Cálculo do conjunto paralelo

Vamos usar letras maiúsculas *A*; *B*, etc para representar conjuntos e letras minusculas *x*, *y*, etc para descrever seus pontos. Vamos usar a notação $|x|$ para descrever a *norma* de um numero real , *R*. Se o ponto for do R^2 vamos usar $|x|$ para denotar a *norma Euclidiana* do ponto $x=(x_1, x_2)$ *do* R^2 ou seja $|x|=(x_1^2+ x_2^2)^{1/2}$.

Também vamos considerar que todas as operações nos conjuntos são calculadas em relação ao domínio, *D*, a que pertencem. Assim para um conjunto *A*, nós vamos usar a notação A^o, A^b e A^c para descrever o *interior*, a *borda* e o *complemento* de *A* respectivamente. Essas operações são feitas em relação ao domínio a que o conjunto pertence. Considerando que a diferença entre A e B é:

$$A \setminus B = \{ x \in D : x \in A \text{ and } x \notin B \} = A - B$$

e a diferença entre B e A é:

$$B \setminus A = \{ x \in D : x \in B \text{ and } x \notin A \} = B - A$$

o complemento de *A* será: $A^c = D \setminus A = \{ x \in D : x \notin A \} = D - A;$

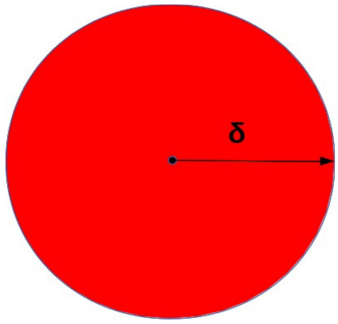
Um conjunto é denominado *fechado* se a ele pertencer todos os seus pontos de borda ou fronteira. Vamos chamar de *corpo paralelo de um conjunto A* ao conjunto de pontos do domínio *D* que possuem distância aos pontos do conjunto *A* menor ou igual a um dado valor δ . Isto é são todos os pontos pertencentes ao domínio distantes de *A* (Falconer,1990) . Isto pode ser descrito pela equação (1)

(1)

No processamento de imagens, nosso domínio, *D*, é um subconjunto discreto do R^2 O cálculo do corpo paralelo pode ser feito através de uma simples técnica de determinação dos píxels de R^2 cuja distancia ao conjunto sejam menor ou igual ao dado valor δ (para simplificar inicia-se o calculo pelos pontos da borda do conjunto e mais próximos a ele). Podemos ainda considerar que com imagens, devido aos pixeis serem sempre valores inteiros, o conjunto de possíveis distância de um pixel será restrita a um número discreto de valores. Por exemplo, a Figura 1(a) representa 3 vizinhanças de uma imagem formada por apenas um pixel. Em preto sua vizinhança zero, isto é com δ =0 . O conjunto de pontos vermelho ou preto representará sua vizinhança menor ou igual a 2 , isto é com $\delta=2$. E o conjunto de pontos azul, vermelho ou preto representará sua vizinhança menor ou igual a 2,83 , isto é com $\delta=2{,}83$. Dessa forma, para calcular o conjunto paralelo de *A*, basta analisar as vizinhanças de *A*, de distância ou igual a um valor definido . O conjunto de pixels que tiver dentro desta distancia sera chamado de conjunto paralelo do conjunto dado *A*, sendo o corpo paralelo formado pelos pixel dessas vizinhança que possuem distância de para *A* menor ou igual a . Nesta figura, indica-se na horizontal e na vertical as coordenadas horizontais (x_1) e verticais (x_2) dos pixels (x_1, x_2) e os valores em cada posição correspondem a distância desta para o pixel central. No cálculo do corpo paralelo dessa imagem, inicialmente busca-se as vizinhanças de *A*. De maneira geral, usando a norma Euclidiana as vizinhanças de pontos do R^2 tem a forma de círculos Figura 1(b), que serão tão mais preciso quanto maior for a resolução considerada, ou menor o tamanho relativo do pixel (Naylor e Sell, 1982) .

	0	1	2	3	4	5	6
0							
1		2,83	2,24	2,00	2,00	2,00	
2		2,24	1,41	1,00	1,00	1,00	
3		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
4		2,24	1,41	1,00	1,41	2,24	
5		2,83	2,24	2,00	2,24	2,83	
6							

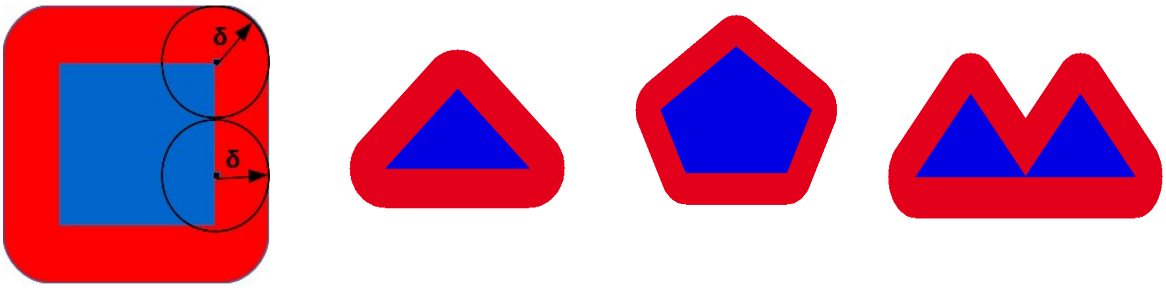
(a)



(b)

Figura 1: Cálculo do corpo paralelo do pixel (3,3). Pontos em preto vizinhança 0 de (3,3) , em vermelho e preto do corpo paralelo de (3,3) com vizinhança menor ou igual a 2 , isto é com $\delta = 2$. Pontos azul, vermelho ou preto representará sua vizinhança menor ou igual a 2,83 , isto é com $\delta = 2{,}83$ vizinhanças de pontos do R^2

Em imagens, ou conjuntos formados por mais de um pixel, esse processo é repetido em todos os pixels que compõem a imagem, como na Figura 2-a. O resultado disso pode ser visto na parte em vermelho que, junto com o conjunto original, em azul, mostra o corpo paralelo deste. Outros conjunto tem outras formas como corpos paralelos. Nas Figura 2-b a Figura 2-d se encontram em azul alguns conjuntos em vermelho seus corpos paralelos. Repare que um conjunto A pode ter uma seria de *corpos paralelos* dependendo da vizinhança que se deseja. Ou em outras palavras o *corpo paralelo de um conjunto A* pode ser tão *pequeno* ou tão *grande* quanto se queira.



(a) (b) (c) (d)

Figura 2: Corpos paralelo de conjuntos com diversas formas geométricas.

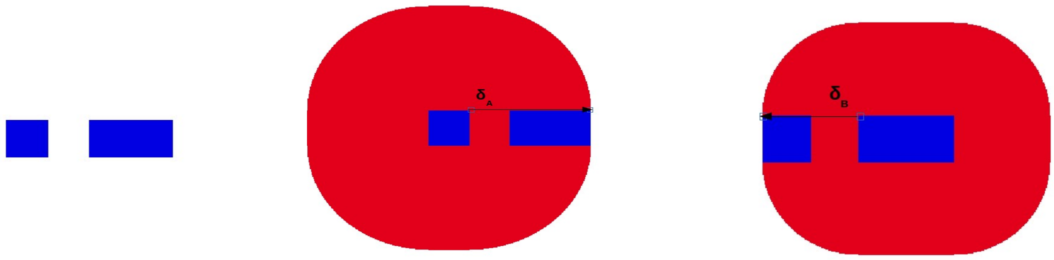
Cálculo da distância de Hausdorff

O cálculo da distância de Hausdorff entre dois conjunto fechados *A* e *B*, *d(A,B)*, utilizando o conceito de corpo paralelo, é dada pela equação (2) (Falconer,1990) . Ou seja, o menor δ_A para o qual a corpo paralelo do conjunto *A* contém o conjunto *B*, $B \subset A_\delta$ e vice versa (isto é o menor δ_B para o qual $A \subset B_\delta$):

$$d(A,B) = inf\{\delta : A \subset B_\delta \text{ e } B \subset A_\delta\} \qquad (2)$$

Nesta versão , calcula-se $\delta_A = inf\{\delta : B \subset A_\delta\}$ e $\delta_B = inf\{\delta : A \subset B_\delta\}$. Ao final, o maior dos dois δ será a distância de Hausdorff entre A e B: $d(A,B) = max\{\delta_A, \delta_B\}$

Por exemplo, através dos conjuntos *A* e *B* da Figura 3-a. Tem-se que $\delta_A = inf\{\delta : B \subset A_\delta\}$ é representado pela Figura 3-b, no qual o conjunto *B* está contido no corpo paralelo B_δ . Também que $\delta_B = inf\{\delta : A \subset B_\delta\}$ é representado pela Figura 3-c na qual o conjunto A está contido no corpo paralelo A_δ de $\delta = \delta_B$.



(a) (b) (c)

Figura 3: Conjuntos *A* e *B*, menor corpo paralelo de *A* que contem *B* e menor corpo paralelo de *B* que contem *A*

Ao final, $d(A, B) = max\{\delta_A, \delta_B\}$, no caso do exemplo da Figura 3 observa-se que o menor corpo paralelo de A que contem B é a distância de Hausdorff entre os conjuntos A e B , como pode visto na Figura 4, onde os dois corpos paralelos são construídos com essa distância.

Vamos considerar agora a versão discreta de (1) e (2) substituindo os conjuntos contínuos *A* pela suas versões discretas que vamos chamar de A_Δ . O mesmo faremos para o conjunto *B* que terá agora uma versão discreta B_Δ. Desta maneira nós temos agora dois conjuntos A_Δ , B_Δ que são subconjuntos discretos do R^2 e podemos pensar em calcular uma versão discreta da distância de Hausdorff entre A_Δ e B_Δ baseados em uma versão discreta da definição de *corpo paralelo δ de um conjunto A discreto:* $A_{\Delta\delta}$. Com esses corpos paralelos discretos podemos considerar a versão discreta da distância de Hausdorff entre A_Δ e B_Δ *:* $d(A_\Delta , B_\Delta)$, ou seja uma versão discreta de (2) como:

$$d(A_\Delta , B_\Delta) = \text{inf } \{ \delta : A_\Delta - B_{\Delta\delta} = B_\Delta - A_{\Delta\delta} = \emptyset \} \qquad (3)$$

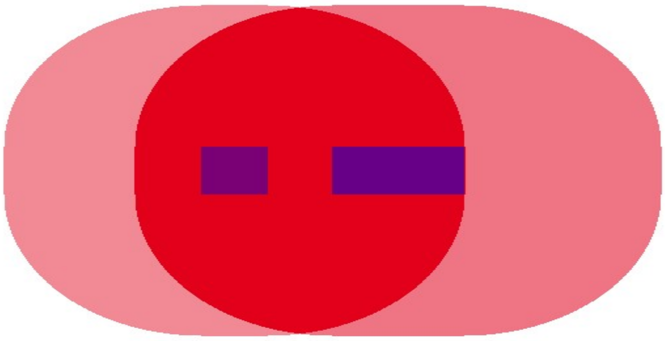


Figura 4 Corpos paralelos dos conjuntos A e B da Figura 3 usando $d(A, B) = max\{\delta_A, \delta_B\}$

Embora essa nova versão para conjuntos discretos seja uma consequência direta da (2) ainda não havia sido usada para calcular a distancia de Hausdorff de conjuntos discretos, tanto quanto nos saibamos.

O algoritmo capaz de realizar esses cálculos é exibido abaixo.

δ = 0
do
    δ= δ+1
    compute $\mathbf{A_{\Delta\delta}}$
    compute $\mathbf{B_{\Delta\delta}}$
while($\mathbf{B_{\Delta} - A_{\Delta\delta} \neq \emptyset}$ ***or*** $\mathbf{A_{\Delta} - B_{\Delta\delta} \neq \emptyset}$***)***
return δ

Comparando os cálculos das DH pelas varias expressões

Para um conjunto não vazio $A \neq \emptyset$, contido em *D*, $A \subset D$; a distancia entre um ponto qualquer de *D*, *x* e *A* é definida como

$$d_A(x) = \inf_{y \in A} |x - y|$$

para todo $x \in D$ *e* $y \in A$. A definição tradicional da distancia de Hausdorff (HD) , *p(A,B)* é calculada pelas expressões;

$$\begin{aligned} \rho(A,B) &= \max\left\{ \sup_{x \in A} d(x,B), \sup_{x \in B} d(x,A) \right\} \\ &= \sup_{x \in \mathcal{D}} |d_A(x) - d_B(x)|, \end{aligned} \tag{4}$$

Usando essa definição para calcular as distancia entre os conjuntos *A* e *B* da Figura 3 -a. Facilmente observa-se que *p(A,B)* corresponde a distância Euclidiana entre os pontos (250,200) e (400,200) . Ou seja 150.

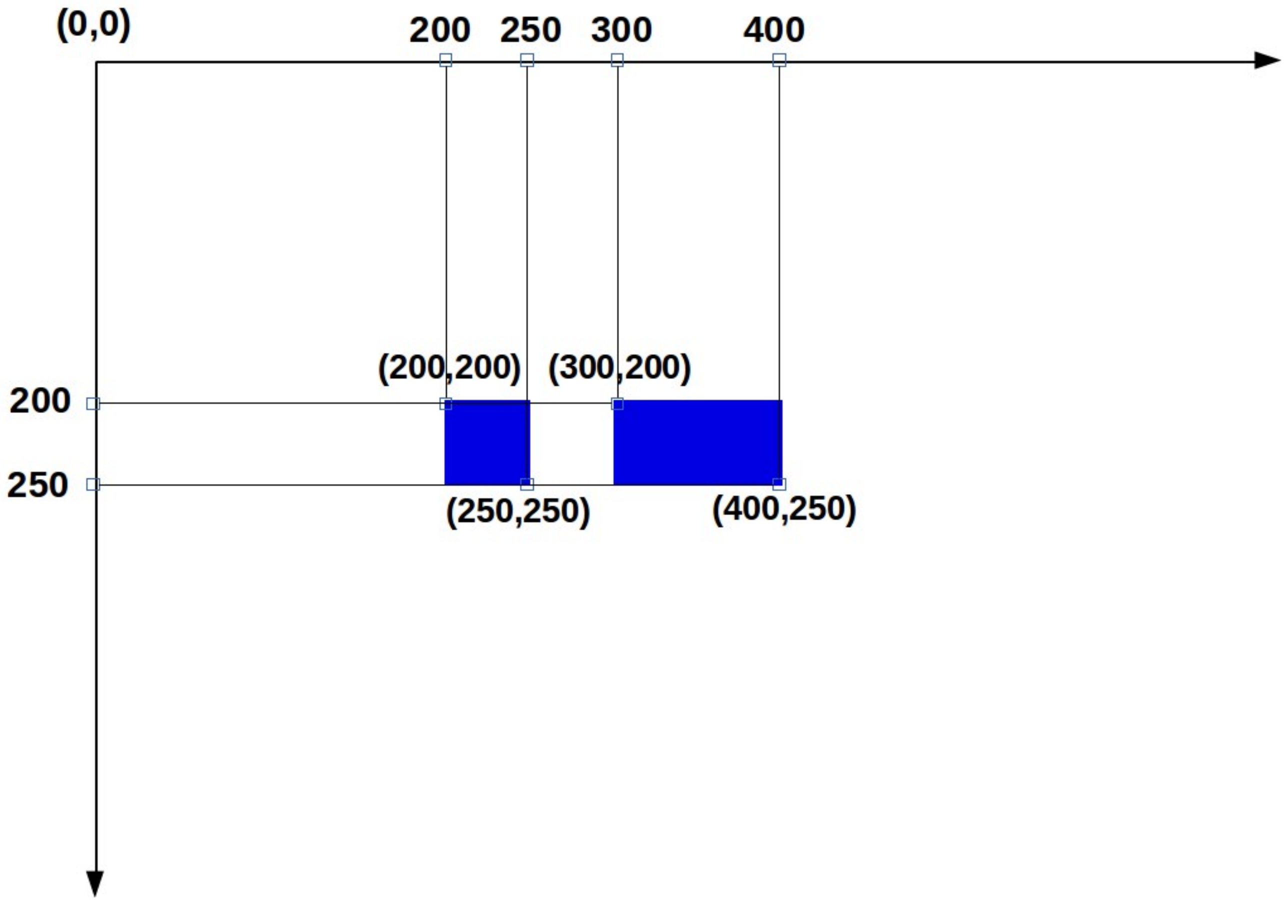


Figura 5: Conjuntos *A* e *B* da Figura 5, definidos em um sistema de coordenadas

Pelas Figuras 3-b e 3-c, vê-se que este é exatamente o ponto que corresponde ao menor *corpo paralelo δ do conjunto A*, que também é o inf { δ : A_{Δ} - $B_{\Delta\delta}$ = B_{Δ}- $A_{\Delta\delta}$ = Ø }. Mas a descoberta de qual é o menor valor dos corpos pralelos de uma figura que interceptam a outra é uma forma bem mais intuitiva, simples e ludica de se chegar a eses pontos.

Referencias

[1] Falconer, K. J. - Fractal Geometry: Mathematical foundations and applications, Wiley, 1990.
[2] Naylor, A.W. And Sell, G. R , Linear Operator Theory in Engineering and Science, Springer; 1st ed. 1982