Isso pode ser reduzido

$$N \; log_2 N$$

- se empregar a Transformada Rápida de Fourier (FFT) para calcular as DFTs unidimensional. $N = 2^n$

- Esta é uma melhoria significativa, em especial para imagens grandes.

- Existem várias formas da FFT e a maioria restringe o tamanho da imagem de entrada que pode ser transformado, de ***N^2*** para ***N log2 N***
  - onde n é um inteiro.

- Os detalhes matemáticos são bem descritos na literatura

Exemplo de Transformada de Fourier 2D

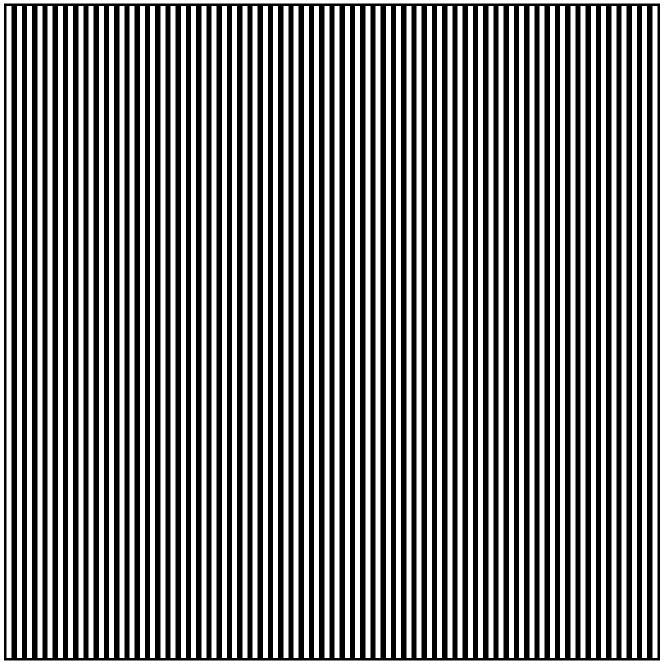
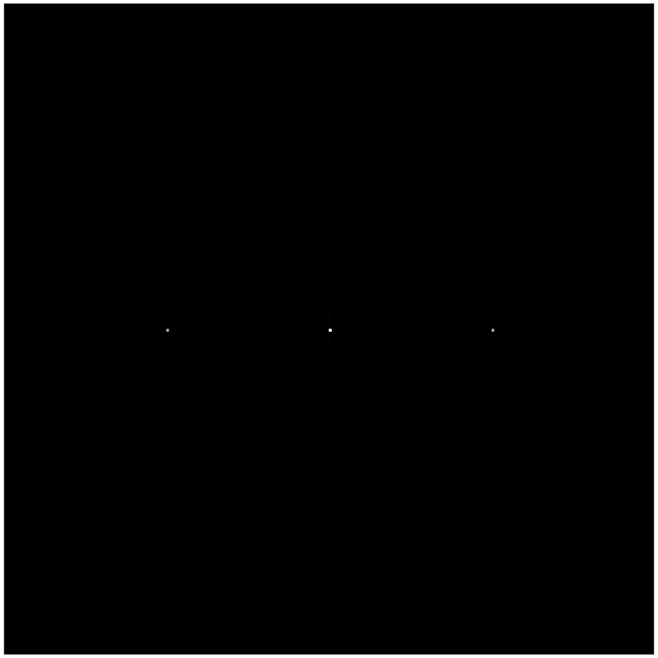


Imagem listras verticais com 2 pixels de largura.

Exemplo de imagem representada como funções bidimensionais e seus espectros de Fourier.

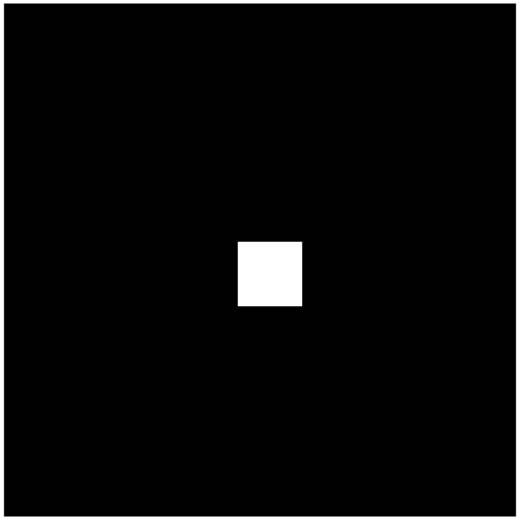


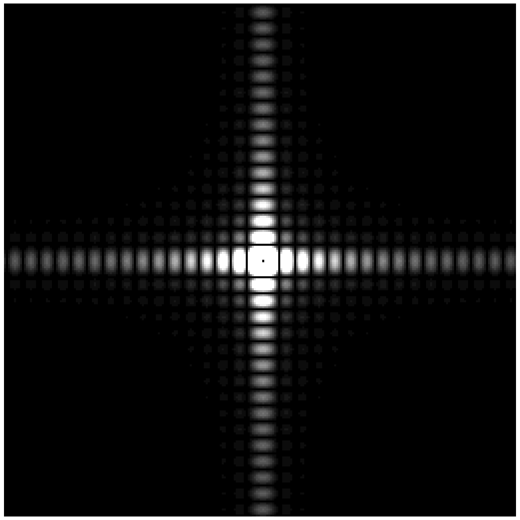
A magnitude da transformada de Fourier da imagem a lado . Ela tem somente valores correspondentes ao DC, ou F(0,0) , e outros dois pontos correspondentes à freqüência das listras na imagem original

Transformada de Fourier 2D

Exemplo de imagem representada como funções bidimensionais e seus espectros de Fourier.

Pulso quadrado e sua transformada





Concluindo: a Transformada de Fourier

- É uma ferramenta matemática fundamental na solução de problemas de processamento de imagens digitais.

- É muito usada em suas formas :
  - Discreta (DFT – *Discrete Fourier Transform*) e
  - Rápida (FFT - *Fast Fourier Transform*)

- O entendimento de suas **propriedades** é muito importante, pois, a mudança de domínio do espaço ***(x,y)*** para o domínio da freqüência ***(u,v)*** e vice-versa, ocorre através dessas transformadas.

Na transformada de Fourier

- **Não há perda de informação durante a mudança de domínios**, apenas a informação visual da imagem passa a estar representada de uma outra forma: no domínio da freqüência.

- A princípio parece difícil entender essa nova forma de visualização da imagem, pois, um ponto de uma imagem representada no domínio Fourier (ou da freqüência) pode conter informações sobre toda a imagem no domínio espacial, indicando quanto desta freqüência há presente na imagem.

Na prática, em aplicações de processamento de sinais e imagens digitais:

- as transformadas discretas de Fourier são calculadas utilizando:
  - o algoritmo da **transformada rápida de Fourier** (FFT - *Fast Fourier Transform*) que devido as suas características de implementação fazem com que a **complexidade** caia de
  - N^2
  - para
  - $N \log 2 \, N$ operações.

- Representando assim, uma significativa economia computacional, particularmente quando o valor de N é muito grande

A transformada de Fourier possui **propriedades** que facilitam a sua utilização em aplicações computacionais, tais como:

- separabilidade,
- translação,
- periodicidade
- simetria conjugada,
- rotação,
- distributividade,
- mudança de escala,
- valor médio,
- laplaciano,
- convolução,
- correlação e
- amostragem.

Dentre essas, a propriedade da **convolução** é de fundamental importância para a compreensão das técnicas de processamento de imagens e filtragem.

Translação ou shift

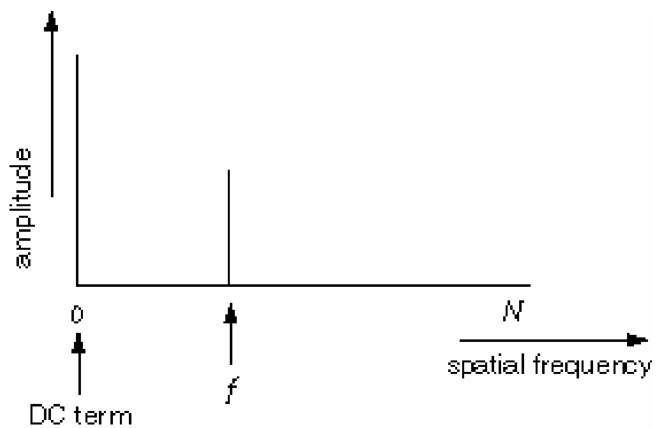
- De acordo com essa propriedade se um sinal é transladado no tempo a magnitude de sua TF não é alterada,

- Exemplos intuitivos:
- Se você escuta uma musica hoje ou amanha sua freqüência não muda
- Se você desloca o ponto 0,0 de uma imagem para 10,10 sua transformada não muda!

Em outros termos: na Transformada de Fourier

- **O “termo DC” correspondente a freqüência zero, representa ao intensidade média ao longo de toda a imagem.**

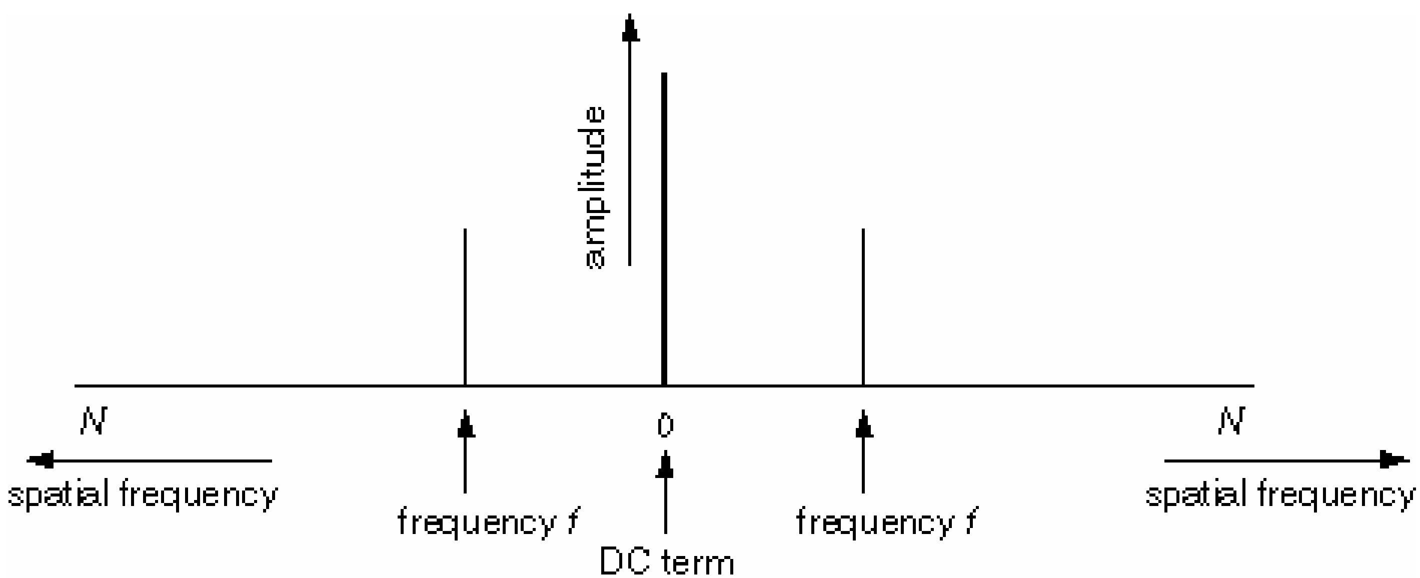
- Um termo zero DC significaria uma copia semelhante da mesma imagem em termos de intensidade, o que poderia significar que a imagem apareceria ao se aidicionar uma sinusóide alternada entre valores positivos e negativos na imagem média. Como não existe brilho negativo, todas as imagens reais tem um termo DC positivo.



- A transformada Fourier também mostra espelhada na origem, em ambas direções + e - a partir da origem picos idênticos em *f* e em -*f* como mostrado a seguir.

outros termos: **Transformada de Fourier**

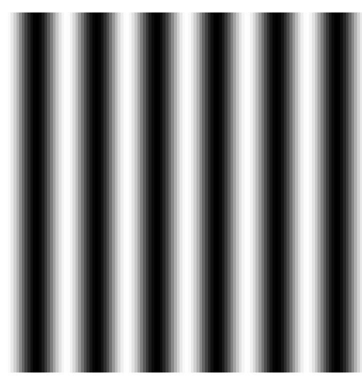
- O que foi mostrado anteriormente é a transformada Fourier de uma única linha de varredura da imagem sinusoidal, que é um sinal unidimensional. Uma transformada Fourier completa 2D desenvolve uma transformada 1D em cada linha de varredura ou linha da imagem, e outra transformada 1-D em cada coluna da imagem, produzindo uma transformada Fourier 2-D do mesmo tamanho da imagem original.



outros termos: **Transformada de Fourier**

- A imagem abaixo mostra uma imagem sinusoidal, e sua transformada de Fourier em duas dimensões, apresentada aqui como uma imagem. Cada pixel da imagem da TF é um valor da freqüência espacial, a magnitude daquele valor é codificado pelo brilho do pixel. Repare que há um pixel bem no centro - esse é o termo DC, ladeado por dois pixels, que codificam o padrão sinusoidal. Quanto mais brilhantes os picos na imagem da TF, maior o contraste na imagem no espaço. Como tem apenas um componente Fourier nessa imagem, todos os outros valores na TF são zero e por isso mostrados em preto.

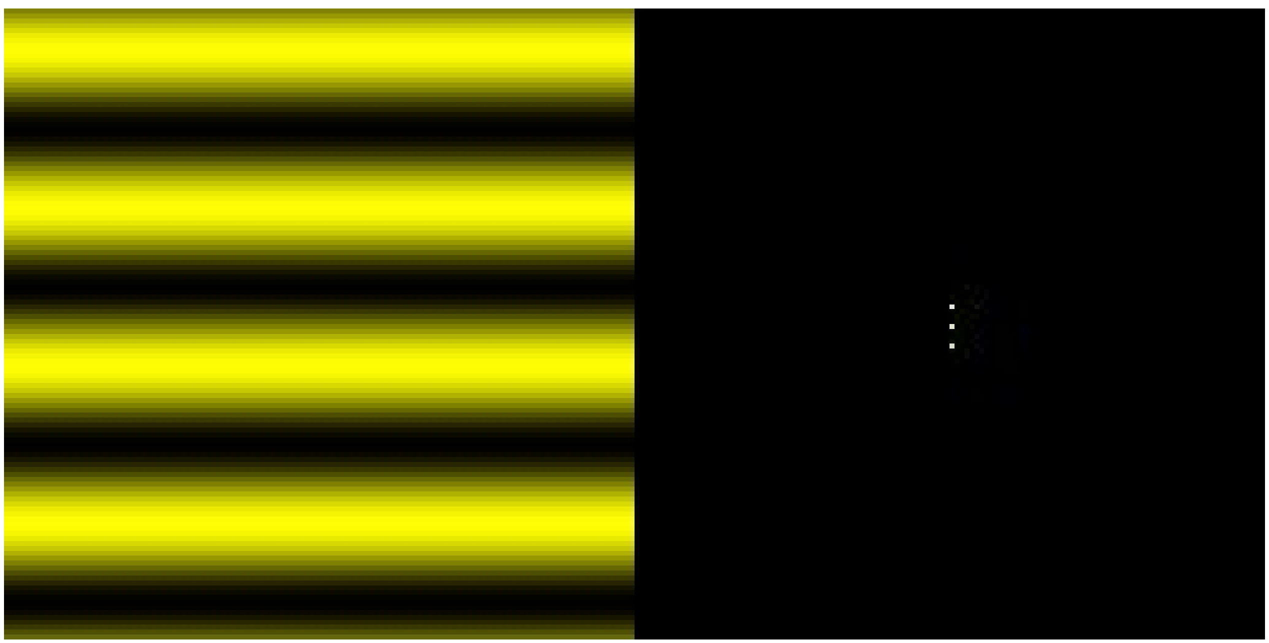
Imagem no dominio espacial



Espectro de **Fourier**

Transformada de Fourier

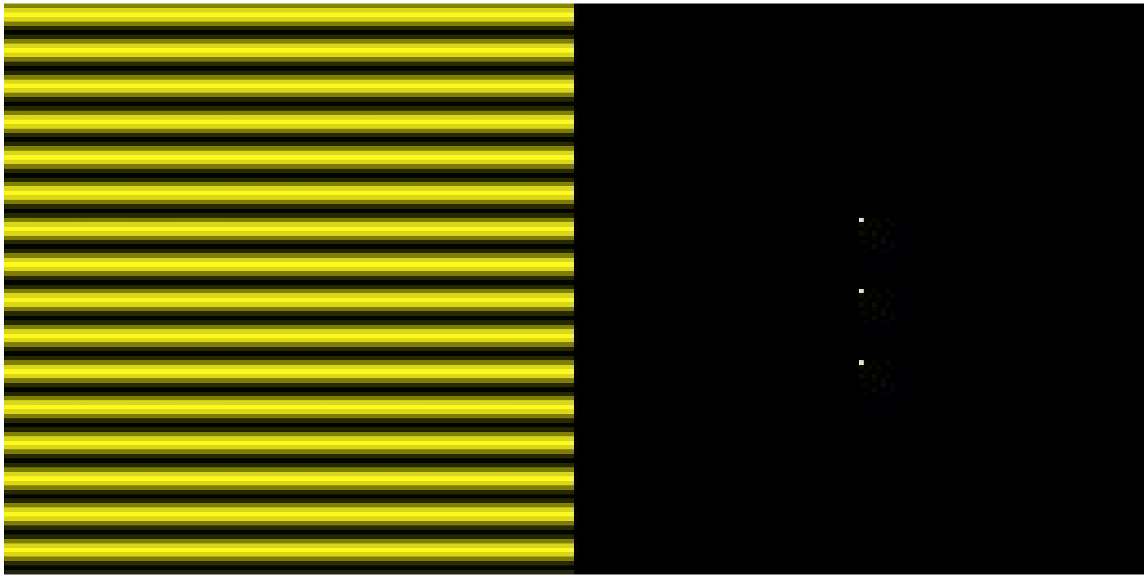
Função senoidal na vertical no espaço e seu espectro de Fourier. O ponto central é o componente DC e os dois outros representam a frequência da função senoidal. Não há pixels na direção x, porque a imagem é uma constante (a mesma em qualquer nessa direção).



Transformada de Fourier

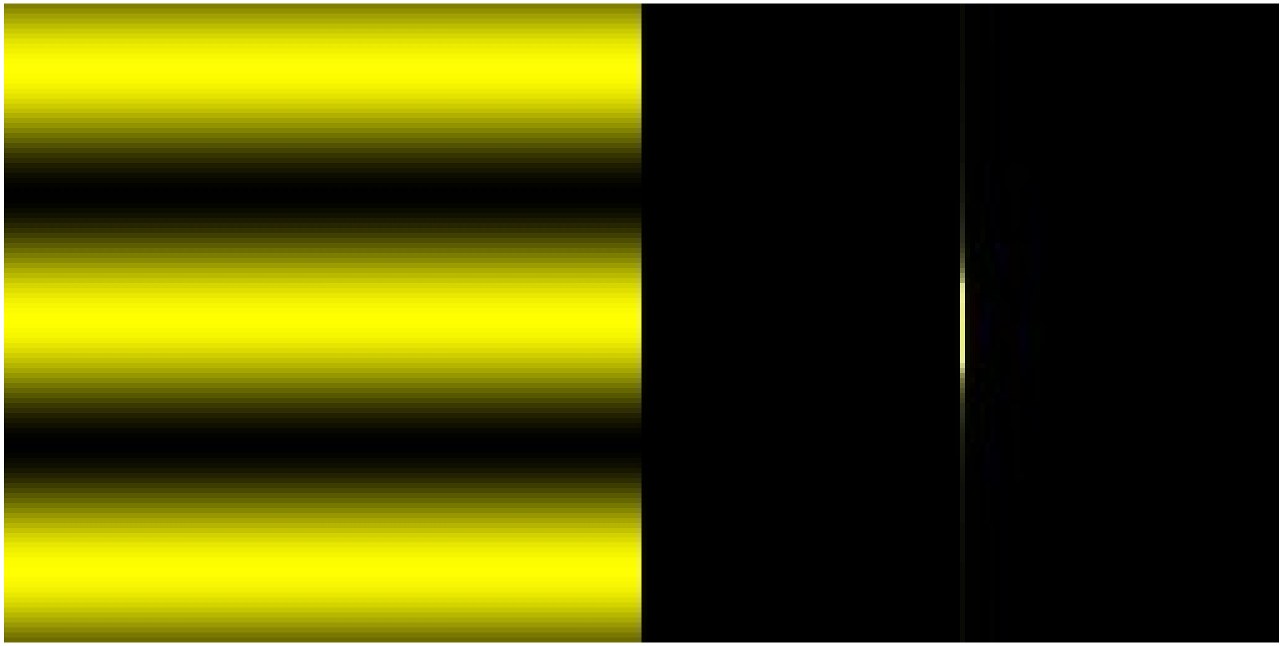
Função senoidal com uma frequência maior. E seu espectro de Fourier: os dois pontos estão mais separados da origem, ou em uma maior frequência.

De acordo com a propriedade de escala da transformada Fourier e na imagem (dominio espaço).



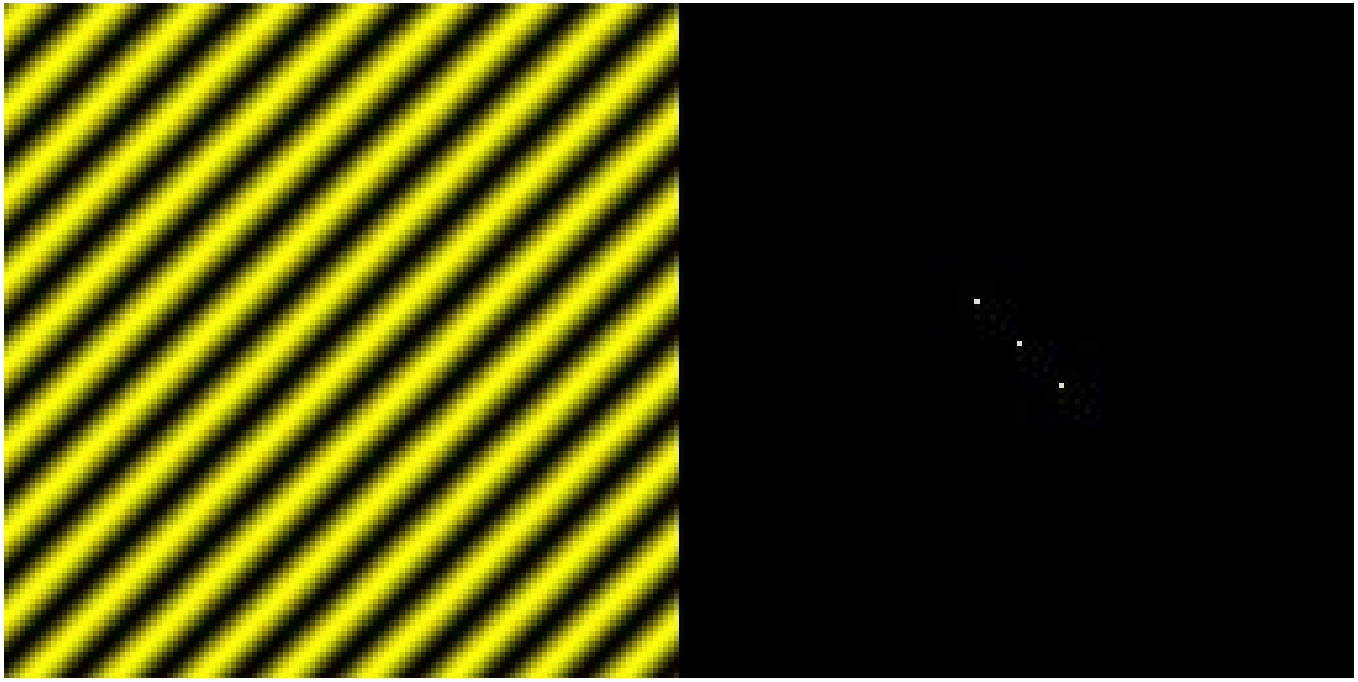
Transformada de Fourier

Somado duas imagens senoidais uma em cima da outra, você não apebas um seno na direção y, assim o espectro dela não contém apenas dois pontos, mas uma linha.



Transformada de Fourier

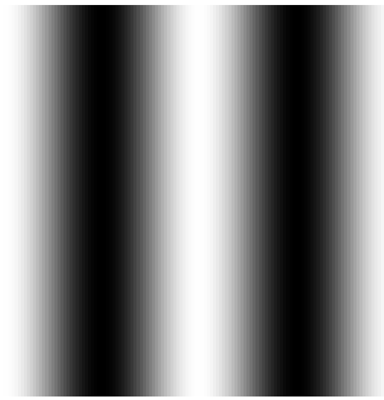
Uma das propriedades da transformada Fourier 2D é que se rotacionar a imagem, o espectro irá rotacionar na mesma direção.



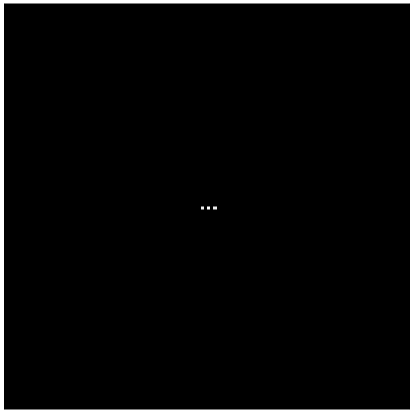
outros termos: Transformada de Fourier

- Aqui tem-se outra imagem de uma senoide, dessa vez com uma freqüência espacial menor, junto com o espectro de sua transformada de Fourier 2D mostrando três picos como antes, exceto que dessa vez os picos representando a sinusóide estão mais perto ao termo DC central, indicando uma freqüência espacial menor (menos onda em um mesmo intervalo!) .

Imagem de brilho



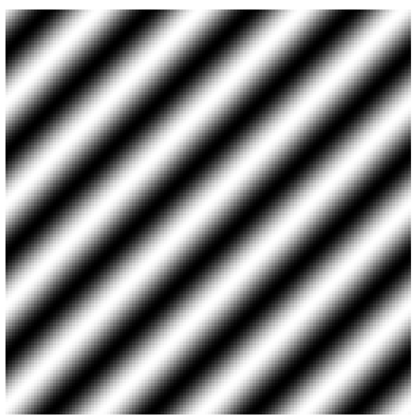
Transformada Fourier



outros termos: Transformada de Fourier

- A imagem em frequencia codifica exatamente a mesma informação da imagem no espaço. A transformada inversa de Fourier uma réplica exata pixel-a-pixel da imagem original.
- A orientação da sinusóide no espaço está correlaciona com a orientação dos picos no espectro de Fourier relativa ao ponto DC central.
- Um padrão sinusoidal inclinado cria um par inclinado de picos na imagem Fourier.

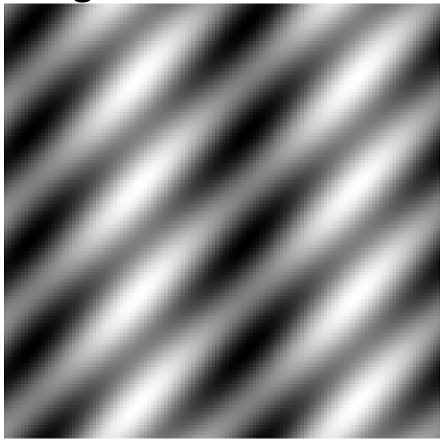
Imagem no espaço se espectro **de Fourier**



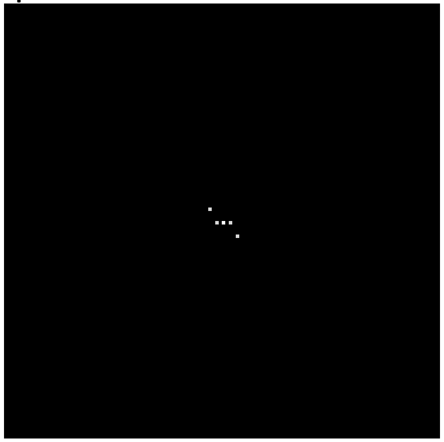
Mais detalhes daTransformada de Fourier

- Coeficientes de Fourier se combinam em ambos os domínios. Por exemplo, a imagem sinusoidal vertical e inclinada a esquerda e abaixo é a soma das sinusóides inclinadas mostrada a direita inferior.

Imagem



espectro da **Transformada Fourier**



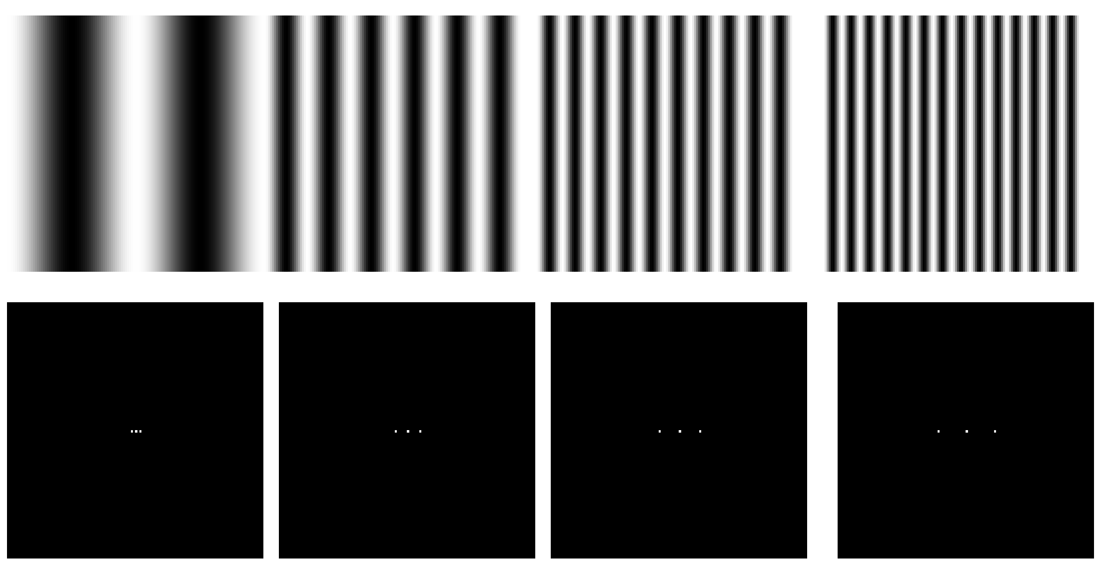
- A imagem combinada mostrada acima pode ser produzida por uma adição pixel a pixel de duas imagens ou por uma adição das transformadas de Fourier correspondentes, seguida por uma transformada inversa para retornar ao domínio do espaço. Nas duas formas o resultado seria exatamente idêntico.

T. F. Harmônicas superiores e efeito "Ringing"

A função de base para a TF é a função senoidal, que é otimizada para expressar formas suaves. Mas a TF na verdade **representar qualquer forma,** até mesmo formas retilíneas agudas, que são as mais difíceis de expressar, porque eles precisam muitos termos de ordens superiores, ou harmônicas maiores.

A figura mostra quatro imagens de freqüência espacial 1, 3, 5, e 7. A **primeira, de frequência 1, é a fundamental, e as outras são harmônicas superiores àquela fundamental, porque elas são múltiplos inteiros da freqüência fundamental.** Essas são na realidade "harmônicas ímpares" na fundamental. A transformada de Fourier tem o espectro mostrado para cada um desses padrões.

1 3 5 7



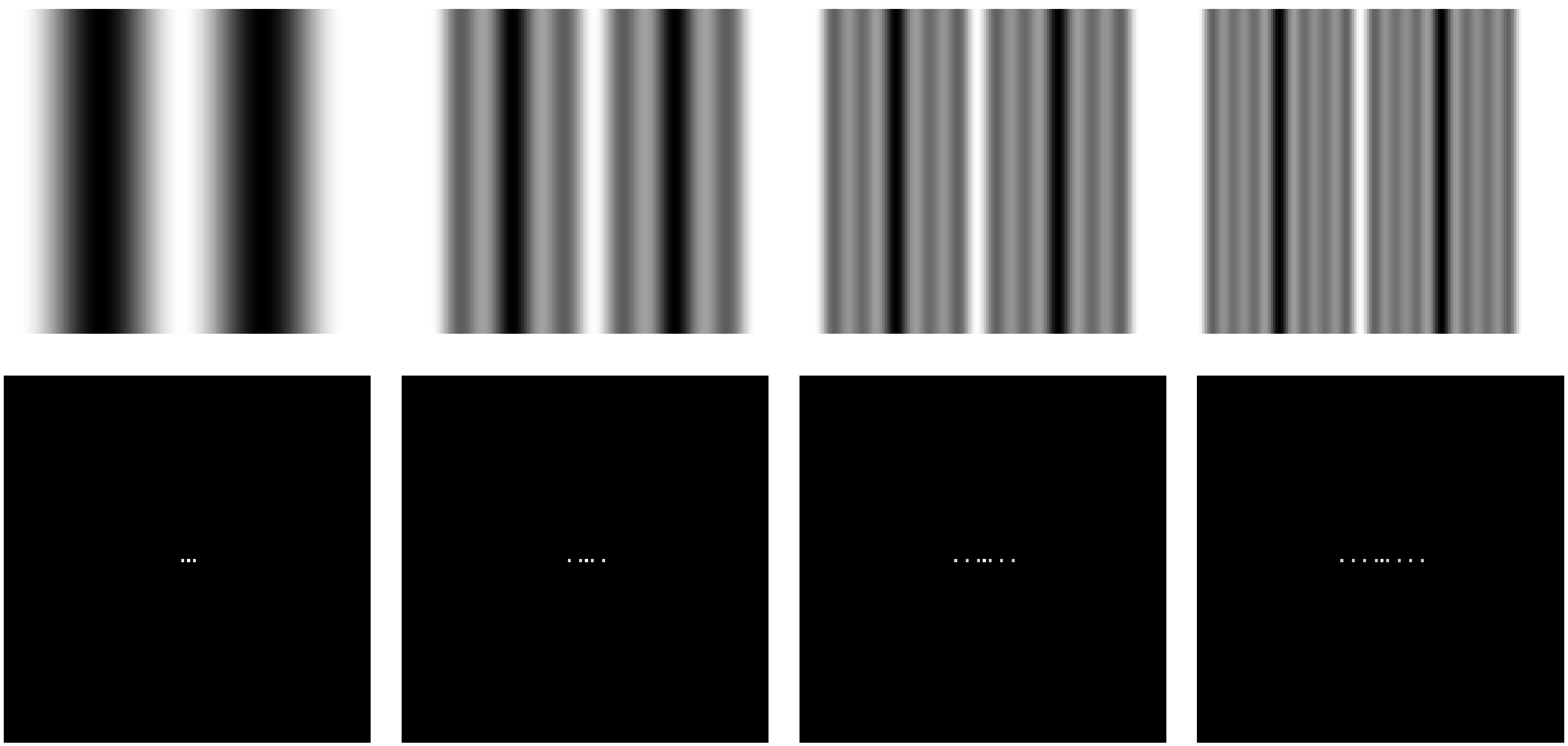
Análise de Fourier Harmônicas superiores e efeito “Ringing”

Abaixo o resultado de adicionar progressivamente harmônicas maiores à fundamental.

Note como a banda vertical central se torna mais fina e forte com cada harmônica superior adicional, enquanto o fundo desvanece em sentido oposto a ser um campo escuro uniforme.

Note também como as harmônicas superiores produzem picos no espectro de Fourier que se espalham mais longe da fundamental, definindo um padrão periódico no espaço da freqüência.

1 **1+3** **1+3+5** **1+3+5+7**



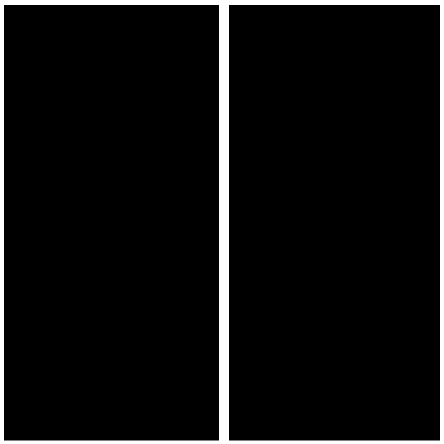
T F Harmônicas superiores e efeito “Ringing”

A imagem abaixo mostra o que aconteceria se esse processo fosse continuado até a frequência de Nyquist – iria produzir uma listra vertical na imagem no espaço, com extremidades agudas, i.e. Uma “onda quadrada" em brilho ao longo da dimensão x.

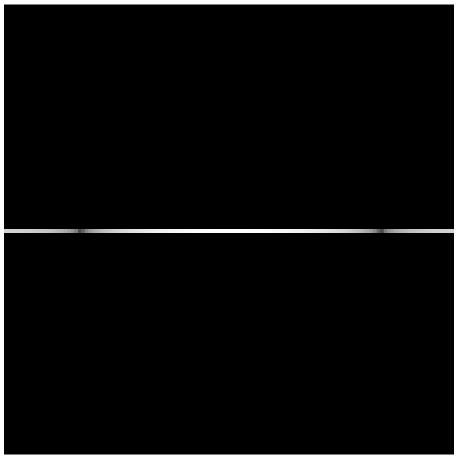
A transformada Fourier dessa imagem exibe um séria "infinita" de harmônicas ou termos de ordens superiores, embora isso não vá até o infinito devido a resolução finita da imagem original.

È desta forma que a transformada de Fourier codifica imagens tipo onda quadrada: como a soma de uma série de sinusóides suaves.

Imagem



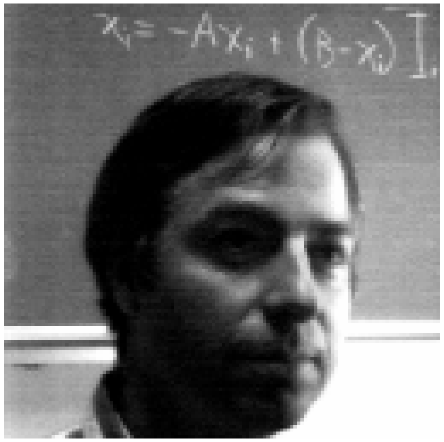
Transformada Fourier

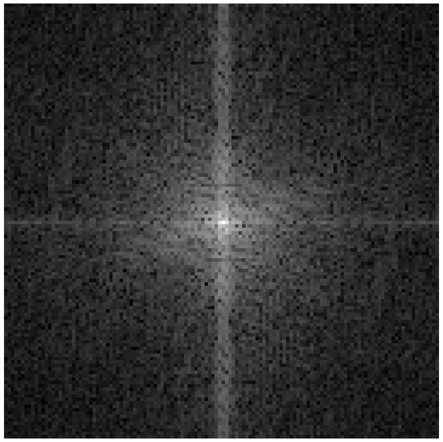


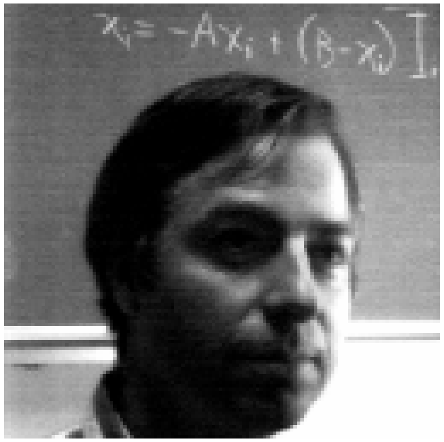
T F - Operação de Filtragem

- A transformada Fourier pode ser usada nas operações de filtragem para ajustar no dominio da frequência, uma modificação espacial de uma imagem.
- Na imagem original mostrada abaixo, mostra-se o espectro de sua transformada de Fourier, e logo após a transformada inversa, que reconstroi a imagem original.
- Essa imagem reconstruída é idêntica, pixel-por-pixel, a imagem original.

Imagem oroginal **Transformada Fourier** **Transformada Inversa**







TF para Filtragem passa baixa

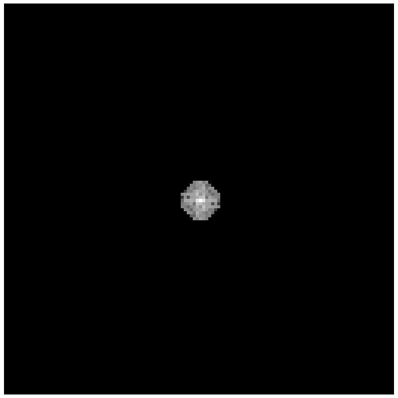
A imagem transformada para o dominio da frequência pode ser usada desenvolver uma transformada inversa “filtrada” de alguma maneira.

O filtro passa baixa permite que apenas as componentes de frequência baixa passem, cortando as frequências altas.

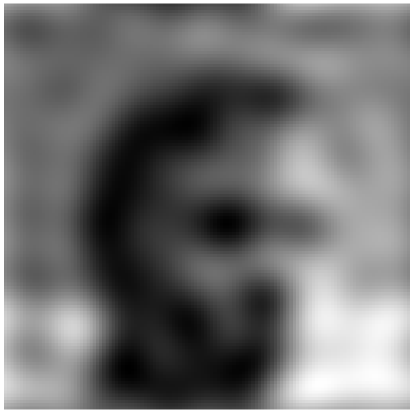
Os componentes de baixa frequência são encontrados próximas ao ponto DC central.

Se for definido um raio ao redor do ponto DC, e zerar-se pontos além deste raio. Uma transformada inversa de Fourier aplicada a essa imagem filtrada em passa baixa produz a imagem transformada inversa como a mostrada:

Filtragem passa baixa



Transformada Inversa

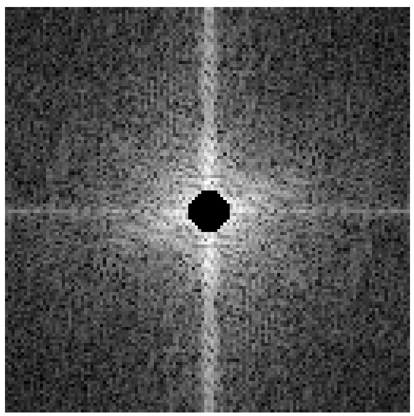


Observe que a imagem filtrada em passa baixa perde a nitidez (fica borrada), preservando as regiões suaves amplas de baixa freqüência mas perdendo os contornos acentuados e bordas.

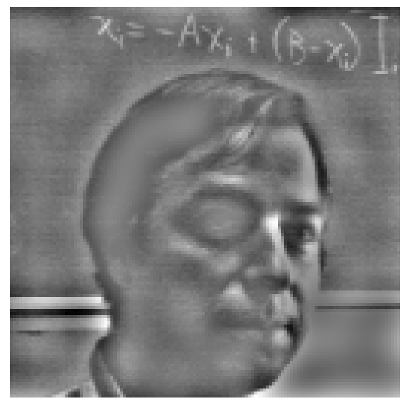
TF Operação de Filtragem Passa Alta

Usa-se a mesma ideia : um limiar em frequência para definir uma região na imagem. Todos os componentes de frequência que caem dentro desse raio são eliminados, preservando apenas os componentes de frequência superiores. Após a transformada inversa nessa imagem observa-se o efeito da filtragem passa alta, a qual preserva as bordas, mas ela perde as regiões mais constantes escuras ou claras.

Filtragem passa alta



Transformada Inversa



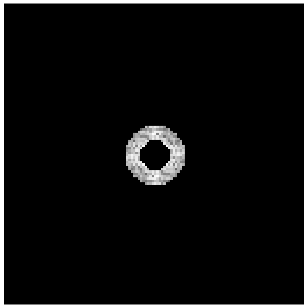
Se a imagem da transformada passa baixa anterior for adicionada pixel-por-pixel à imagem da transformada passa alta deste caso, isso iria restaurar exatamente a imagem original sem filtragem.

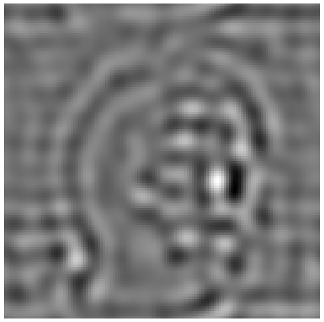
Essas imagens são complementares, portanto, cada representa a informação que está faltando da outra.

TF Operação de Filtragem Passa Faixa

Preserva nesta apenas aquelas frequências espaciais que caem dentro de uma banda, maior que um valor mas inferior a outro.

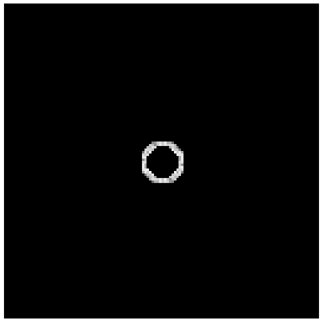
Filtragem passa faixa **Transformada Inversa**

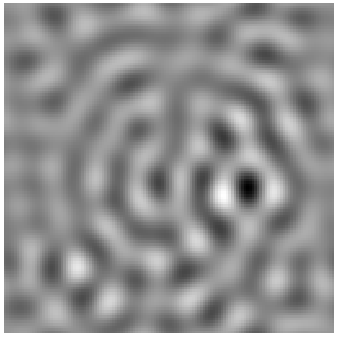




A figura abaixo mostra o que ocorre se uma faixa mais estreita de frequências estiver preservada.

Filtragem passa faixa **Transformada Inversa**

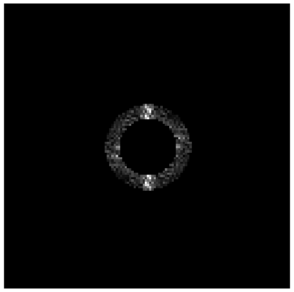




TF Operação de Filtragem

A próxima simulação mostra uma filtragem passa faixa sobre uma banda superior

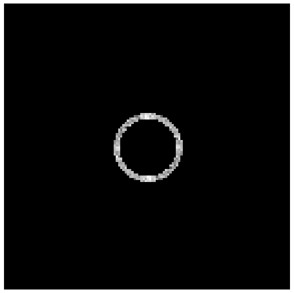
Filtragem passa faixa



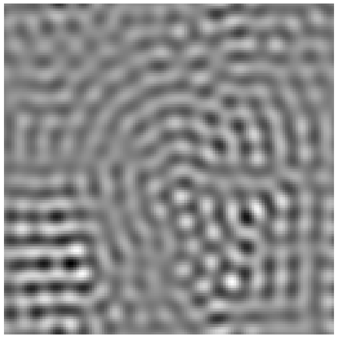
Transformada Inversa

E abaixo a mesma imagem da superior usando uma banda mais ampla.

Filtragem passa faixa



Transformada Inversa

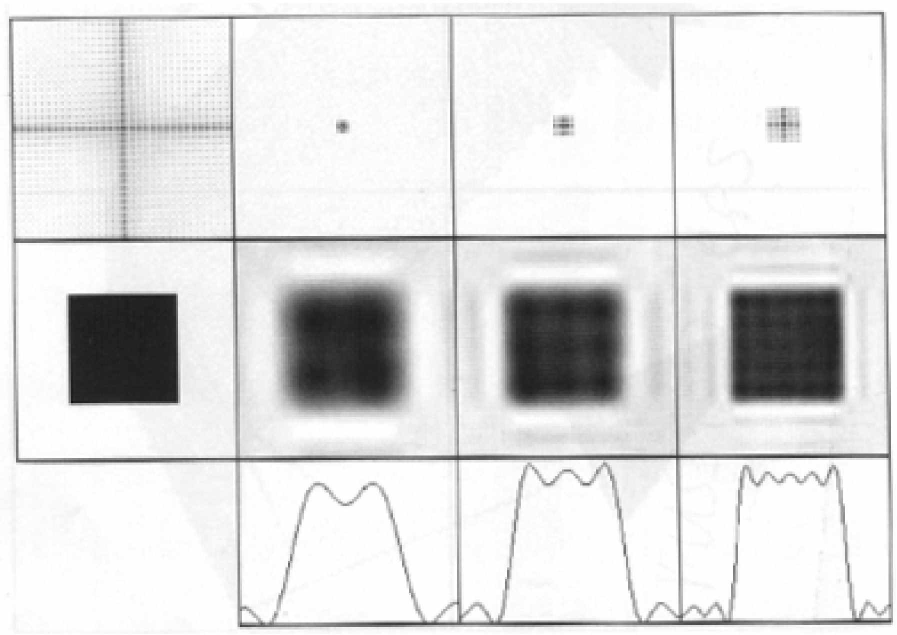


TF Operação de Filtragem

Imagens no domínio espacial estão na linha do meio;

Seus valores em freqüência são mostrados na superior.

A linha inferior mostra a variação intensidade na linha horizontal central da imagem.



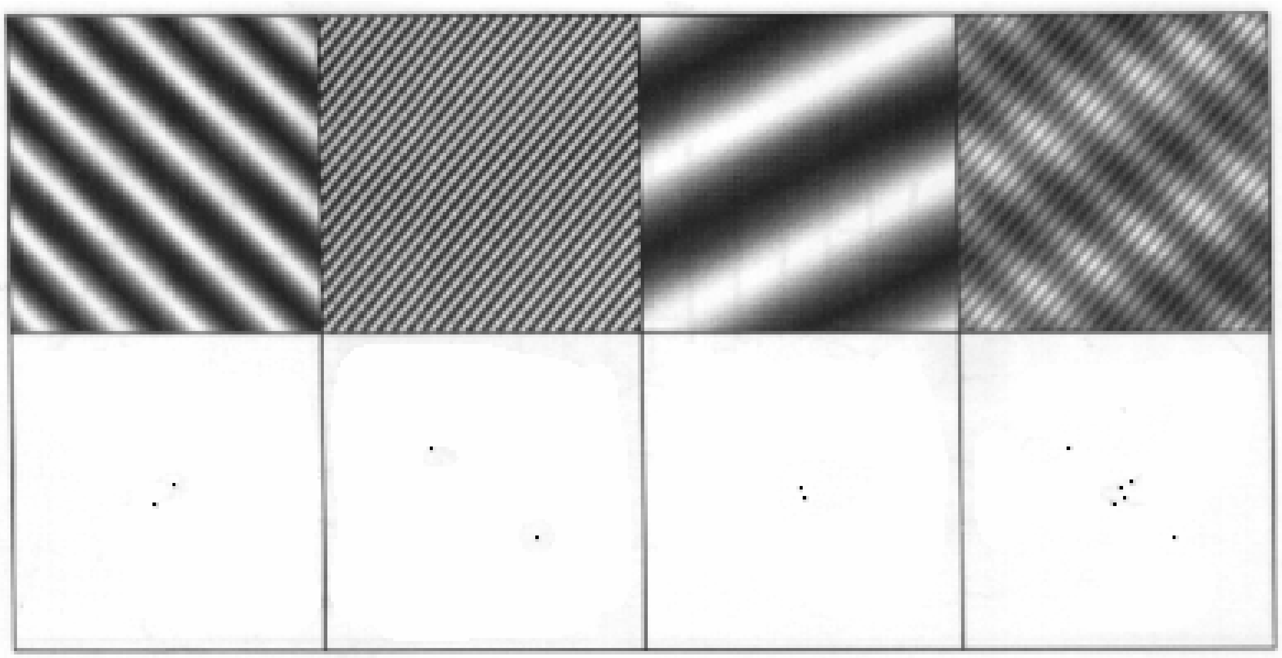
Transformada de Fourier

Imagens com variações sinusoidais em intensidade:

As três primeiras são representadas por dois pontos na frequencia.

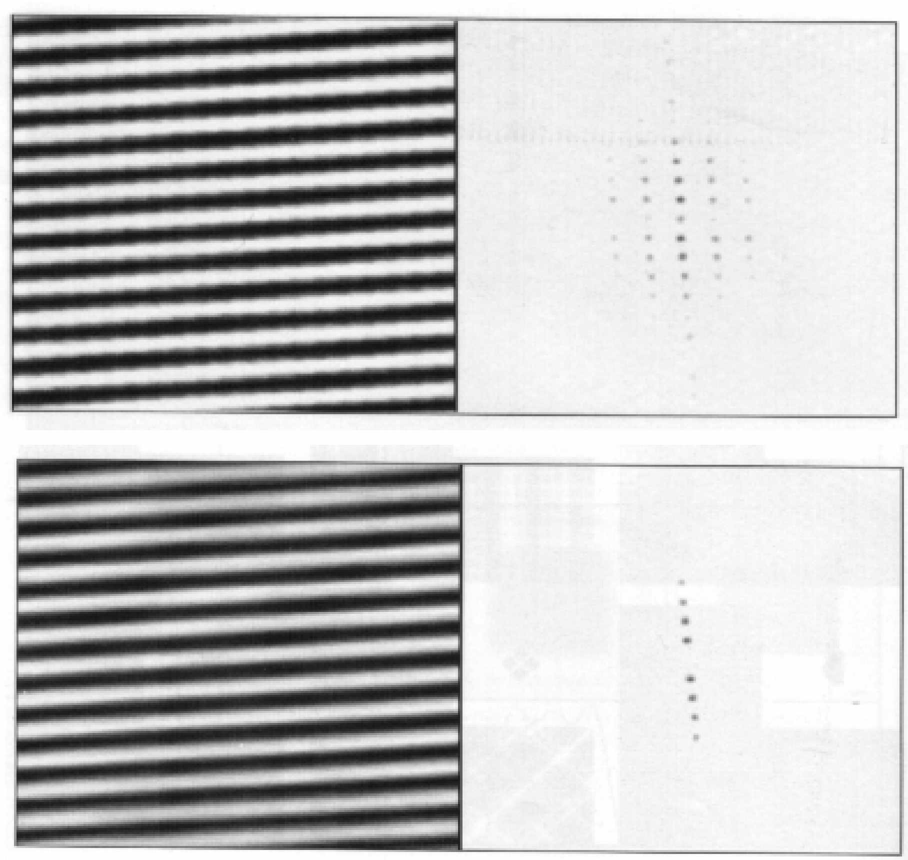
A posição e orientação destes pontos tem a ver com como a imagem original se parece.

A quarta imagem é a soma das três primeiras.



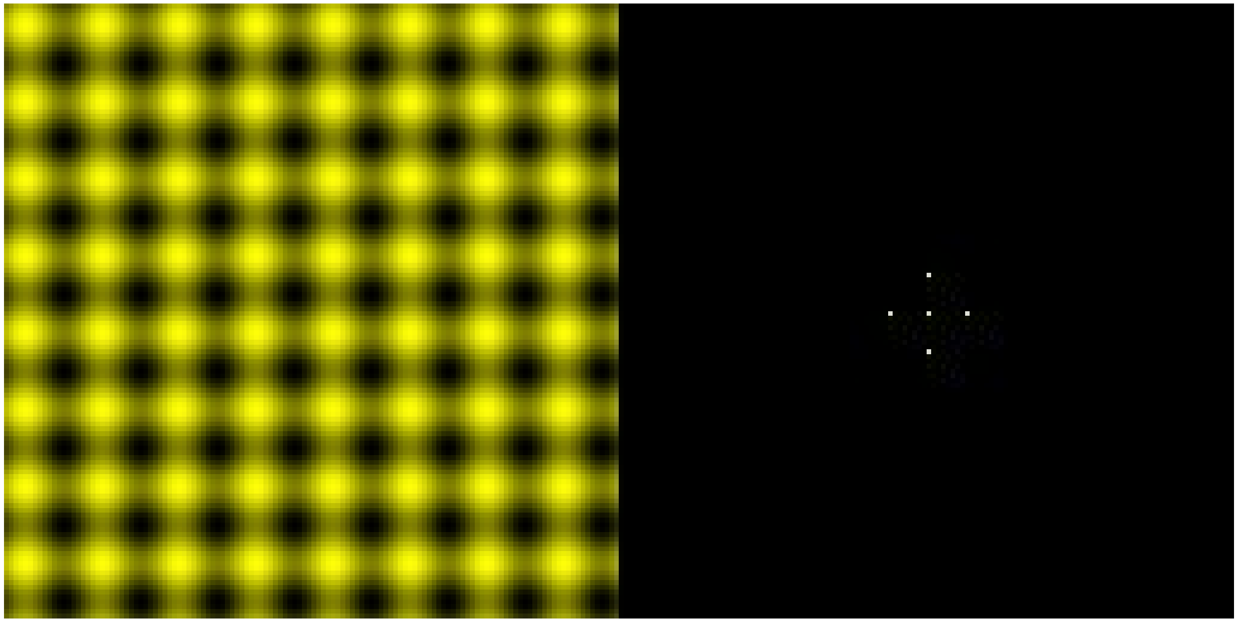
Transformada de Fourier

Linhas com inclinação diferente de zero, de modo que tenha aliasing. Seus componentes na freqüência não são tão nítidos e ficam em maior numero.



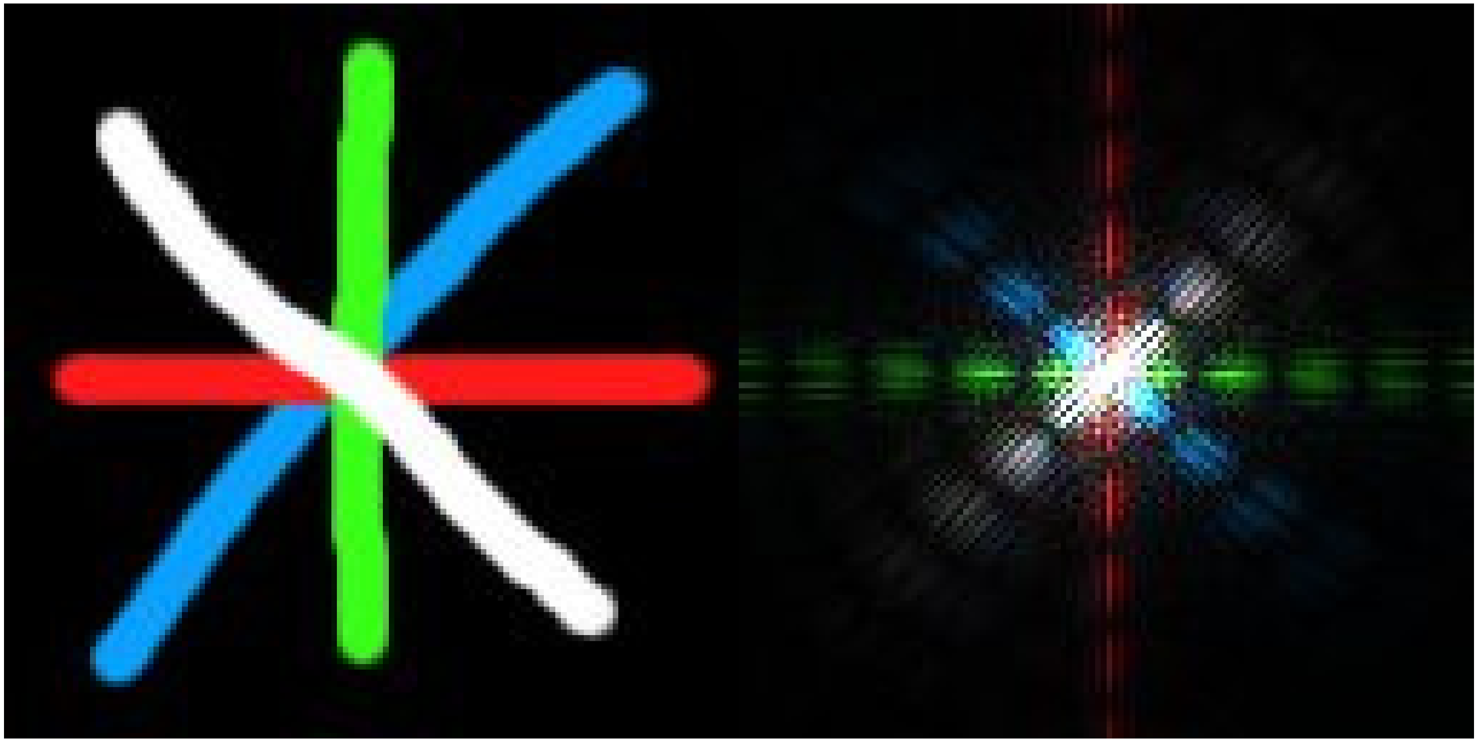
Transformada de Fourier

A imagem seguinte é a soma de duas funções seno, em direções perpendiculares.



Transformada de Fourier

Como linhas em uma imagem geralmente geram linhas perpendiculares no espectro.

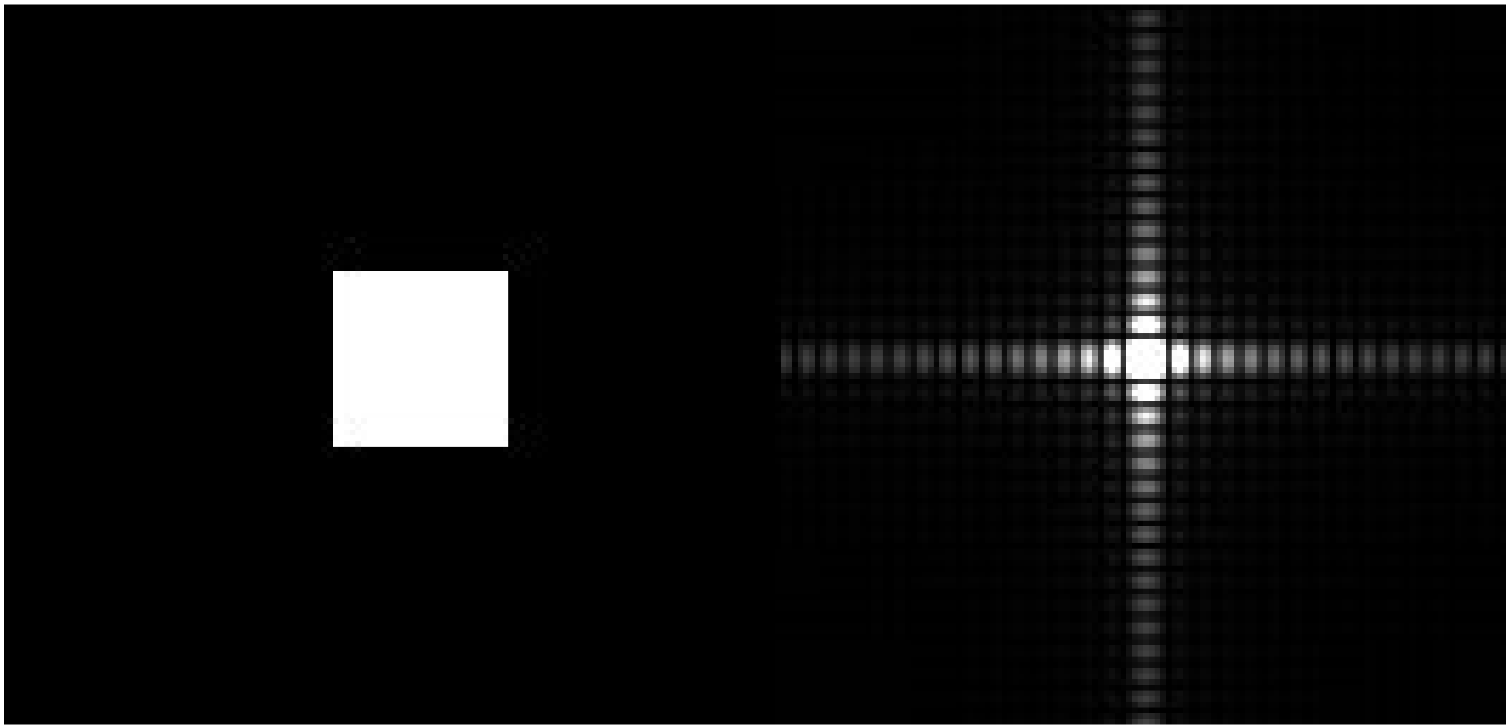


Transformada de Fourier

As linhas inclinadas no espectro são devido a transição aguda do céu para a montanha.

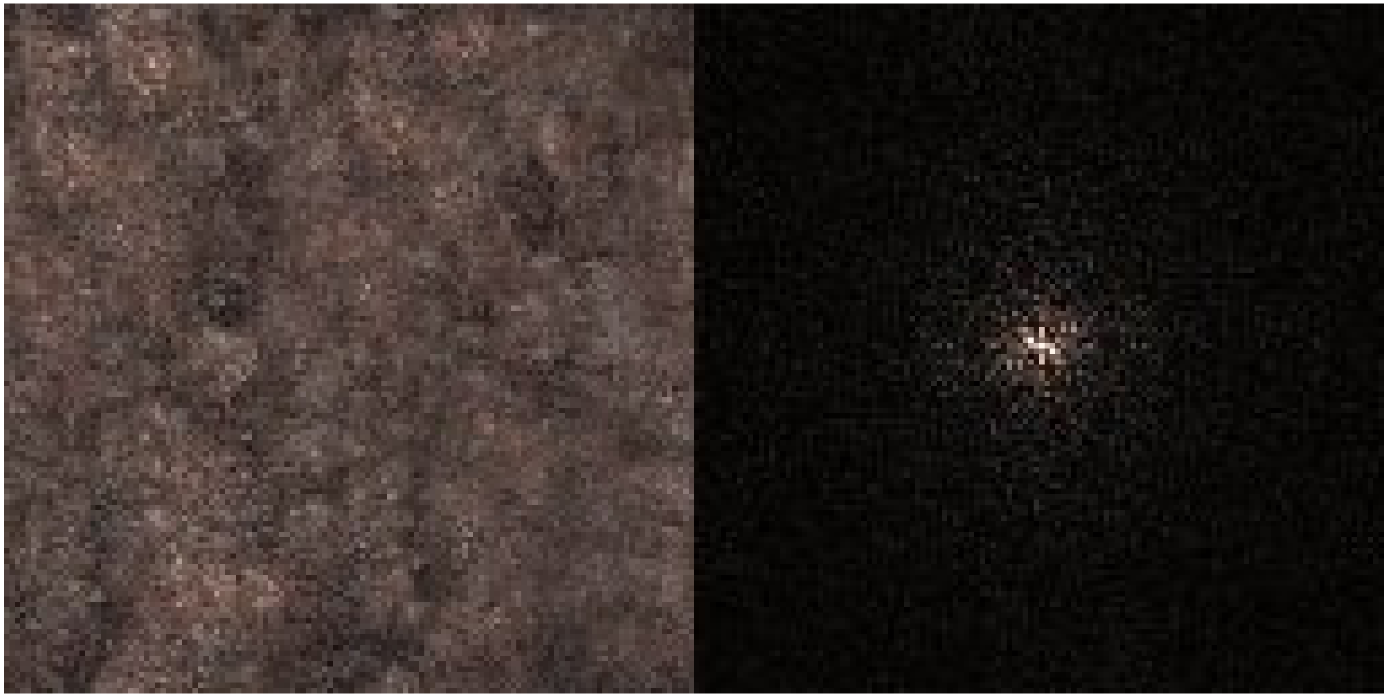
Transformada de Fourier

A FFT de uma função retangular é uma função seno 2D:



Transformada de Fourier

TF de um textura sem mudanças abruptas ou direção ben definida horizontal ou vertical, logo não há linhas horizontais e verticais no espectro.



Conclusão

A teoria de Fourier é baseada na idéia que qualquer função pode ser decomposta de senos e cossenos de diferentes frequências.

Em computação visual, imagens no domínio espacial podem ser transformadas para o domínio da frequência onde algumas operações e medidas são melhores feitas.

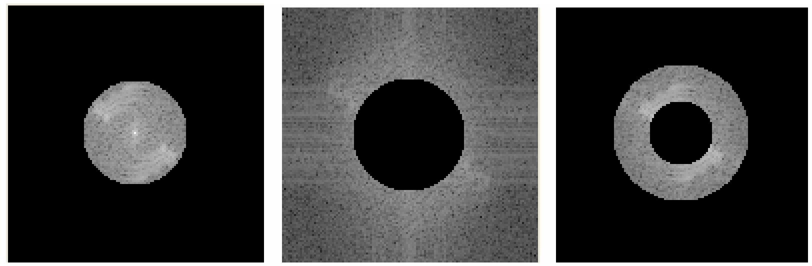
As implementações transformada discreta de Fourier (DFT) e ransformada rápida de Fourier (FFT) foram desenvolvidas para reduzir a complexidade do DFT.

A TF é adequada a entender os tipos de filtros e como utilizá-los no processamento de imagens.

As filtragens mais simples e mais utilizadas são através de um **filtro passa faixa**, ou do tipo **passa banda** que remove ou deixa passar regiões selecionadas de freqüências.

Quando esta faixa que passa está próxima à origem, o filtro é chamado de **passa baixa**. Quando está afastada, o filtro é chamado de **passa alta**.

(a) Filtro passa baixa, (b) Filtro passa alta e (c) Filtro passa banda



(a) (b) (c)

As imagens acima estão em freqüência, *F(u,v)* , i.e. são as transformadas de Fourier de uma imagem a ser filtrada.

A dificuldade é escolher a função de transferência do filtro *H(u,v)*, que é a filtragem desejada.

Essas funções de transferência afetam as partes real e imaginária de *F(u,v)*, exatamente da mesma forma, sem alterar a fase da transformada.

Esses filtros são chamados de *filtros de deslocamento de fase zero*. Para realizar essas filtragens utilizamos um filtro circular simétrico.

Transformada de Fourier Conclusão

- Como dito anteriormente **a maior força de uma imagem quase sempre** está concentrada nas componentes de **baixa freqüência**.
- Conseqüentemente, as componentes de alta freqüência representam pouca força da imagem.
- Isto é simples de entender, pois são os **detalhes da imagem que geram essas altas freqüências**.
- Detalhes da imagem são, por exemplo, **bordas, lados e outras transições abruptas de nível de cinza**.
- Portanto, utilizando um filtro passa baixa obtém-se uma imagem menos nítida, “blurred” ou suavizada, ou seja, ocorre uma perda de detalhes que são os componentes de altas freqüências.

Transformada de Fourier Conclusão

Portanto, se > *r* então *F(u,v) := 0.* De forma equivalente pode-se especificar um filtro *H(u,v)*, da seguinte forma:

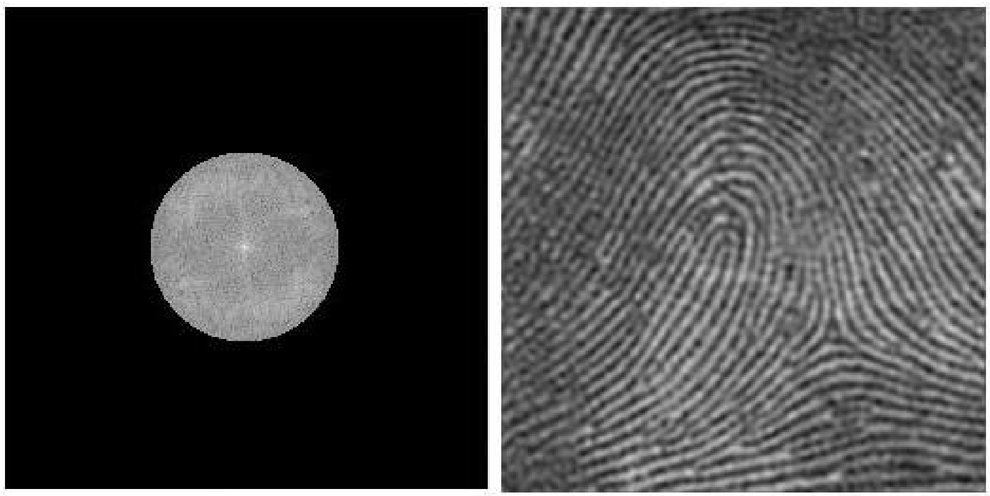
H(u,v) = 1 se $u2 + v2 < r2$

H(u,v) = 0 se $u2 + v2 \quad r2$

Esse filtro é chamado de **passa baixa ideal**, pois todas as freqüências, dentro do círculo de raio *r*, são passadas sem atenuação e todas as fora do círculo são retidas completamente.

O ponto de transição entre *H(u,v)* = 1 e *H(u,v)* = 0 , ***r***, é chamado de freqüência de corte.

Resultado da filtragem passa baixa



(a) (b)

Filtragem usando a Transformada de Fourier

Pode-se entender a filtragem **passa alta** em freqüência como uma operação contrária à filtragem passa baixa.

Na filtragem passa alta, os componentes de alta freqüência da transformada de Fourier não são alterados, enquanto os de baixa freqüência são removidos.

Isto faz com que os detalhes finos da imagem sejam enfatizados.

Neste caso, as baixas freqüências serão removidas e as altas freqüências, fora do círculo de raio *r*, presentes na transformada da imagem, *F(u,v)* serão mantidas.

Filtragem usando Transformada de Fourier

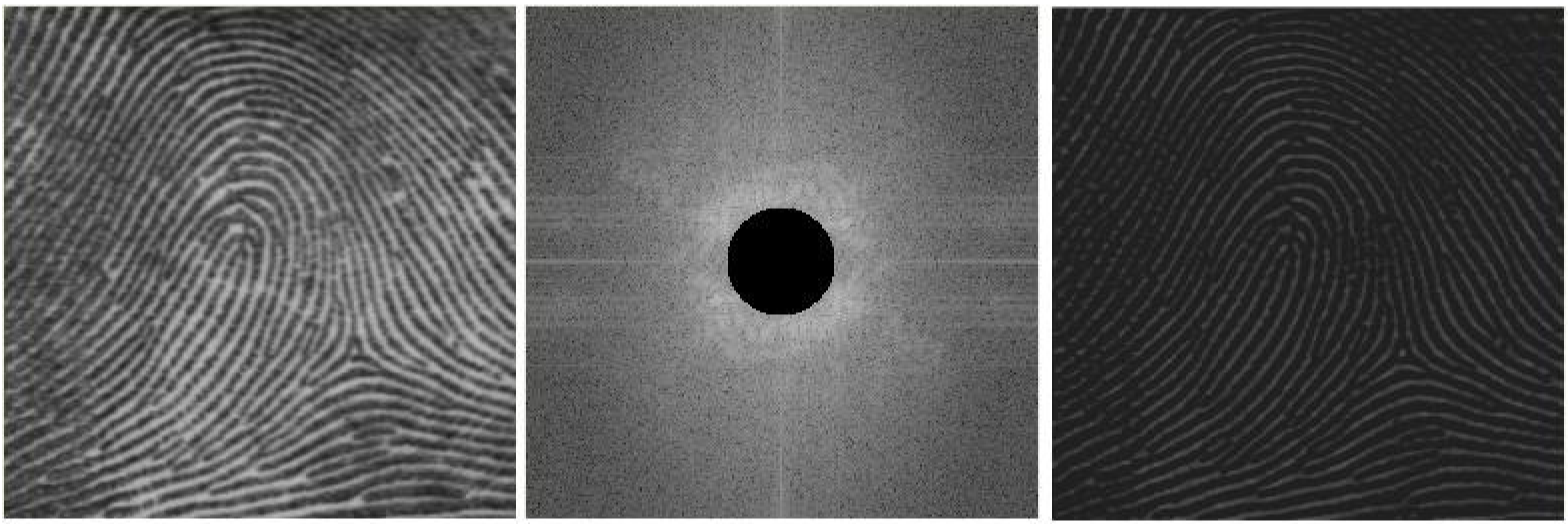
Portanto, se $< r$ então $F(u,v) := 0$. De forma equivalente pode-se especificar um filtro $H(u,v)$, da seguinte forma:

$H(u,v) = 0$ se $u2 + v2 < r2$

$H(u,v) = 1$ se $u2 + v2 > r2$

Esse filtro é chamado de passa alta ideal, pois todas as freqüências, fora do círculo de raio *r*, são passadas sem atenuação e todas as dentro do círculo são retidas completamente.

Resultado da filtragem passa alta



(a) (b) (c)

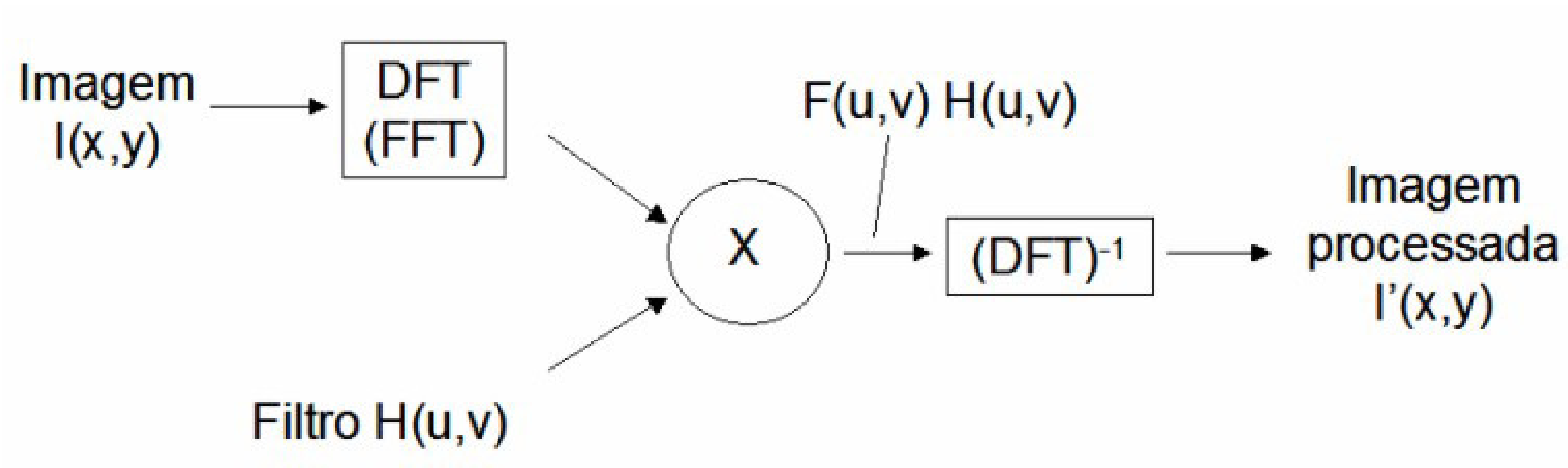
Um exemplo de filtragem passa alta em imagem de impressão digital. (a) é a imagem original, (b) e (c), apresentam, respectivamente, o filtro passa alta utilizando e a imagem com detalhes finos após a filtragem.

Processamento de imagens no domínio de Fourier

1- A imagem ***I(x,y)*** é transformada para o **domínio de Fourier** usando transformada **discreta**: DFT.

2- A imagem no domínio de Fourier é representada por ***F(u,v)*** e é convoluída com o **filtro *H(u,v)*.**

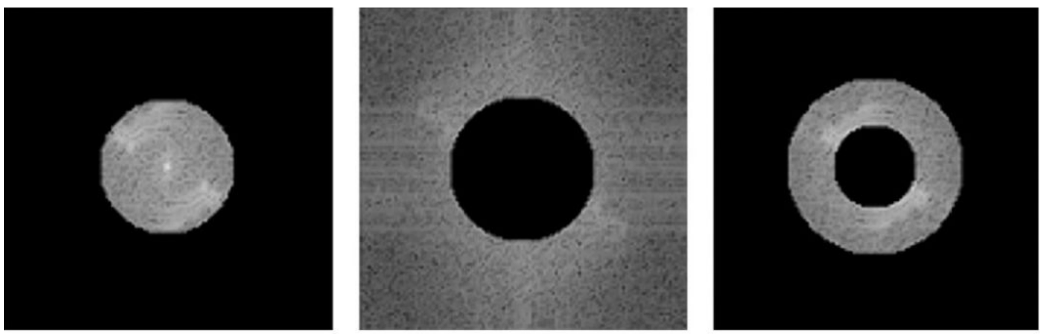
3- Depois do produto *F(u,v) e H(u,v)* é aplicada a **inversa da transformada** de Fourier para retornar ao **domínio espacial**, onde se tem a imagem processada ***I'(x,y)*.**



Esquema ilustrando os passos da filtragem no domínio de Fourier

Tipos de filtro quanto a frequencia:

- Passa baixa,
- Passa alta e
- Passa faixa



(a) (b) (c)

Filtragem Passa Baixa

•Utilizando um **filtro passa baixa** obtém-se uma imagem **mais suavizada**.

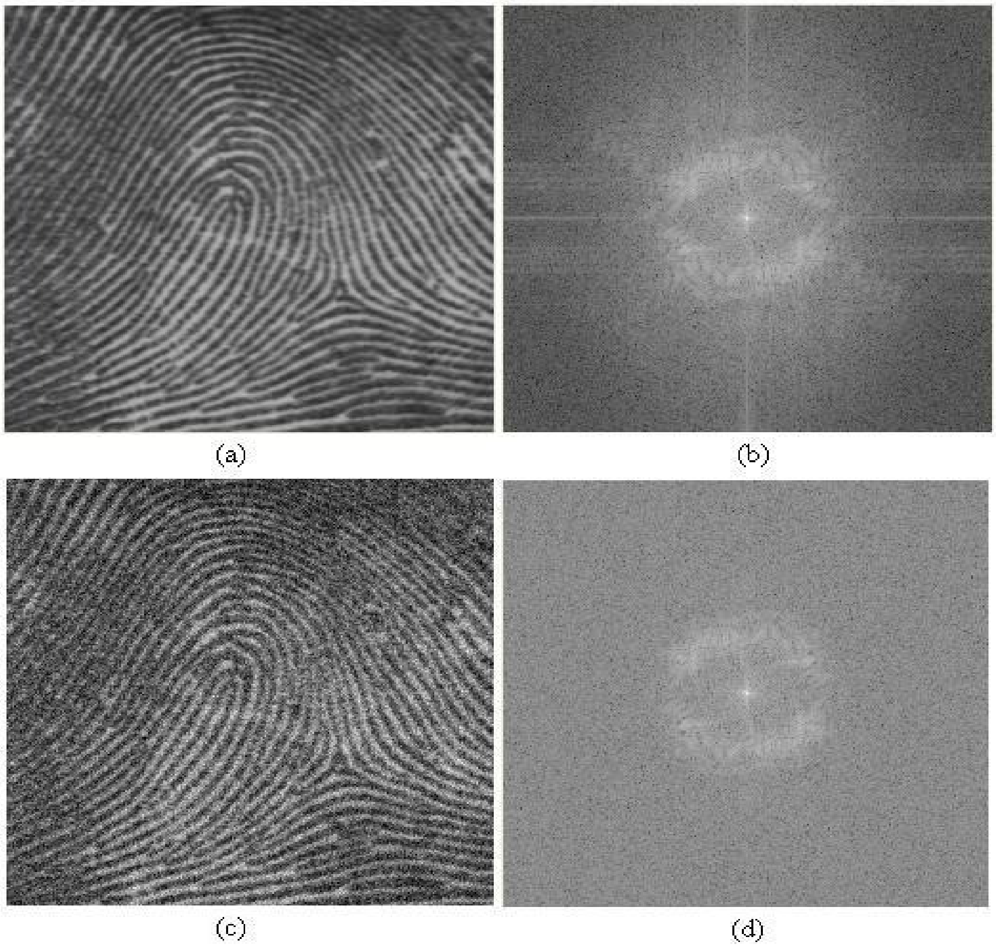
•Os **detalhes finos** (ex: bordas, lados e outras transições abruptas de nível de cinza) da imagem correspondem a **altas freqüências**.

•Pode-se ter uma perda de detalhes que são os componentes de altas freqüências.

Filtragem Passa Baixa

- Na filtragem **passa baixa**, os componentes de baixa freqüência da transformada de Fourier **não são alterados**, enquanto os de **alta freqüência são removidos**.

- Isto faz com que as partes **constantes** da imagem sejam enfatizados.



Comparação da imagem e do seu espectro de Fourier **depois** e **antes** de um filtro passa baixa.

Filtro **passa baixa ideal**:

$$H(u,v) = 1 \text{ se } u^2 + v^2 < r^2$$

$$H(u,v) = 0 \text{ se } u^2 + v^2 \geq r^2$$

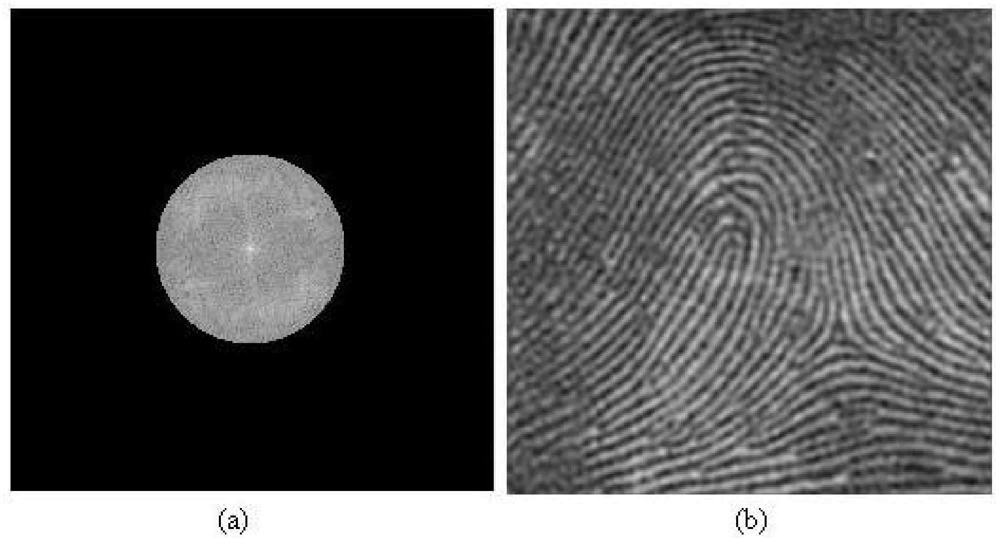


Figura 5.12 - Resultado da filtragem passa baixa

Filtragem Passa Alta

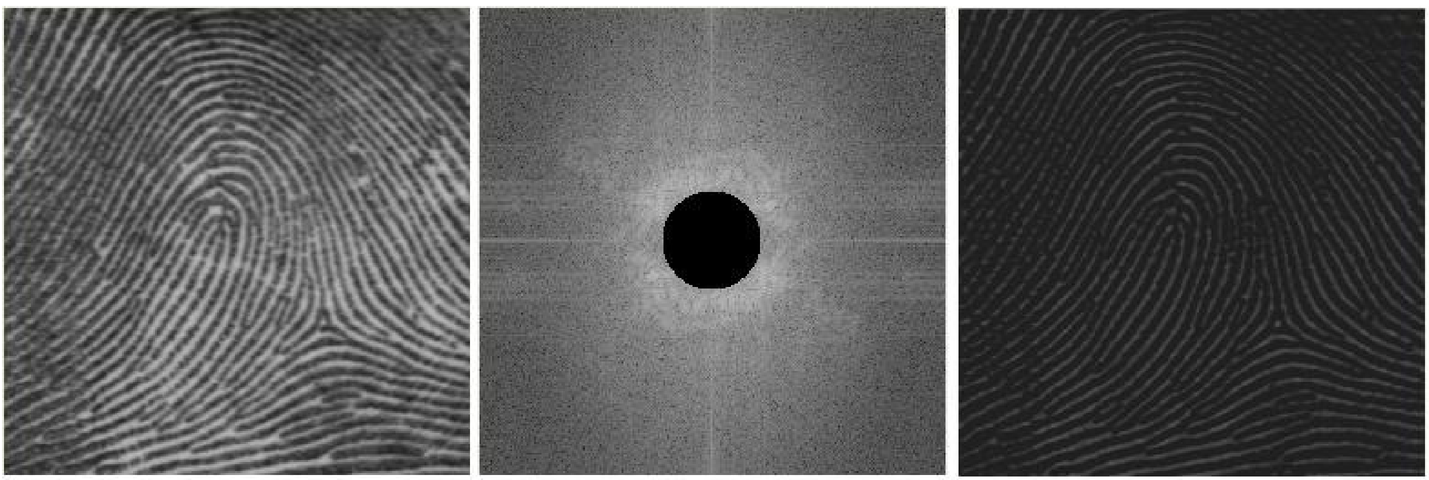
Na filtragem **passa alta**, os componentes de alta freqüência da transformada de Fourier **não são alterados**, enquanto os de baixa freqüência são removidos.

Isto faz com que os detalhes finos da imagem sejam enfatizados.

Filtro **passa alta ideal**:

$$H(u,v) = 0 \text{ se } u^2 + v^2 < r^2$$

$$H(u,v) = 1 \text{ se } u^2 + v^2 \geq r^2$$



(a) (b) (c)

Resultado da filtragem passa alta.

Outros filtros no domínio de freqüência

Filtros pontuais

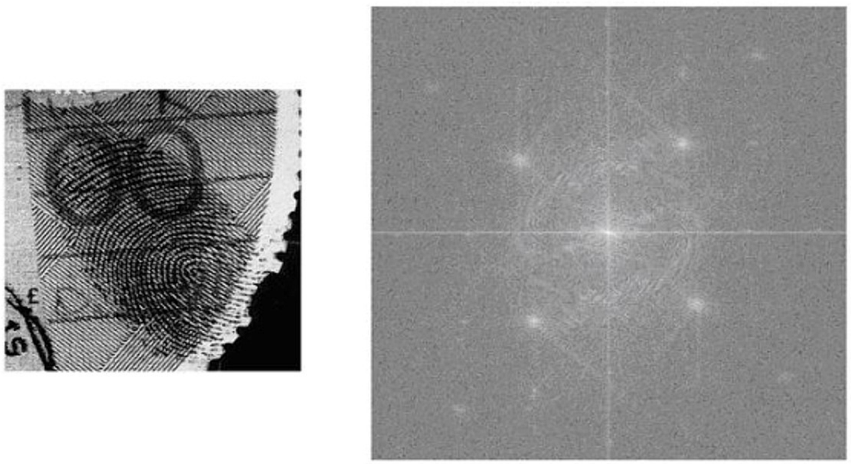
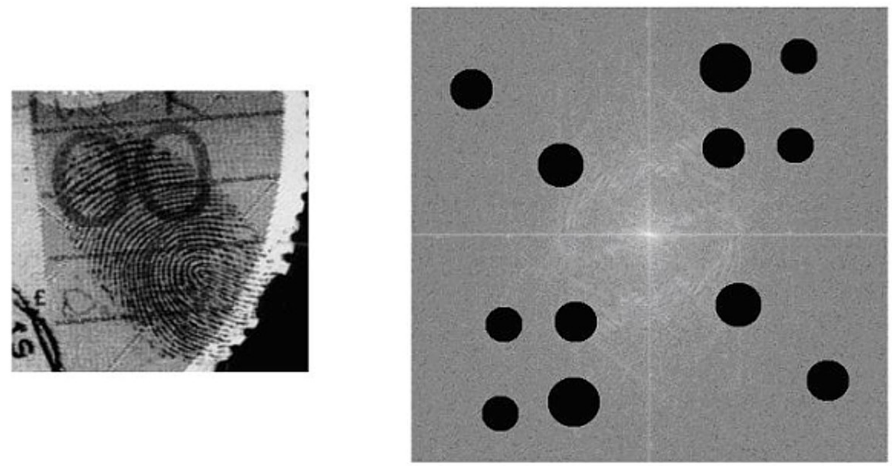
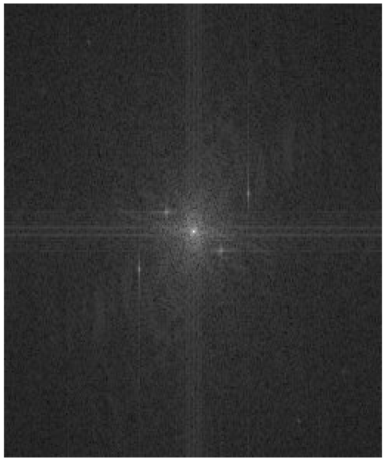


Imagem e seu espectro de Fourier.



Resultado da filtragem utilizando filtro circular não centrado na origem.

Outros filtros pontuais no domínio de freqüência



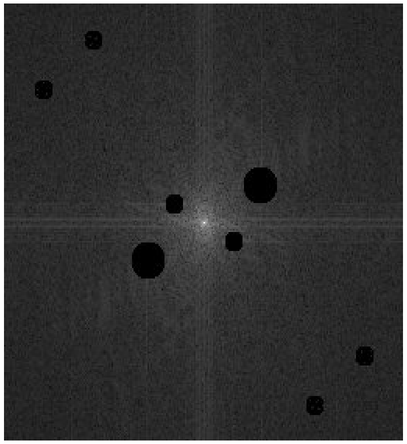


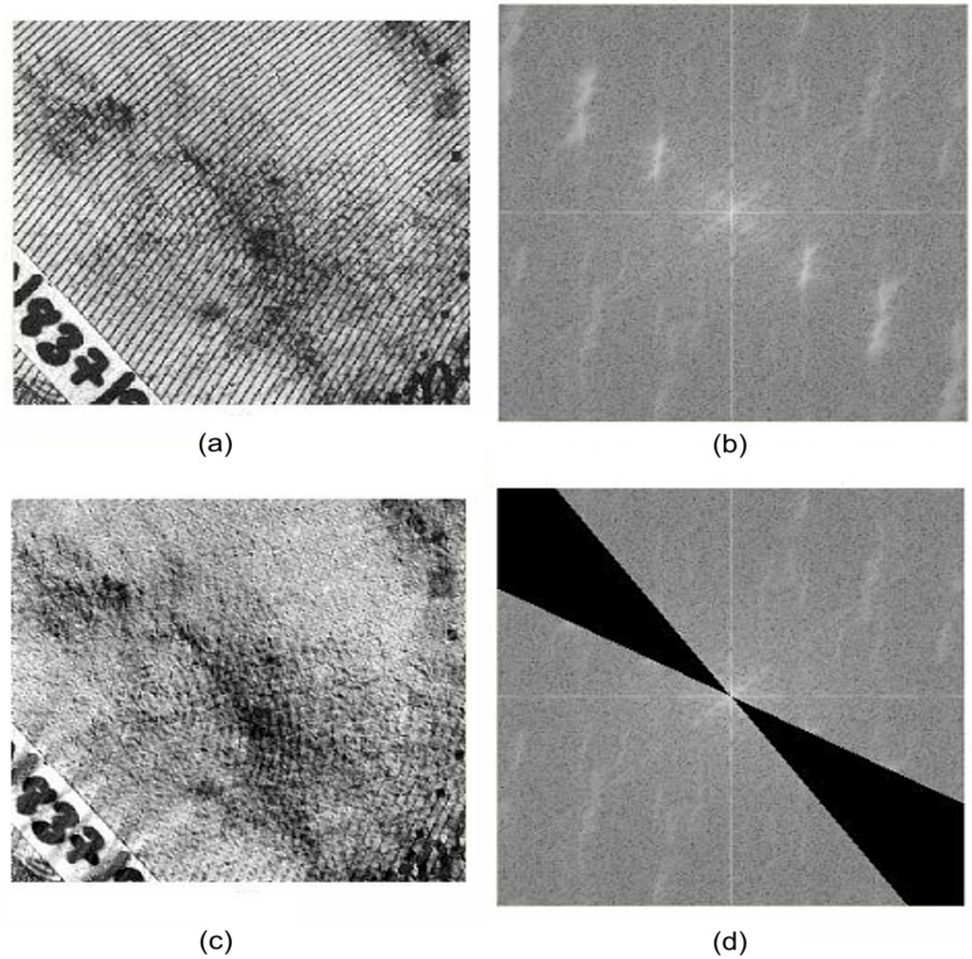
Imagem com moires em 2 direções

No seu espectro de Fourier aparecem **pontos de maior intensidade**, cuja distância em relação ao centro é proporcional à sua freqüência e com inclinação perpendicular a inclinação das mesmas no espaço. **Subtraindo** esses pontos da imagem

Resultado da filtragem utilizando . Repare que melhorou muito

Outros filtros no domínio de freqüência

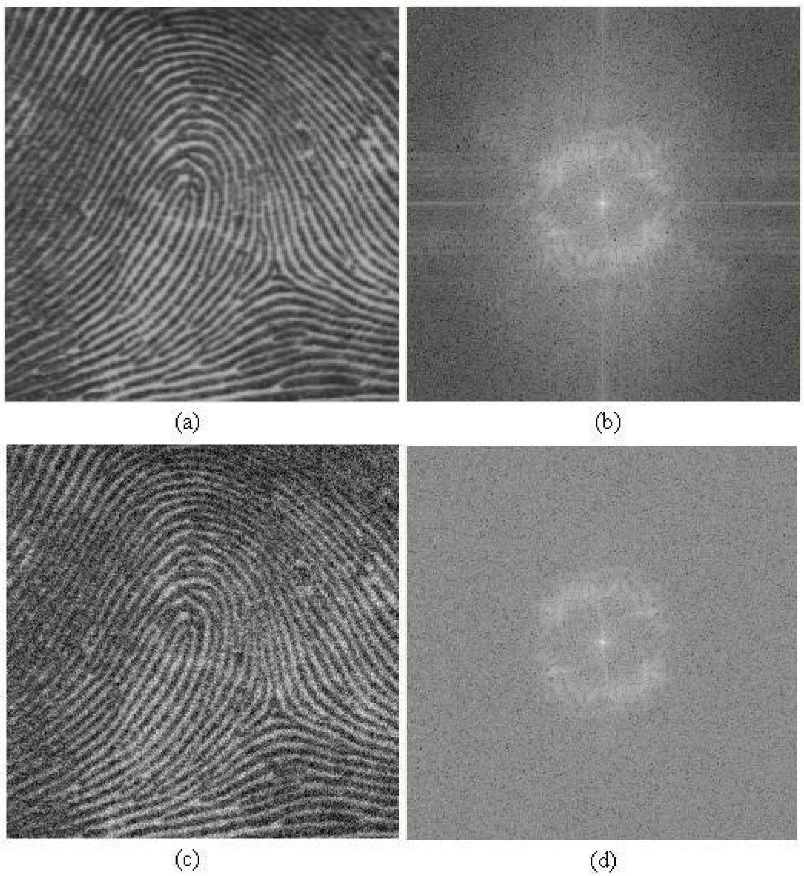
Filtros *fan* ou setor circular



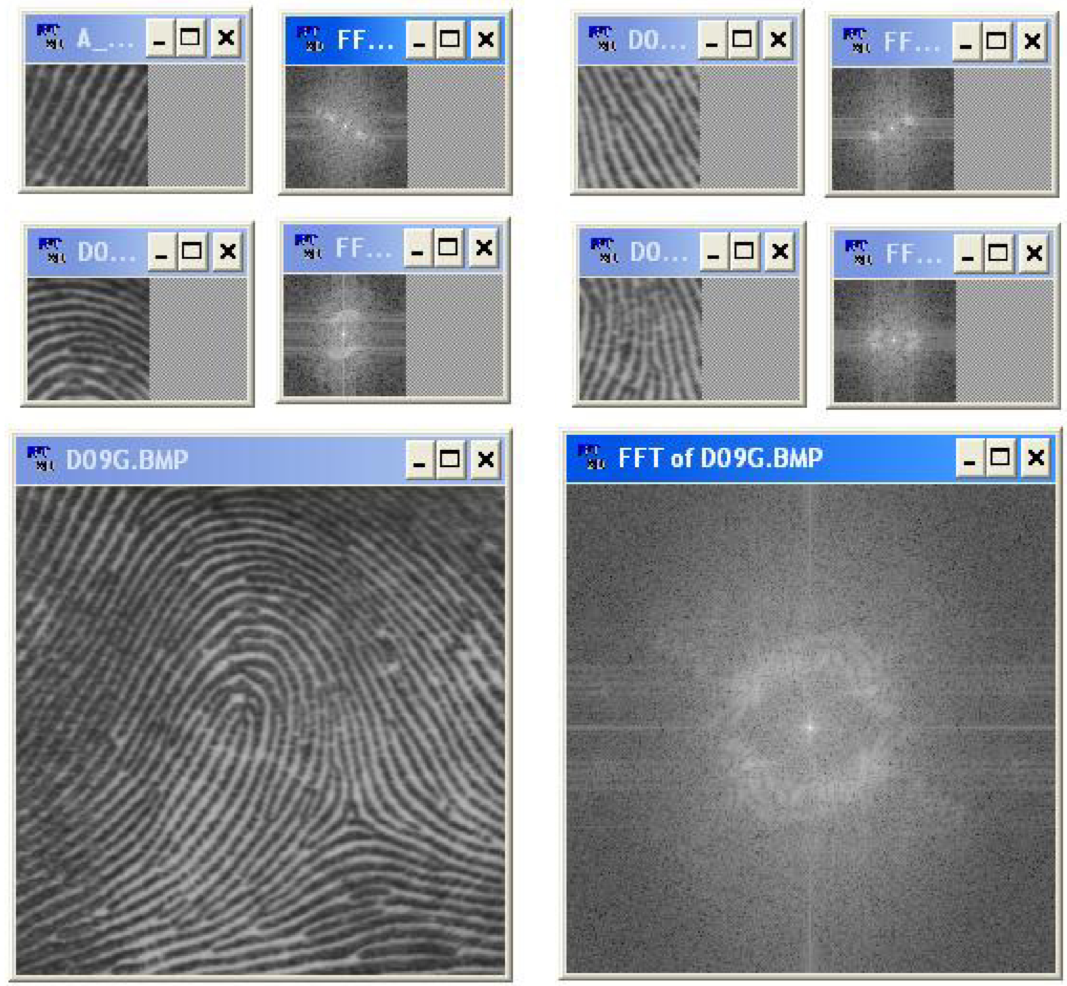
Resultado da filtragem utilizando filtro setor angular.

Caracterizando elementos das Imagens pelo seu espectro de Fourier

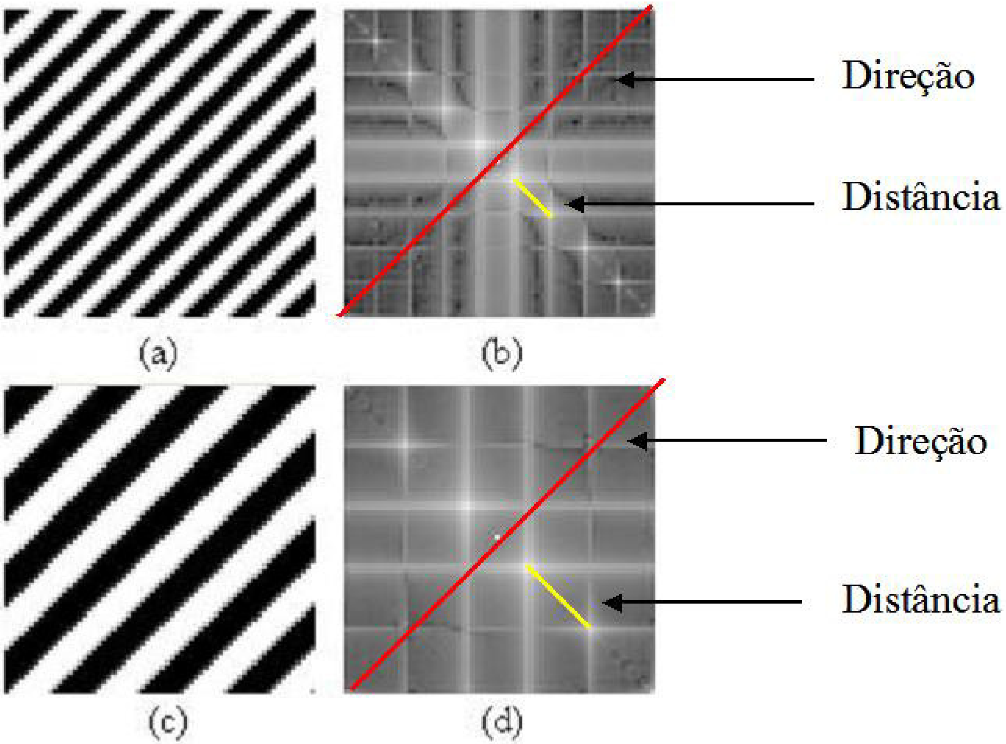
Observa-se no espectro de Fourier de uma impressão digital um **acúmulo de energia** em torno de um **anel. Isso é** devido ao fato das cristas se comportarem como **senóides**, apresentando freqüências bem definidas.



Nos espectros de Fourier, de partes desta imagem, aparecem dois picos de intensidade simétricos, em relação à origem.

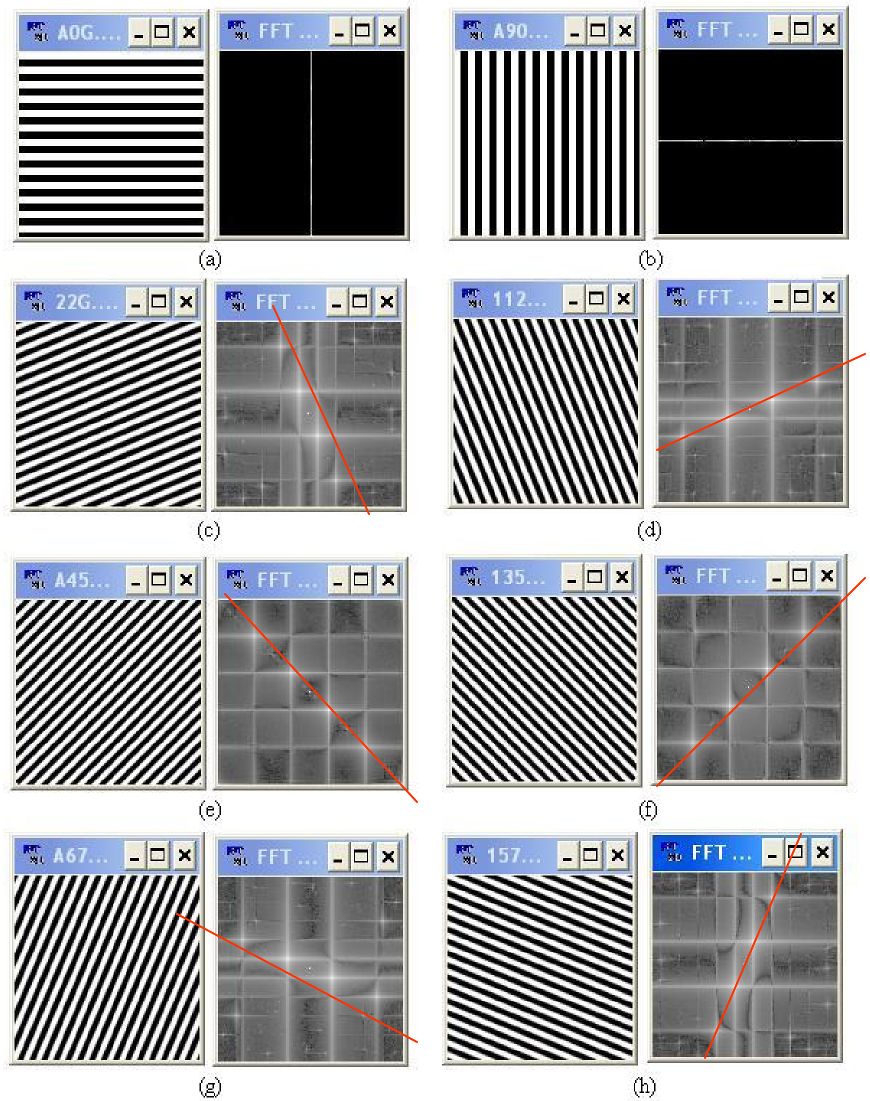


Fragmentos de uma impressão digital e seus espectros de Fourier.



Imagens sintéticas representando um fragmento de impressão digital e seus espectros de Fourier.

De acordo com a localização desses picos têm-se: a distância e a direção das cristas na região.



Imagens sintéticas com listras inclinadas e seus espectros de Fourier.

Exercício:

- Transforme a região de interesse de uma imagem térmica da forma espacial (x,y) para o **domínio de Fourier.**

- **Depois** construa seu espectro de potência e identifique os limites da distância ao centro da informação útil (tem informações diferentes de zero!) deste espectro. (Responda: o que voce acha que isso tem a ver com a freqüência de Nyquist?)

- Cada um dos alunos do curso deve calcular (pode-se usar sistemas já prontos) e mostrar o **espectro de Fourier e** o **ângulo de** fase das imagens originais do Trab. anterior e também da imagem com ruido adicionado.

- Esse resultado seria identico se voce aplicasse a elas um registro?

- *Use a imagem com N, tal que $N = 2^n$ (dyadic lengths N)* , ou seja tenha por exemplo *N*=128, 256, 512 etc...

Detalhes finais:

- A maioria das imagens no domínio de freqüências possui como amplitude característica, picos no centro *(0,0)* do domínio.
- Neste ponto a imagem atinge o seu maior valor, pois nele é computada justamente a menor freqüência presente na imagem e pode-se deduzir que este é o valor médio da imagem.
- Analisando **a imagem no espectro de Fourier** pode-se observar que diferentes categorias de imagens podem apresentar diferentes categorias de espectros de Fourier, identificando por exemplo se existem texturas constantes ou defeitos caracteristicos nesta imagem.
- A importância de entender a representação da imagem do espectro de Fourier é grande:
  - E.g. : a partir desse entendimento, torna-se mais simples e intuitivo determinar um filtro apropriado a ser aplicado à imagem. Através das informações geradas pela imagem do espectro de Fourier pode-se realçar (manter) ou reter (eliminar) os coeficientes das componentes de determinadas freqüências.
- Uma outra informação muito importante que se pode obter do espectro de Fourier é a **informação da força da imagem** (*image power*). Através desta informação, observa-se que a força da imagem, a partir do seu centro no espectro de Fourier, está concentrada nas componentes de baixas freqüências.
- Faça um grafico apresentando uma imagem no domínio de Fourier. Identifique nela círculos de diferentes raios. Os círculos representam uma forma se se entender o quanto da informação da imagem está contida em cada círculo. Calculando-se a proporção usando da soma total de pixels sobre cada círculo. Esta informação é bastante relevante na hora de determinar a freqüência de Nyquist ou um filtro adequado a ser aplicado a imagem (sendo possível determinar, aproximadamente, a percentagem da imagem que será retida ou atenuada).

Referências

- Transformada de Fourier

http://sharp.bu.edu/~slehar/fourier/fourier.html#filtering

http://csnet.otago.ac.nz/cosc453/student_tutorials/fourier_analysis.pdf

http://student.kuleuven.be/~m0216922/CG/fourier.html#fft

Gonzaga, S. L. de O.; Viola, F.; Conci, A. **"An approach for Enhancing Fingerprint Images using adaptive Gabor Filter parameters"**. Pattern Recognition and Image Analysis (also as an electronic publication) Vol. 18, No. 3 pp. 497-506 http://www.ic.uff.br/~aconci/pub2008.html

Determina Online a Transformada de Fourier de um expressao:

http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi?session=6WA23CFB0C.3&+lang=en&+module=tool%2Fanalysis%2Ffourierlaplace.en

Convolução:

http://www.jhu.edu/~signals/convolve/index.html

http://www.jhu.edu/~signals/discreteconv2/index.html